ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2019, № 2, с. 46–52

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 623.46.017

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ СТАТИСТИК УСЛОВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЯ НАДЕЖНОСТИ ВЫСОКОНАДЕЖНЫХ НЕРЕМОНТИРУЕМЫХ ИЗДЕЛИЙ ОДНОКРАТНОГО ДЕЙСТВИЯ

© 2019 г. Б. А. Белобрагин[1], Б. А. Авотынь[1,*], А. И. Устинкин[1]

[1] *Акционерное общество “Научно-производственное объединение “СПЛАВ”, г. Тула, Россия*

** e-mail: bavotyn@mail.ru*

Поступила в редакцию 09.06.2017 г.
Принята к публикации 24.12.2018 г.

Научная направленность: оценка показателей надежности неремонтируемого образца однократного действия с вероятностью безотказной работы 0.94 и выше по малой статистической выборке. Приводится анализ способов объединения результатов безотказного испытания с априорной информацией, как первого шага систематизации исходной информации [1] в условиях недостаточной величины необходимой выборки, определенной, например, по [2]. Вопросы сравнения выборок с целью их объединения рассмотрены в [3].

Новизна полученных результатов определяется обобщением сравнительной эффективности статистик условных распределений в приложении к оценкам показателя надежности высоконадежных неремонтируемых изделий однократного действия.

Область применения полученных результатов: оценки надежности высоконадежного неремонтируемого образца однократного действия.

Ключевые слова: методы нахождения оценок, условные распределения, односторонний доверительный интервал

DOI: 10.1134/S0235711919020044

В [3] приведен анализ некоторых проблем привлечения априорной информации к оценкам величины показателя безотказности неремонтируемых образцов однократного действия. Настоящая статья продолжает тему и посвящена методам нахождения оценок в предположении, что объединение результатов испытаний допустимо. Диапазон оцениваемых величин показателя надежности составляет 0.94 и выше.

Часто оценка показателя надежности изделия, например, нижняя доверительная граница $\underline{R}$ показателя безотказности на базе биномиального распределения находится из уравнений Клоппера–Пирсона и в случае n безотказных испытаний чрезвычайно упрощается

$$\underline{R} = \sqrt[n]{1 - \gamma},$$

где γ – доверительная вероятность оценки.

Нетрудно определить потребный объем биномиальных испытаний для подтверждения, например, требований: $\underline{R} \geq 0.97$ при $\gamma = 0.8$. Число безотказных испытаний составит 54. Очевидна чрезмерная величина таких выборок. Уменьшить ее можно повышением эффективности метода оценки и привлечением априорной информации.

Повышение эффективности состоит в выработке допущений, при которых биномиальное распределение можно аппроксимировать распределением Пуассона и другими законами. Привлечение априорной информации базируется на формуле Бейеса и использовании фидуциального распределения. Сравнительный анализ Бейесовского подхода и фидуциального метода (условных распределений по [4]) приведен в [5]. Использование априорной информации позволяет сузить доверительный интервал и поднять значение оценки. Острая практическая необходимость в таких оценках породила множество их модификаций. Анализ эффективности некоторых из них представлен в [6], по результатам которого предлагается использовать, как наиболее эффективную для случая безотказных испытаний, точечную оценку $\hat{R}'$ апостериорного распределения, полученную с помощью метода моментов (точечная оценка определяется как математическое ожидание апостериорного биномиального распределения)

$$\hat{R}' = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{1 - R_H^{n+2}}{1 - R_H^{n+1}}, \tag{1}$$

где R_H – нижняя граница априорного распределения вероятности безотказной работы.

При отсутствии априорной информации ($R_H = 0$) из формулы (1) получаем точечную оценку $\hat{R}$ опытного распределения

$$\hat{R} = \frac{n+1}{n+2}. \tag{2}$$

Показатель $\hat{R}'$ апостериорного распределения можно оценить с помощью зависимости, полученной на основе регрессионного метода [6, с. 312]

$$\hat{R}' = \hat{R} - \frac{2R_H(2\hat{R} - R_H - 1)}{R_H(4-n) + n}, \tag{3}$$

где $\hat{R}$ – точечная оценка вероятности безотказной работы, определенная без учета априорной информации.

Известна другая точечная оценка $\hat{R}$ с дисперсией D, рекомендуемая [7] для оценки вероятности безотказной работы при условии также безотказных испытаний

$$\hat{R} = 1 - \frac{0.5}{n+2}, \quad D = \frac{5n+7}{4(n+2)^2(n+3)}. \tag{4}$$

Существует еще точечная оценка показателя надежности объекта по результатам безотказных испытаний $\hat{R} = \sqrt[n]{0.5}$.

Значения этих точечных оценок вероятности безотказной работы в зависимости от размера n опытной выборки представлены в табл. 1. Некоторые ячейки таблицы не заполнены, так как не дают дополнительной информации для анализа в рамках данной статьи.

Перед анализом данных табл. 1 уместно процитировать хорошо сформулированное в [7, с. 352] замечание о том, что “зависимости, по которым рассчитаны величины показателей, представляют собой функции изменения вероятности безотказной работы в зависимости от числа проведенных испытаний. Сами значения показателей надежности зависят от конструкции изделия, внешних воздействий, принятой системы технического обслуживания и других факторов, но не от количества проведенных безотказных испытаний, по результатам которых не проводятся какие-либо доработки конструкции, а, следовательно, не происходит повышение надежности изделия. Эти зависимости могут применяться только в качестве одного из допущений и использоваться для приближенной оценки достаточности проведенного количества безотказных испытаний при принятии решения о достигнутом уровне точечной оценки веро-

Таблица 1. Точечные оценки вероятности безотказной работы в зависимости от размера *n* опытной выборки

n	Без априорной информации			С априорной информацией					
	$\hat{R} = \sqrt[n]{0.5}$	$\hat{R} = 1 - \dfrac{0.5}{n+2}$	$\hat{R} = \dfrac{n+1}{n+2}$	$\hat{R}' = \dfrac{n+1}{n+2} \times \dfrac{1-R_H^{n+2}}{1-R_H^{n+1}}$			$\hat{R}' = \hat{R} - \dfrac{2R_H(2\hat{R} - R_H - 1)}{R_H(4-n)+n}$		
				$R_H = 0.5$	$R_H = 0.7$	$R_H = 0.9$	$R_H = 0.5$	$R_H = 0.7$	$R_H = 0.9$
1	0.50	0.83	0.70	0.78	0.86	0.95	0.77	0.85	0.95
2	0.71	0.88	0.75	0.80	0.87	0.95	0.79	0.85	0.95
3	0.79	**0.90**	0.80	0.83	0.88	0.95	0.83	0.86	0.95
4	0.84	0.92	0.83	0.85	0.88	0.95	0.83	0.87	0.95
5	0.87	0.93	0.86	0.86	0.89	0.95	0.85	0.88	0.95
6	0.89	0.94	0.88	0.88	0.90	0.96	0.86	0.88	0.95
7	0.90	0.94	0.89	0.89	0.91	0.96	0.87	0.90	0.95
8	0.92	0.95	0.90	0.90	0.91	0.96	0.88	0.90	0.95
9	0.93	0.95	0.91	0.91	0.92	0.96	0.89	0.91	0.95
10	0.93	**0.96**	0.92	0.92	0.92	0.96	0.90	0.91	0.95
11	**0.94**	0.96	0.92	**0.92**	0.93			0.91	0.95
12	0.94	0.96	0.93		0.93			0.91	0.95
13	0.95	0.97	0.93		0.94			0.92	
14	0.95	0.97	0.94		0.94			0.92	
15	**0.95**	0.97	0.94		**0.94**			**0.92**	
16		0.97							
17		0.97							
18		0.98							
19		0.98							
20	0.97	0.98	0.95		0.95				
21	0.97	0.98	0.96						
22	**0.97**	0.98	0.96			**0.97**			
23		0.98							
24		0.98							
25		0.98							
28			0.97			0.97			
38			0.98			0.98			

ятности безотказной работы". В рамках такого подхода анализ данных табл. 1 показывает следующее:

1. Статистика $\hat{R} = 1 - \dfrac{0.5}{n+2}$ обеспечивает наибольшее значение точечной оценки при том же количестве опытов и позволяет подтверждать точечную оценку показателя вероятности безотказной работы, равную 0.9 – тремя безотказными опытами, а равную 0.96 – десятью (следует из сравнения двух подчеркнутых значений в третьем столбце).

2. Статистика $\hat{R} = \dfrac{n+1}{n+2}$ при обработке четырех и более безотказных опытов обеспечивает меньшее значение точечной оценки, чем классическая $\hat{R} = \sqrt[n]{0.5}$ при том же количестве опытов (следует из сравнения подчеркнутых строк второго и четвертого столбцов).

3. Эта же статистика при учете априорной информации в виде

$$\hat{R} = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{1 - R_H^{n+2}}{1 - R_H^{n+1}}$$

с возрастанием числа опытов обеспечивает не большее значение точечной оценки, чем статистики, не учитывающие априорную информацию (следует из сравнения значений в строках, выделенных “жирным”); хотя и обеспечивает более высокий уровень оценки, чем статистика (3).

Сравниваемые статистики, могут обладать свойством, опасным с точки зрения практических приложений: их использование приводит к смещению доверительного интервала относительно истинного значения R. В то же время [6]: “Смещение не обязательно должно играть большую роль, чем дисперсия. Что мы действительно требуем от оценки – это чтобы она была “близка” к истинному значению статистики”. Поэтому с учетом того, что требования к надежности высоконадежных образцов задают в виде нижней односторонней доверительной границы, проанализируем соответствующие оценки нижних границ доверительного интервала при $\gamma = 0.8$; представленные в табл. 2.

Добавим в качестве тестируемых оценку Шора Я.Б., полученную методом максимального правдоподобия в комбинации с теоремой Бейеса, и в допущении, что апостериорное распределение описывается законом Пуассона. Нижняя граница $\underline{R}'$ апостериорного распределения ищется из неявного уравнения

$$1 - \gamma = \frac{1}{C_0} \int_{1-R_H}^{1-\underline{R}'} q^m e^{-nq} dq, \tag{5}$$

где R_H – нижняя граница фидуциального априорного распределения вероятности отказа q; n и m – число опытов и отказов, соответственно.

$$C_0 = \int_{1-R_H}^{1} q^m e^{-nq} dq.$$

Учтем зависимость, полученную на базе (3) [6, с. 312]

$$\underline{R}' = \frac{\underline{R}(1 - R_н)n + 2R_н(1 + R_н)}{R_н(4 - n) + n},$$

где $\underline{R}$ – нижняя доверительная граница вероятности безотказной работы, определенная без учета априорной информации (например, по (2)).

В качестве базовой будем рассматривать стандартную, рекомендованную [8] как наилучшую одностороннюю интервальную оценку показателя надежности объекта по результатам безотказных испытаний

$$\underline{R} = 0.2^{\frac{1}{n}}. \tag{6}$$

Таблица 2. Оценки нижней границы вероятности безотказной работы в зависимости от размера n опытной выборки

n	Без априорной информации		С априорной информацией					
	$\underline{R} = 0.2^{\frac{1}{n}}$	Для оценки $\hat{R} = 1 - \frac{0.5}{n+2}$	Для оценки $1 - \gamma = \frac{1}{C_0}\int_{1-R_H}^{1-\underline{R}'} q^m e^{-nq}dq$			$\underline{R}' = \frac{\underline{R}(1 - R_н)n + 2R_н(1 + R_н)}{R_н(4 - n) + n}$		
			$R_H = 0.5$	$\underline{R_H = 0.7}$	$\underline{R_H = 0.9}$	$R_H = 0.5$	$\underline{R_H = 0.7}$	$\underline{R_H = 0.9}$
4	0.67	0.73	0.70	$\underline{0.80}$	$\underline{0.92}$	0.71	$\underline{0.80}$	$\underline{0.92}$
5	0.72	0.80	0.74	$\underline{0.81}$	$\underline{0.93}$	0.73	$\underline{0.80}$	$\underline{0.92}$
6	0.77	0.84	0.76	$\underline{0.82}$	$\underline{0.93}$	0.76	$\underline{0.82}$	$\underline{0.92}$
7	0.80	0.86	0.79	$\underline{0.83}$	$\underline{0.93}$	0.78	$\underline{0.83}$	$\underline{0.93}$
8	0.82	0.88	0.81	$\underline{0.84}$	$\underline{0.93}$	0.80	$\underline{0.84}$	$\underline{0.93}$
9	0.84	0.88	0.83	$\underline{0.85}$	$\underline{0.93}$	0.81	$\underline{0.84}$	$\underline{0.93}$
10	**0.85**	**0.91**	0.84	0.86	0.93	0.82	0.85	0.93
11	0.86	0.92	0.86		$\underline{0.93}$		$\underline{0.86}$	$\underline{0.93}$
12	0.88	0.93			$\underline{0.93}$		$\underline{0.86}$	$\underline{0.93}$
13	0.88	0.93			$\underline{0.93}$		$\underline{0.87}$	$\underline{0.93}$
14	0.89	0.94			$\underline{0.93}$			$\underline{0.93}$
15	0.90	0.94			$\underline{0.94}$			$\underline{0.94}$
16	0.90	0.95			$\underline{0.94}$			$\underline{0.94}$
17	0.91	0.95			$\underline{0.94}$			$\underline{0.94}$
18	0.91	0.95			$\underline{0.94}$			$\underline{0.94}$
19	0.92	0.96			$\underline{0.94}$			$\underline{0.94}$
20	0.92	0.96			$\underline{0.94}$			$\underline{0.94}$
21	0.93	0.96						
22	0.93	0.96						
23	0.93	0.96						
24	0.94	0.97						
25	0.94	0.97						

В табл. 2, как и в табл. 1 некоторые ячейки не заполнены. Сравнение показывает следующее:

1. Без учета априорной информации наиболее узкий доверительный интервал обеспечивает статистика $\hat{R} = 1 - \frac{0.5}{n+2}$ (следует из сравнения выделенных “жирно” значений во втором и третьем столбцах табл. 2).

2. Две оценки показателя надежности с учетом априорной информации дают одинаковый результат и позволяют значительно уточнить прогнозируемую величину (в сторону возрастания) при ограниченном числе опытов, когда сформулированы обос-

нованные предположения о количественном уровне надежности объекта (следует из сравнения значений оценок по строкам в столбцах с одинаковой R_H).

3. Одновременно, рассмотрение способов учета априорной информации для случая высоконадежных образцов (по данным табл. 1 и 2) позволяет установить приоритет выбора способа на основании некоторых предварительных рассуждений (а и б):

а) Представленные в таблицах данные показывают два способа объединения опытной и априорной информации. Первый, когда известны результаты ранее проведенных испытаний с аналогичными изделиями по биномиальной схеме в условиях, идентичных условиям последующих испытаний. Количество опытов суммируют и используют в статистиках типа $\underline{P} = 0.2^{\frac{1}{n}}$ (второй и третий столбцы табл. 2). Другой способ, когда на основе априорной информации формулируют определенные, обоснованные теоретически или экспериментально, предположения о количественном уровне надежности объекта. В результате усекается интервал поиска оценки (вместо [0, 1] – [R_H; 1]).

б) Высоконадежные образцы предполагают отсутствие отказов при испытаниях ограниченной выборки таких изделий. Следовательно, представленные в таблицах $R_H = 0.5$ и 0.7 могут образоваться лишь при безотказных испытаниях недостаточного для подтверждения заданной характеристики количества образцов ($R_H = 0.5$ соответствует трем испытаниям, $R_H = 0.7$ соответствует четырем или пяти испытаниям). В этом случае существует проблема выбора способа объединения “не полных” результатов испытаний. Например, в случае десяти безотказных опытов простое суммирование их количества с тремя предшествующими, обеспечившими априорную $R_H = 0.5$, с последующей подстановкой в статистики (2) или (6) $n = 13$ дает величину нижней доверительной границы 0.88...0.93 по сравнению с 0.82...0.84 по второму способу объединения. Суммирование десяти опытов с четырьмя или пятью предшествующими аналогично дает 0.89...0.94 по сравнению с 0.85...0.86. Присоединение к проведенным опытам десяти безотказных предшествующих (что соответствует усечению доверительного интервала снизу до 0.9) дает 0.92...0.96 в сравнении с 0.94.

Таким образом, можно констатировать, что объединение результатов ограниченной выборки с априорной (также не достаточной) информацией способом сокращения интервала нахождения оценки надежности может быть не эффективным. Данный вывод согласуется с ([9], с. 393), где отмечается, что “...метод фидуциальных вероятностей становится более эффективным при увеличении числа отказов...”, т.е. не в рассматриваемом случае.

ВЫВОДЫ

1. При объединении опытной и априорной информации следует стремиться к суммированию числа безотказных опытов и использовать статистику $\hat{R} = 1 - \dfrac{0.5}{n+2}$.

2. Когда на основании экспериментальной априорной информации сформулированы предположения о количественном уровне надежности объекта и интервале поиска оценки (вместо [0, 1] – [R_H; 1]), также следует стремиться преобразовать усеченный интервал в число безотказных априорных опытов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буров А.Е., Лепихин А.М., Москвичев В.В.* Возможности расчетной оценки надежности металлокомпозитных баков высокого давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. М.: 2015. № 4.
2. *Садыхов Г.С., Бабаев И.А.* Расчет необходимого количества объектов для проведения циклических испытаний на надежность // Проблемы машиностроения и надежности машин. М.: 2016. № 3. С. 56–63.

3. *Денежкин Г.А., Белобрагин Б.А., Авотынь Б.А.* Оценки показателя надежности неремонтируемого образца однократного действия по малым статистическим выборкам // Проблемы машиностроения и надежности машин. М.: 2017. № 2. С. 76–83.
4. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. С. 218.
5. *Кендалл М., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи. М.: Главная редакция физ.-мат. литературы изд-ва "Наука", 1973. С. 192–218.
6. *Милехин Ю.М., Берсон А.Ю., Кавицкая В.К., Еренбург Э.И.* Надежность ракетных двигателей на твердом топливе: Монография. М.: МГУП, 2005. С. 317.
7. *Животкевич И.Н., Смирнов А.П.* Надежность технических изделий. М.: Олита, 2003. С. 236.
8. РД 50-476-84. Методические указания. Надежность в технике. Интервальная оценка надежности технического объекта по результатам испытаний составных частей. Общие положения. М.: Издательство стандартов, 1985. 54 с.
9. Надежность технических систем. Справочник. Под ред. проф. И.А. Ушакова. М.: Радио и связь, 1985. 606 с.