АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ

УДК 62-192:621

ФУНКЦИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ НАРАБОТКАХ С РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ КАК СМЕСЬ *n* ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ. НАХОЖДЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СМЕСЕЙ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

И. М. Федотова[1,*], В. И. Вайнштейн[1], Г. М. Цибульский[1], Ю. В. Вайнштейн[1]

[1] *Институт космических и информационных технологий ФГАОУ ВО "Сибирский федеральный университет", Красноярск, Россия*

**e-mail: firim@mail.ru*

Поступила в редакцию 27.10.2017 г.
Принята к публикации 18.02.2019 г.

В статье рассматриваются задачи теории надежности технических систем для случая, когда наработки до отказа восстанавливаемых (заменяемых) элементов распределены как смесь распределений. Для простого процесса восстановления, когда наработки распределены в виде смеси n экспоненциальных распределений, представлен метод нахождения в явном виде функции восстановления (среднего числа отказов на промежутке от 0 до t). Для случая $n = 3$ выписана ее явная формула. Случай $n = 2$ рассмотрен в [1]. Для смесей двух и трех экспоненциальных, Эрланга, Релея и Максвелла распределений представлен алгоритм получения в явном виде точечных оценок неизвестных параметров, входящих в смесь. В работе продолжаются исследования, начатые в работах [1, 2].

Ключевые слова: смесь функций распределений, процесс восстановления, функция восстановления, метод моментов

DOI: 10.1134/S0235711919030040

1. Введение. Постановка задачи. Имеется большое количество известных законов распределения, например, экспоненциальное, Вейбулла–Гнеденко, Эрланга, гамма-распределение, нормальное, усеченное нормальное, логарифмически нормальное, обратное гауссовское, Релея, Максвелла, которым подчиняются наработки многих элементов различных технических систем [3]. Понятно, что все они не могут описать разнообразие наработок элементов при их эксплуатации. Например, плотности вероятности известных законов не более чем одномодальны, хотя у наработок плотности могут быть бимодальными (двухвершинными) и даже полимодальными, или когда функция распределения наработки до отказа является смесью двух или большего числа функций распределений из множества известных законов распределения.

Смесь n функций распределений $F_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ [3] определяется по формуле

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(t), \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1. \tag{1}$$

В отличие от одной функции распределения, для смеси распределений задача нахождения точечных оценок параметров, входящих в смесь, значительно усложняется. Это связано со сложностью трансцендентной целевой функции правдоподобия для максимизации, если задача решается методом максимального правдоподобия, с боль-

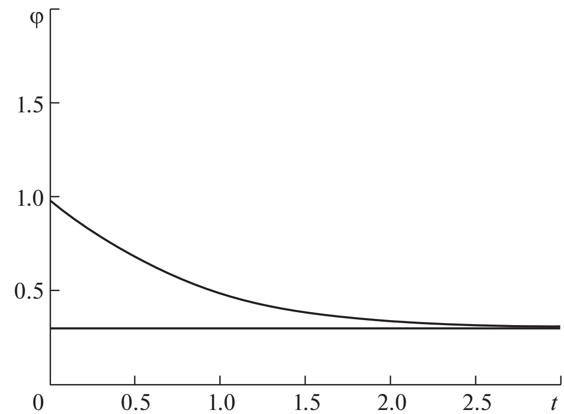

Рис. 1.

шим количеством неизвестных параметров (к параметрам функций распределения, задающих смесь, добавляются неизвестные параметры λ_i с дополнительными условиями $\lambda_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$). Задача еще может усложниться за счет определения функций распределения, задающих смесь, и их количества. Это так называемая задача расщепления смеси [4–8].

В работе рассматриваются две задачи:

1. Нахождение функции восстановления (среднего числа отказов на промежутке от нуля до t) для простого процесса восстановления, образованного наработками, распределенными как смесь n экспоненциальных распределений.

Простым (обычным) процессом восстановления называется последовательность неотрицательных независимых случайных величин X_i – наработок элементов от $i-1$-го до i-го отказа, имеющих одну и ту же функцию распределения [2, 3, 9–12].

2. Нахождение методом моментов точечных оценок неизвестных параметров, входящих в смесь распределений.

2. Функция восстановления простого процесса восстановления при наработках, распределенных как смесь *n* экспоненциальных распределений. Запишем функцию распределения и плотность смеси n экспоненциальных распределений

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (1 - e^{-\alpha_i t}), \quad f(t) = F'(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i e^{-\alpha_i t}, \quad t \ge 0, \quad \lambda_i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1. \qquad (2)$$

Исследуем функцию интенсивности отказов $\varphi(t) = \dfrac{f(t)}{1 - F(t)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i e^{-\alpha_i t}}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-\alpha_i t}}$:

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i e^{-\alpha_i t}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-\alpha_i t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda_k \alpha_k + \sum\limits_{i=1, i\ne k}^{n} \lambda_i e^{-(\alpha_i - \alpha_k)t}}{\lambda_k + \sum\limits_{i=1, i\ne k}^{n} \lambda_i e^{-(\alpha_i - \alpha_k)t}} = \alpha_k = \min_{i=1,2,\ldots,n} \alpha_i,$$

$$\varphi'(t) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i e^{-\alpha_i t}}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e^{-\alpha_i t}}\right)' = -\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\lambda_i\lambda_j(\alpha_i-\alpha_j)^2 e^{-(\alpha_i+\alpha_j)t}}{2\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e^{-\alpha_i t}\right)^2} < 0, \quad \varphi(0) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i.$$

Получили, что функция интенсивности отказов монотонно убывает, и прямая $\varphi = \alpha_k$ является ее горизонтальной асимптотой. Характерный график функции интенсивности отказов имеет вид (рис. 1).

Замечание. Интенсивность отказов экспоненциального распределения $F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$ постоянна: $\varphi(t) = \alpha$. Из рис. 1 видно, что интенсивность отказов смеси экспоненциальных распределений имеет период приработочных отказов, и лишь с увеличением продолжительности работы интенсивность становится практически постоянной. Это существенно отличает смесь экспоненциальных распределений от одного экспоненциального распределения, при котором интенсивность отказов не имеет периода приработки, такого важного и характерного в начальный период работы многих технических систем.

Найдем функцию восстановления $H(t)$ (среднее число отказов за время от нуля до t) простого процесса восстановления, образованного смесью n экспоненциальных распределений. Запишем интегральное уравнение для функции восстановления [2, 3, 9–12]

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-x)dF(x).$$

Для (2)

$$H(t) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(1-e^{-\alpha_i t}) + \int_0^t H(t-x)d\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(1-e^{-\alpha_i x})\right). \tag{3}$$

Переходя в (3) к преобразованию Лапласа–Стилтьеса $F^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}dF(t)$ [3, 11] и, учитывая $(1-e^{-\alpha_i t})^*(s) = \frac{\alpha_i}{s+\alpha_i}$, $(\int_0^t H(t-x)dF(x))^*(s) = H^*(s)F^*(s)$ [3], получаем $H^*(s) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i\alpha_i}{s+\alpha_i} + H^*(s)\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i\alpha_i}{s+\alpha_i}$. Отсюда

$$H^*(s) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i\alpha_i}{s+\alpha_i}}{1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i\alpha_i}{s+\alpha_i}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i\prod_{j=1, j\neq i}^{n}(s+\alpha_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+\alpha_i) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i\prod_{j=1, j\neq i}^{n}(s+\alpha_j)} = \frac{P_{n-1}(s)}{Q_n(s)}, \tag{4}$$

$P_{n-1}(s)$, $Q_n(s)$ – многочлены степени $n-1$ и n соответственно

$$P_{n-1}(0) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\prod_{j=1}^{n}\alpha_j = 1\cdot\prod_{j=1}^{n}\alpha_j \neq 0,$$

$$Q_n(0) = \prod_{i=1}^{n}\alpha_i - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\prod_{j=1}^{n}\alpha_j = \prod_{i=1}^{n}\alpha_i - 1\cdot\prod_{j=1}^{n}\alpha_j = 0.$$

Переходя к обратному преобразованию Лапласа–Стилтьеса в (4), находим функцию восстановления $H(t)$. Для нахождения обратного преобразования Лапласа–Стилтьеса следует вначале перейти к преобразованию Лапласа [2, 13]

$$\hat{H}(s) = \int_0^\infty e^{-st} H(t)dt, \quad \hat{H}(s) = \frac{H^*(s)}{s}, \tag{5}$$

а затем воспользоваться формулой обратного преобразования Лапласа дробно-рациональной функции.

Если $\hat{H}(s)$ дробно-рациональная функция: $\hat{H}(s) = \dfrac{P_m(s)}{Q_n(s)}$, $P_m(s)$, $Q_n(s)$ – многочлены степени m и n соответственно ($m < n$), то [13]

$$H(t) = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{(l_k - 1)!} \lim_{s \to s_k} \frac{d^{l_k - 1}}{ds^{l_k - 1}} ((s - s_k)^{l_k} \hat{H}(s) e^{st}), \tag{6}$$

где s_k нули знаменателя функции $\hat{H}(s)$ кратности l_k ($Q_n(s_k) = 0$), $k = 1, \ldots, r$, $\sum_{k=1}^{r} l_k = n$.

Рассмотрим случай $n = 3$. В соответствии с (4)

$$H^*(s) = \frac{(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3)s^2 + (\lambda_1\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) + \lambda_2\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_3) + \lambda_3\alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2))s + \alpha_1\alpha_2\alpha_3}{s(s^2 + (\alpha_1(1 - \lambda_1) + \alpha_2(1 - \lambda_2) + \alpha_3(1 - \lambda_3))s + \lambda_3\alpha_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1\alpha_3 + \lambda_1\alpha_2\alpha_3)}.$$

При конкретных значениях параметров λ_1, λ_2, λ_3, α_1, α_2, α_3 находим корни квадратного уравнения

$$s^2 + (\alpha_1(1 - \lambda_1) + \alpha_2(1 - \lambda_2) + \alpha_3(1 - \lambda_3))s + \lambda_3\alpha_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1\alpha_3 + \lambda_1\alpha_2\alpha_3 = 0,$$

а затем по формулам (5), (6) получаем функцию восстановления $H(t)$.

Для смеси двух экспоненциальных распределений $F(t) = \lambda(1 - e^{-\alpha_1 t}) + (1 - \lambda)(1 - e^{-\alpha_2 t})$, $0 \le \lambda \le 1$, функция восстановления найдена в [1]

$$H(t) = \frac{\alpha_1\alpha_2}{(1 - \lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2} t + \frac{\lambda(1 - \lambda)(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{((1 - \lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2)^2} (1 - e^{-((1-\lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2)t}).$$

3. Метод моментов получения точечных оценок неизвестных параметров смеси распределений. Получим методом моментов явные формулы точечных оценок неизвестных параметров смеси двух и трех распределений характерных для теории надежности технических систем.

Пусть $F(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ – функция распределения, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ – неизвестные параметры. Точечные оценки параметров находятся методом моментов приравнивая теоретические $\mu_k = \int_0^\infty x^k dF(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ и эмпирические моменты $M_k = \dfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^k$ до порядка r, где $x_1, x_2, \ldots, x_N$ – заданная выборка объема N

$$\int_0^\infty x^k dF(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^k, \quad k = 1, \ldots, r. \tag{7}$$

Систему (7) для смесей n однопараметрических распределений Релея, Максвелла, Эрланга, экспоненциально можно записать в единообразном виде

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_i^k = \overline{M_k}, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \ge 0, \quad k = 1, \ldots, 2n - 1, \quad \left(\overline{M_k} = \frac{M_k}{\bar{\mu}_k}\right). \tag{8}$$

1) Для смеси распределений Релея: $f_i(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\sigma_i^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_i^2}}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ $\bar{\mu}_k = \dfrac{k!!}{2}\sqrt{2\pi}$, если k – нечетное и $\bar{\mu}_k = \left(\dfrac{k}{2}\right)!2^{\frac{k}{2}}$, если k – четное, $\beta_i = \sigma_i$;

2) Для смеси распределений Максвелла: $f_i(t) = \begin{cases} \dfrac{4h_i^3}{\sqrt{\pi}} t^2 e^{-h_i^2 t^2}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ $\bar{\mu}_k = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{k+1}{2}\right)!$, если k – нечетное и $\bar{\mu}_k = \dfrac{(k+1)!!}{2^{\frac{k}{2}}}$, если k – четное, $\beta_i = \dfrac{1}{h_i}$;

3) Для смеси распределений Эрланга порядка $m > 1$: $f_i(t) = \dfrac{\alpha_i^m t^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\alpha_i t}$, $\bar{\mu}_k = m(m+1)...(m+k-1)$, $\beta_i = \dfrac{1}{\alpha_i}$. При $m = 1$ имеем смесь n экспоненциальных распределений.

Заметим, что система (8) является системой алгебраических уравнений относительно неизвестных λ_i, β_i. Это позволяет для ее решения эффективно применять различные пакеты прикладных программ, например, *Maple*. Это могут быть явные решения, либо решения, получаемые численными методами.

Для смесей двух и трех распределений: экспоненциальных, Релея, Максвелла и Эрланга решение системы (8) можно выписать в явном виде.

Запишем систему (8) для смеси двух распределений ($\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1 - \lambda$)

$$\lambda\beta_1 + (1-\lambda)\beta_2 = \bar{M}_1, \quad \lambda\beta_1^2 + (1-\lambda)\beta_2^2 = \bar{M}_2, \quad \lambda\beta_1^3 + (1-\lambda)\beta_2^3 = \bar{M}_3. \tag{9}$$

Из первого уравнения системы (9) выражаем $\lambda = \dfrac{\bar{M}_1 - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2}$ и подставляем его во второе и третье уравнения

$$\bar{M}_1(\beta_1 + \beta_2) - \beta_1\beta_2 = \bar{M}_2, \quad \bar{M}_1(\beta_1 + \beta_2)^2 - \bar{M}_1\beta_1\beta_2 - \beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2) = \bar{M}_3.$$

Переходя к неизвестным $p = \beta_1 + \beta_2$ и $q = \beta_1\beta_2$, получаем линейную систему уравнений: $\bar{M}_1 p - q = \bar{M}_2$, $\bar{M}_2 p - \bar{M}_1 q = \bar{M}_3$. Ее решение:

$$p = \frac{\bar{M}_3 - \bar{M}_1\bar{M}_2}{\bar{M}_2 - \bar{M}_1^2}, \quad q = \frac{\bar{M}_1\bar{M}_3 - \bar{M}_2^2}{\bar{M}_2 - \bar{M}_1^2}.$$

Далее по найденным $\beta_1 = \dfrac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, $\beta_2 = \dfrac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ находим неизвестные параметры смеси в явном виде.

Замечание. Если для конкретной выборки найденные решения комплексные, или хотя бы одно из них неположительное, или найденное λ не удовлетворяет неравенству $0 \leq \lambda \leq 1$, то метод моментов для данной выборки не дает возможность получить точечные оценки неизвестных параметров смеси.

Явные формулы точечных оценок параметров для смеси двух экспоненциальных распределений получены в работе [1], включающей пример выборки, для которой гипотеза об экспоненциальном распределении отвергается, а гипотеза о распределении как смесь двух экспоненциальных согласуется с рассматриваемой выборкой.

Рассмотрим систему (8) для смеси трех распределений Релея, Максвелла, Эрланга:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\quad \lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\beta_3=\bar{M}_1,\quad \lambda_1\beta_1^2+\lambda_2\beta_2^2+\lambda_3\beta_3^2=\bar{M}_2,$$

$$\lambda_1\beta_1^3+\lambda_2\beta_2^3+\lambda_3\beta_3^3=\bar{M}_3,\quad \lambda_1\beta_1^4+\lambda_2\beta_2^4+\lambda_3\beta_3^4=\bar{M}_4,\quad \lambda_1\beta_1^5+\lambda_2\beta_2^5+\lambda_3\beta_3^5=\bar{M}_5.$$

Из первых трех уравнений системы выражаем λ_1, λ_2, λ_3:

$$\lambda_1=\frac{\bar{M}_1\beta_3-\beta_2\beta_3-\bar{M}_2+\bar{M}_1\beta_2}{(\beta_1-\beta_2)(\beta_3-\beta_1)},\quad \lambda_2=-\frac{\bar{M}_1\beta_3-\beta_1\beta_3-\bar{M}_2+\bar{M}_1\beta_1}{(\beta_1-\beta_2)(\beta_3-\beta_2)},$$

$$\lambda_3=-\frac{\bar{M}_1\beta_1-\beta_1\beta_2-\bar{M}_2+\bar{M}_1\beta_2}{(\beta_3-\beta_1)(\beta_3-\beta_2)}.$$

Подставляем найденные λ_1, λ_2, λ_3 в четвертое, пятое и шестое уравнения системы. Имеем

$$\bar{M}_2(\beta_1+\beta_2+\beta_3)-\bar{M}_1(\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_3)+\beta_1\beta_2\beta_3=\bar{M}_3,$$

$$\bar{M}_2(\beta_1+\beta_2+\beta_3)^2-\bar{M}_1(\beta_1+\beta_2+\beta_3)(\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_3)+\beta_1\beta_2\beta_3(\beta_1+\beta_2+\beta_3)+$$
$$+\bar{M}_1\beta_1\beta_2\beta_3-\bar{M}_2(\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_3)=\bar{M}_4,$$

$$\bar{M}_2(\beta_1+\beta_2+\beta_3)^3-\bar{M}_1(\beta_1+\beta_2+\beta_3)^2(\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_3)+\beta_1\beta_2\beta_3(\beta_1+\beta_2+\beta_3)^2+$$
$$+\bar{M}_1(\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_3)^2+\bar{M}_1\beta_1\beta_2\beta_3(\beta_1+\beta_2+\beta_3)-\beta_1\beta_2\beta_3(\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_3)-$$
$$-\bar{M}_2(\beta_1+\beta_2+\beta_3)(\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_3)+\bar{M}_2\beta_1\beta_2\beta_3=\bar{M}_5.$$

Левые части полученной системы уравнений являются симметрическими многочленами, что дает возможность в переменных $\beta_1+\beta_2+\beta_3=p$, $\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3=q$ и $\beta_1\beta_2\beta_3=s$ преобразовать ее в линейную систему уравнений

$$\bar{M}_2p-\bar{M}_1q+s=\bar{M}_3,\quad \bar{M}_3p-\bar{M}_2q+\bar{M}_1s=\bar{M}_4,\quad \bar{M}_4p-\bar{M}_3q+\bar{M}_2s=\bar{M}_5.$$

Ее решение:

$$p=\frac{\bar{M}_5\bar{M}_1^2-\bar{M}_5\bar{M}_2+\bar{M}_2^2\bar{M}_3+\bar{M}_3\bar{M}_4-\bar{M}_1\bar{M}_3^2-\bar{M}_2\bar{M}_1\bar{M}_4}{-2\bar{M}_2\bar{M}_1\bar{M}_3+\bar{M}_2^3+\bar{M}_3^2+\bar{M}_1^2\bar{M}_4-\bar{M}_2\bar{M}_4},$$

$$q=-\frac{\bar{M}_1\bar{M}_3\bar{M}_4-\bar{M}_1\bar{M}_5\bar{M}_2+\bar{M}_3\bar{M}_5-\bar{M}_4^2-\bar{M}_3^2\bar{M}_2+\bar{M}_2^2\bar{M}_4}{-2\bar{M}_2\bar{M}_1\bar{M}_3+\bar{M}_2^3+\bar{M}_3^2+\bar{M}_1^2\bar{M}_4-\bar{M}_2\bar{M}_4},$$

$$s=\frac{\bar{M}_3^3-2\bar{M}_3\bar{M}_2\bar{M}_4-\bar{M}_1\bar{M}_3\bar{M}_5+\bar{M}_1\bar{M}_4^2+\bar{M}_2^2\bar{M}_5}{-2\bar{M}_2\bar{M}_1\bar{M}_3+\bar{M}_2^3+\bar{M}_3^2+\bar{M}_1^2\bar{M}_4-\bar{M}_2\bar{M}_4}.$$

По теореме Виета неизвестные β_1, β_2, β_3 являются корнями кубического уравнения $\beta^3-p\beta^2+q\beta-s=0$. Отсюда

$$\beta_1=\frac{1}{6}A^{1/3}-6B+\frac{1}{3}p,\quad \beta_2=-\frac{1}{12}A^{1/3}+3B+\frac{1}{3}p+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{6}A^{1/3}-6B\right)i,$$

$$\beta_3=-\frac{1}{12}A^{1/3}+3B+\frac{1}{3}p-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{6}A^{1/3}-6B\right)i,$$

где $A=-36pq+108s+8p^3+12\sqrt{12q^3-3q^2p^2-54pqs+81s^2+12sp^3}$, $B=\dfrac{3q-p^2}{9A^{1/3}}$.

Далее по найденным β_1, β_2, β_3 находим неизвестные параметры смеси в явном виде.

Таблица 1

Интервалы	(7.4, 11.1)	(11.1, 14.8)	(14.8, 18.5)	(18.5, 22.2)	(22.2, 25.9)	(25.9, 29.6)
Относительные частоты	$\frac{31}{1500}$	$\frac{99}{1500}$	$\frac{169}{1500}$	$\frac{222}{1500}$	$\frac{176}{1500}$	$\frac{130}{1500}$
Интервалы	(29.6, 33.3)	(33.3, 37.0)	(37.0, 40.7)	(40.7, 44.4)	(44.4, 48.1)	
Относительные частоты	$\frac{215}{1500}$	$\frac{237}{1500}$	$\frac{142}{1500}$	$\frac{59}{1500}$	$\frac{20}{1500}$	

Рассмотрим смесь двух нормальных распределений

$$f(t) = \lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(t-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} + (1-\lambda)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(t-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}, \quad \mu_{ik} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-\frac{(t-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}\,dt, \quad k = 1, \ldots, 5,$$

$$\mu_{i1} = a_i, \quad \mu_{i2} = \sigma_i^2 + a_i^2, \quad \mu_{i3} = \sigma_i^2 a_i + a_i^3, \quad \mu_{i4} = 3\sigma_i^4 + 6\sigma_i^2 a_i^2 + a_i^4,$$

$$\mu_{i5} = 15\sigma_i^4 a_i + 10\sigma_i^2 a_i^3 + a_i^5.$$

Для рассматриваемого случая система (8) запишется в виде

$$\begin{gathered}
\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 = M_1, \quad \lambda(\sigma_1^2 + a_1^2) + (1-\lambda)(\sigma_2^2 + a_2^2) = M_2, \\
\lambda(3\sigma_1^2 a_1 + a_1^3) + (1-\lambda)(3\sigma_2^2 a_2 + a_2^3) = M_3, \\
\lambda(3\sigma_1^4 + 6\sigma_1^2 a_1^2 + a_1^4) + (1-\lambda)(3\sigma_2^4 + 6\sigma_2^2 a_2^2 + a_2^4) = M_4, \\
\lambda(15\sigma_1^4 a_1 + 10\sigma_1^2 a_1^3 + a_1^5) + (1-\lambda)(15\sigma_2^4 a_2 + 10\sigma_2^2 a_2^3 + a_2^5) = M_5.
\end{gathered} \tag{10}$$

Укажем схему численного решения системы (10). Выражаем λ из первого уравнения системы (10) и подставляем его во второе и третье уравнения. Относительно σ_1^2 и σ_2^2 получается линейная система двух уравнений. Из нее в явном виде σ_1^2 и σ_2^2 выражаются через a_1 и a_2. Найденные выражения для λ, σ_1^2, σ_2^2 подставляем в четвертое и пятое уравнения рассматриваемой системы (10). Получаем систему двух уравнений относительно a_1, a_2. Далее подстановкой $p = a_1 + a_2$, $q = a_1 a_2$ понижаем ее порядок. Указанные преобразования можно проводить в системе *Maple*.

В итоге система (10) сводится к системе двух алгебраических уравнений относительно p и q, которую численно решаем, например, в системе *Maple*.

Здесь, как и в выше рассмотренных случаях следует следить за выполнением условий $\sigma_1^2 > 0$ и $\sigma_2^2 > 0$, $0 \le \lambda \le 1$.

Следует отметить, что оценки, полученные методом моментов, могут служить начальными приближениями в различных численных итерационных методах при решении задачи методом максимального правдоподобия [14, 15].

4. Численный пример. Рассмотрим пример проверки гипотезы о распределении случайной величины по конкретной выборке с $M_1 = 27.197$, $M_2 = 819.72$, $M_3 = 26606.499$, $M_4 = 911657.69$, $M_5 = 32498037.02$. В табл. 1 приведен ее интервальный вариационный ряд.

На рис. 2 приведена гистограмма относительных частот.

По виду гистограммы выдвигаем гипотезу о распределении в виде смеси двух нормальных распределений. Точечные оценки для параметров смеси находим по предложенному алгоритму в пункте 3: $\lambda = 0.46$, $a_1 = 19.08$, $a_2 = 34.18$, $\sigma_1 = 4.59$, $\sigma_2 = 4.99$. Выдвинутая гипотеза согласуется с рассмотренной выборкой по критерию согласия

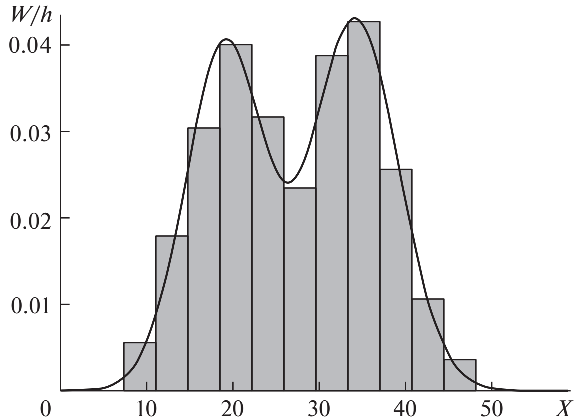

Рис. 2.

Пирсона с уровнем значимости 0.05. График плотности, полученной смеси приведен на рис. 2.

5. Заключение. В математической теории надежности технических систем первичными понятиями являются случайная наработка (время, расстояние) элемента (системы) до отказа и ее функция распределения. Именно они задают важнейшее понятие в теории надежности – процесс восстановления. Как указывалось во введении, известные законы распределения наработок в математической теории надежности не более чем одномодальны, что сужает возможность их применения в теории надежности технических систем.

В статье рассматриваются смеси двух и трех распределений Рэлея, Максвелла, экспоненциального и Эрланга порядка m, характерных для теории надежности технических систем, что дает возможность, например, получения полимодальных распределений наработок. Методом моментов получены явные формулы точечных оценок для неизвестных параметров таких смесей. Разработан численный алгоритм и приведен пример нахождения точечных оценок смеси двух нормальных распределений с использованием системы *Maple*.

Для простого процесса, образованного смесью n экспоненциальных распределений, предложен алгоритм получения в явном виде функции восстановления.

Рассмотренный в статье численный пример нахождения функции распределения у случайной величины по выборке с двухвершинной гистограммой показывает целесообразность дальнейшего исследования смесей классических распределений, как в задачах математической статистики, так и приложении смесей распределений в задачах теории надежности.

Конфликт интересов: Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vaynshteyn I.I.* Renewal process and operation strategies in the theory of reliability of technical systems under prefailure lives distributed as a mixture of two exponential distributions / I.I. Vaynshteyn, I.M. Fedotova, G.M. Tsibul'skiy, Y.V. Vaynshteyn // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2017. V. 46. № 2. P. 84–90.
2. *Вайнштейн И.И.* Процессы и стратегии восстановления с изменяющимися функциями распределения в теории надежности / И.И. Вайнштейн. Красноярск: СФУ, 2016. 189 с.
3. *Байхельт Ф.* Надежность и техническое обслуживание. Математический подход: пер. с англ. / Ф. Байхельт, П. Франкен. М.: Радио и связь, 1988. 392 с.

4. *Айвазян С.А.* Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности / С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. М.: Финансы и статистика, 1989. 609 с.
5. *Батракова Д.А., Королев В.Ю.* Вероятностно-статистический анализ хаотических потоков в телекоммуникационных сетях с помощью скользящего разделения смесей // Системы и средства передачи информации: сб. научных трудов. М.: ИПИ РАН, 2006. С. 183–209.
6. *Батракова Д.А., Королев В.Ю., Шоргин С.Я.* Новый способ вероятностно-статистического анализа информационных потоков в телекоммуникационных сетях // Информатика и ее применение. 2007. С. 40–53.
7. *Королев В.Ю.* ЕМ-алгоритм, его модификации и их применение к задаче разделения смесей вероятностных распределений: Теоретический обзор. М.: ИПИ РАН, 2007. 94 с.
8. *Токмачев М.С., Смирнов С.В.* Программная реализация исследования смесей вероятностных распределений // Вестник Новгородского государственного университета. 2012. № 68. С. 85–89.
9. *Барзилович Е.Ю.* Вопросы математической надежности / Ю.К Беляев, В.А. Каштанов и др. М.: Радио и связь, 1983. 376 с.
10. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. М.: Либерком, 2009. 652 с.
11. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. М.: Наука, 1988. 446 с.
12. *Гнеденко Б.В.* Математические методы в теории надежности: Основные характеристики надежности и их статистический анализ / Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев. М.: Либроком, 2013. 584 с.
13. *Лаврентьев М.А.* Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. М.: ЛАНЬ, 2002. 688 с.
14. *Королев В.Ю., Назаров А.Л.* Разделение смесей вероятностных распределений при помощи сеточных методов моментов и максимального правдоподобия // Автоматика и телемеханика. 2010. Выпуск 3. С. 98–116.
15. *Горошко А.В., Ройзман В.П.* Представление и обработка статистических данных, не подчиняющихся унимодальным законам распределения // Машиностроение и инженерное образование. 2013. № 3. С. 60–67.