

## РАЗЛОЖЕНИЕ ШМИДТА И КОГЕРЕНТНОСТЬ ИНТЕРФЕРИРУЮЩИХ АЛЬТЕРНАТИВ

© 2021 г. Д. В. Фастовец<sup>а</sup> \*, Ю. И. Богданов<sup>а</sup> \*\*, Н. А. Богданова<sup>а</sup>, В. Ф. Лукичев<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Физико-технологический институт им. К.А. Валиева Российской АН,  
Нахимовский проспект, 34, корп. 1, Москва, 117218 Россия

\*E-mail: fast93@mail.ru

\*\*E-mail: bogdanov\_yurii@inbox.ru

Поступила в редакцию 03.02.2021 г.

После доработки 27.02.2021 г.

Принята к публикации 01.03.2021 г.

Разложение Шмидта и корреляционный анализ на его основе позволяют выявлять статистические зависимости между различными подсистемами единой физической системы. В качестве рассматриваемых систем могут выступать как квантовые состояния, так и классические распределения вероятностей. В рамках настоящей работы рассмотрены две различные физические системы: квантовые состояния котов Шредингера и двухщелевая интерференция микрочастиц. Показано, что рассмотренные системы имеют единую внутреннюю структуру и могут быть описаны в общем виде в терминах интерферирующих альтернатив. Разработан эффективный подход, который позволяет рассчитывать такие оптические характеристики интерференции, как видность и когерентность. Показано, что скалярное произведение состояний окружения интерферирующих альтернатив выступает в качестве естественного обобщения классического комплексного параметра когерентности световых колебаний, определяющего видность интерференционной картины. Получена простая количественная связь между видностью интерференционной картины и числом Шмидта, определяющим уровень связи между квантовой системой и ее окружением. Разработанные подходы обобщены на случай многомерных состояний котов Шредингера.

DOI: 10.31857/S0544126921040062

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Интерференция квантовых состояний является одним из краеугольных камней концепции квантовых вычислений [1, 2]. Использование этого эффекта в сочетании с запутанностью и квантовым параллелизмом позволяет эффективно решать различные задачи, недоступные для классического вычислителя. Интерференционные эффекты проявляются в самых различных системах, таких как дифракционная решетка, бифотонные поля, двухлучевой электронный интерферометр [3] и др. Важно также отметить интерференционные эффекты, проявляющиеся в квантовых состояниях “кота Шредингера”, представляющих собой суперпозицию когерентных состояний [4] и активно используемых в квантовой оптике [5–7]. Состояния “кота Шредингера” представляют большой интерес в квантовых коммуникациях и квантовой оптике и применяются в различных областях, таких как квантовые вычисления в непрерывных переменных [8–10], квантовые коды коррекции ошибок [11, 12] и прецизионные измерения [13, 14]. Эти практические приложения объясняют быстрое развитие теории квантовых

корреляций в двухчастичных (двухсоставных) квантовых состояниях. Обобщение двухмодовых суперпозиций на когерентные состояния с более чем двумя степенями свободы осуществляется довольно просто, однако содержит в себе ряд скрытых свойств [15, 16], в том числе связанных с многочастичной запутанностью, являющейся наиболее ценным ресурсом для решения коммуникационных и вычислительных задач. Многомодовые запутанные когерентные состояния могут служить ресурсом для реализации GHZ и W состояний [17], а также в качестве кластерных состояний [18]. Разработан метод расчета когерентности интерферирующих квантовых систем. Предлагаемый подход основан на формализме корреляций Шмидта [19] и позволяет оценить степень взаимосвязи двух различных подсистем. Исследована связь между квантовыми состояниями котов Шредингера и квантовой интерференцией в двухщелевом эксперименте.

Разработан метод, который позволяет эффективно рассчитывать такие оптические характеристики интерференции, как видность и когерентность. Предложенный метод обобщен на случай

многомерных состояний котов Шредингера. В рамках этого обобщения получены аналитические формулы, позволяющие моделировать и рассчитывать возникающие интерференционные картины и характеристики. Полученные результаты могут быть использованы при разработке высокомерных квантовых систем обработки информации.

## 2. РАЗЛОЖЕНИЕ ШМИДТА

Математический аппарат, связанный с разложением Шмидта, дает удобный инструмент, который позволяет анализировать запутанность квантовых состояний, а также корреляции в классических распределениях [20]. Пусть,  $|\psi\rangle$  – квантовое состояние двухчастичной (двухсоставной) системы, состоящей из подсистем  $A$  и  $B$ . Тогда разложение Шмидта задается в виде [2]:

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^s \sqrt{\lambda_k} |\psi_k^A\rangle |\psi_k^B\rangle, \quad (1)$$

где  $\lambda_k$  – весовые коэффициенты Шмидта, отсортированные в порядке убывания (невозрастания),  $|\psi_k^A\rangle$  и  $|\psi_k^B\rangle$  – соответствующие моды Шмидта подсистем  $A$  и  $B$ ,  $s$  – размерность наименьшей из подсистем,  $s = \min(\dim A, \dim B)$ . На основе набора коэффициентов Шмидта вводится характеристика, описывающая эффективное количество мод – число Шмидта:

$$K = \frac{1}{\sum_k \lambda_k^2}. \quad (2)$$

Число Шмидта лежит на отрезке  $[1, s]$  и позволяет оценить степень взаимосвязи двух подсистем:  $K = 1$  соответствует только одному отличному от нуля члену в разложении (1) и, следовательно, отсутствию корреляции и квантовой запутанности;  $K = s$  соответствует максимальной корреляции и запутанности между подсистемами.

Рассматриваемый математический инструментарий в сочетании с корневым подходом, позволяет анализировать вероятностные распределения и осуществлять статистический анализ данных [19, 21].

## 3. КОГЕРЕНТНОСТЬ ИНТЕРФЕРИРУЮЩИХ АЛЬТЕРНАТИВ

Важный случай использования разложения Шмидта (1) отвечает ситуации, когда в качестве подсистемы  $B$  выступает окружение изучаемой системы  $A$ . Рассмотрение запутанности между изучаемой квантовой системой и ее окружением

позволяет пролить свет на природу когерентности интерферирующих квантовых состояний.

Рассмотрим данный случай детальнее. Пусть имеются две интерферирующие альтернативы  $|\phi_1\rangle$  и  $|\phi_2\rangle$ , запутанные с состояниями окружения  $|e_1\rangle$  и  $|e_2\rangle$  соответственно (мы предполагаем, что все указанные состояния нормированы на единицу):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 + q_1 q_2 + q_1^* q_2^*}} (|\phi_1, e_1\rangle + |\phi_2, e_2\rangle), \quad (3)$$

где  $q_1 = \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle$  – амплитуда вероятности обнаружить альтернативу  $|\phi_1\rangle$  при условии, что была приготовлена альтернатива  $|\phi_2\rangle$ . Аналогично  $q_2 = \langle e_1 | e_2 \rangle$  – амплитуда вероятности совпадения состояний окружения  $|e_1\rangle$  и  $|e_2\rangle$ . Частный случай, когда альтернативы идеально различимы ( $q_1 = 0$ ), соответствует результатам, изложенным в работах [22, 23].

Рассматриваемая задача сводится к исследованию двухкубитной системы, независимо от сложности интерферирующих состояний и состояний окружения самих по себе. При этом, первый кубит задают интерферирующие альтернативы, а второй – соответствующие им состояния окружения. Путем ортогонализации нетрудно получить базисные состояния рассматриваемых кубитов.

Для кубита, связанного с интерферирующими альтернативами, получаем следующие состояния логического ноля и логической единицы:

$$|0\rangle_1 = |\phi_1\rangle, \quad |1\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - |q_1|^2}} (|\phi_2\rangle - q_1 |\phi_1\rangle). \quad (4)$$

Аналогично, для кубита окружения имеем:

$$|0\rangle_2 = |e_1\rangle, \quad |1\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - |q_2|^2}} (|e_2\rangle - q_2 |e_1\rangle). \quad (5)$$

В результате двухкубитовое состояние (3) можно представить в виде:

$$|\psi\rangle = c_{00} |00\rangle + c_{01} |01\rangle + c_{10} |10\rangle + c_{11} |11\rangle,$$

где

$$c_{00} = \frac{1 + q_1 q_2}{\sqrt{2 + q_1 q_2 + q_1^* q_2^*}}, \quad c_{01} = \frac{q_1 \sqrt{1 - |q_2|^2}}{\sqrt{2 + q_1 q_2 + q_1^* q_2^*}},$$

$$c_{10} = \frac{q_2 \sqrt{1 - |q_1|^2}}{\sqrt{2 + q_1 q_2 + q_1^* q_2^*}}, \quad c_{11} = \frac{\sqrt{(1 - |q_1|^2)(1 - |q_2|^2)}}{\sqrt{2 + q_1 q_2 + q_1^* q_2^*}}.$$

Нетрудно показать [23], что для числа Шмидта справедлива следующая формула:

$$K = \frac{1}{1 - 2\Delta}, \quad (6)$$

где  $\Delta = |c_{00} c_{11} - c_{01} c_{10}|^2$ .

Из представленных выражений следует, что квадрат модуля детерминанта есть:

$$\Delta = \frac{(1 - |q_1|^2)(1 - |q_2|^2)}{(2 + q_1 q_2 + q_1^* q_2^*)^2}.$$

Заметим, что в случае хорошо различимых альтернатив, например, для узких щелей в эксперименте Юнга ( $q_1 = 0$ ), получим:  $\Delta = (1 - |q_2|^2)/4$ . Через значения  $\Delta$  и  $K$  можно выразить все остальные основные величины. Например, веса Шмидта будут иметь вид:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{2-K}{K}} \right) = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1-4\Delta}), \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{2-K}{K}} \right) = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1-4\Delta}). \quad (7)$$

С явлением интерференции, в теории оптических явлений, неразрывно связано понятие видности интерференционной картины  $V$  [24]. Этот параметр характеризует модуляцию интенсивности интерференционными полосами. Видность изменяется в пределах от 0 до 1. Значение видности, равное нулю, соответствует равномерно освещенному экрану и, следовательно, отсутствию интерференционной картины. Значение видности, равное единице, говорит о контрастности и четкости интерференционной картины на экране. Видность интерференционной картины (для узких щелей) определяется в классической оптике формулой [24]:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (8)$$

Здесь  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  – максимальная и минимальная интенсивность регистрируемого оптического сигнала. На языке разложения Шмидта в качестве полезного сигнала  $I_{\max}$  выступает вес  $\lambda_0$  основной (нулевой) моды, а в качестве шума  $I_{\min}$  выступает вес  $\lambda_1$  первой моды, поэтому получаем следующую связь между видностью и числом Шмидта [22]:

$$V = \lambda_0 - \lambda_1 = \sqrt{\frac{2-K}{K}} = \sqrt{1-4\Delta}. \quad (9)$$

Заметим, что непосредственное рассмотрение интерференционной картины от двух узких щелей [22] показывает, что данное нами определение видности (9) полностью согласуется с классическим определением. Для хорошо различимых альтернатив (для узких щелей в эксперименте Юнга), когда  $q_1 = 0$ , имеем следующую простую связь между видностью и когерентностью состояний окружения:

$$V = |q_2| = |\langle e_1 | e_2 \rangle|. \quad (10)$$

Сравнивая представленное описание интерферирующих квантовых альтернатив с классическим описанием явления когерентности, мы видим, что скалярное произведение состояний окружения  $q_2 = \langle e_1 | e_2 \rangle$  выступает в качестве естественного обобщения классического комплексного параметра  $\gamma$ , называемого степенью когерентности световых колебаний [25].

Разработанный математический аппарат может быть применен к любой системе, в которой присутствует интерференция двух различных альтернатив. В рамках настоящей работы рассматриваются многомодовые состояния кота Шредингера и их связь с двухщелевым экспериментом (разделы 4 и 5).

Для полноты картины, представим еще обобщение полученных формул на случай, когда амплитуды альтернатив  $f_1$  и  $f_2$  различные. Вместо формулы (3) получим:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{|f_1|^2 + |f_2|^2 + f_1^* f_2 q_1 q_2 + f_1 f_2^* q_1^* q_2^*}} (f_1 |\varphi_1, e_1\rangle + f_2 |\varphi_2, e_2\rangle).$$

В этом случае амплитуды вероятностей базисных состояний будут даваться следующими формулами:

$$c_{00} = \frac{f_1 + f_2 q_1 q_2}{\sqrt{|f_1|^2 + |f_2|^2 + f_1^* f_2 q_1 q_2 + f_1 f_2^* q_1^* q_2^*}}, \quad c_{01} = \frac{f_2 q_1 \sqrt{1 - |q_2|^2}}{\sqrt{|f_1|^2 + |f_2|^2 + f_1^* f_2 q_1 q_2 + f_1 f_2^* q_1^* q_2^*}},$$

$$c_{10} = \frac{f_2 q_2 \sqrt{1 - |q_1|^2}}{\sqrt{|f_1|^2 + |f_2|^2 + f_1^* f_2 q_1 q_2 + f_1 f_2^* q_1^* q_2^*}}, \quad c_{11} = \frac{f_2 \sqrt{(1 - |q_1|^2)(1 - |q_2|^2)}}{\sqrt{|f_1|^2 + |f_2|^2 + f_1^* f_2 q_1 q_2 + f_1 f_2^* q_1^* q_2^*}}.$$

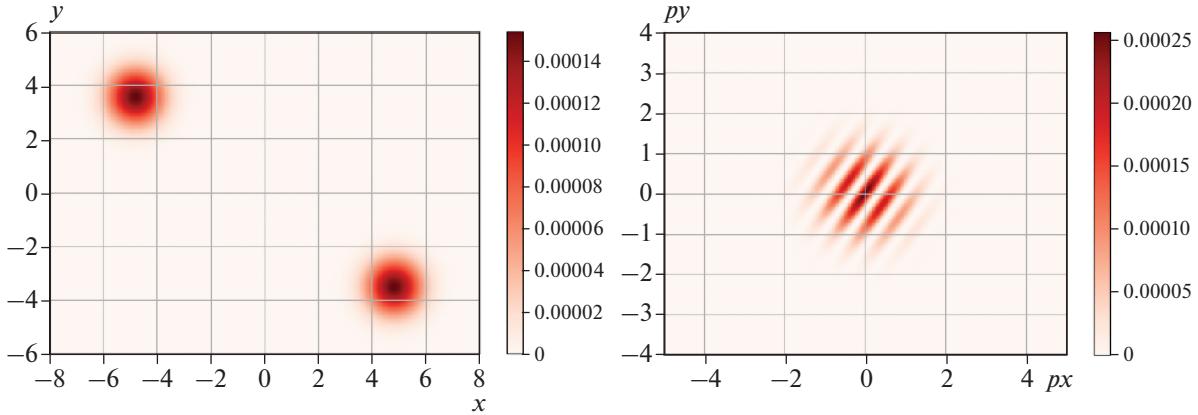


Рис. 1. Вероятностное распределение при  $\alpha = 3.4, \beta = -2.5$ . Слева – координатное распределение. Справа – импульсное распределение.

Квадрат модуля детерминанта теперь есть:

$$\Delta = \frac{|f_1|^2 |f_2|^2 (1 - |q_1|^2)(1 - |q_2|^2)}{(|f_1|^2 + |f_2|^2 + f_1^* f_2 q_1 q_2 + f_1 f_2^* q_1^* q_2^*)^2}.$$

Отметим, что в случае, когда  $f_1 = f_2 = 1$ , мы получаем теорию, изложенную выше. Заметим также, что  $f_1$  и  $f_2$  являются относительными амплитудами. Все представленные формулы остаются инвариантными при умножении амплитуд на произвольную комплексную константу  $C$ :  $f_1 \rightarrow Cf_1, f_2 \rightarrow Cf_2$  (при этом фаза числа  $C$  приведет к умножению обеих амплитуд состояния на несущественный одинаковый фазовый множитель).

#### 4. КВАНТОВОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХМОДОВОГО КОТА ШРЕДИНГЕРА

Состояние кота Шредингера представляет собой суперпозицию когерентных состояний, отличающихся по фазе на  $\pi$  (см., например, [26, 27]):

$$|cat_\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 + 2q_\alpha}} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle), \tag{11}$$

где  $q_\alpha = \langle \alpha | -\alpha \rangle = \exp(-2|\alpha|^2)$ .

Существенный практический интерес представляют многомодовые состояния, образованные несколькими подсистемами (модами). Наличие запутанности в таких состояниях делает их универсальным инструментом для использования в различных квантовых алгоритмах [28]. Наиболее простым состоянием такого рода, представляющим систему из двух запутанных когерентных состояний, является двухмодовое состояние кота Шредингера [29]:

$$|cat_{\alpha\beta}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 + 2q_\alpha q_\beta}} (|\alpha, \beta\rangle + |-\alpha, -\beta\rangle). \tag{12}$$

Визуализировать двухмодовое состояние кота Шредингера удобно при использовании координатного и импульсного представлений волновой функции (см. рис. 1). Волновая функция в координатном представлении имеет вид (опущен несущественный фазовый множитель):

$$\Psi_{\alpha\beta}(x, y) = \frac{\sqrt{2}C_{\alpha\beta}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \cosh((\alpha x + \beta y)\sqrt{2}), \tag{13}$$

где  $C_{\alpha\beta} = (\exp(2\bar{\alpha}^2 + 2\bar{\beta}^2) + \exp(-2\bar{\alpha}^2 - 2\bar{\beta}^2))^{-1/2}$  – нормировочный множитель, в котором введены следующие обозначения для действительных и мнимых частей амплитуд когерентных состояний:  $\bar{\alpha} = \text{Re}(\alpha), \bar{\alpha} = \text{Im}(\alpha), \bar{\beta} = \text{Re}(\beta), \bar{\beta} = \text{Im}(\beta)$ .

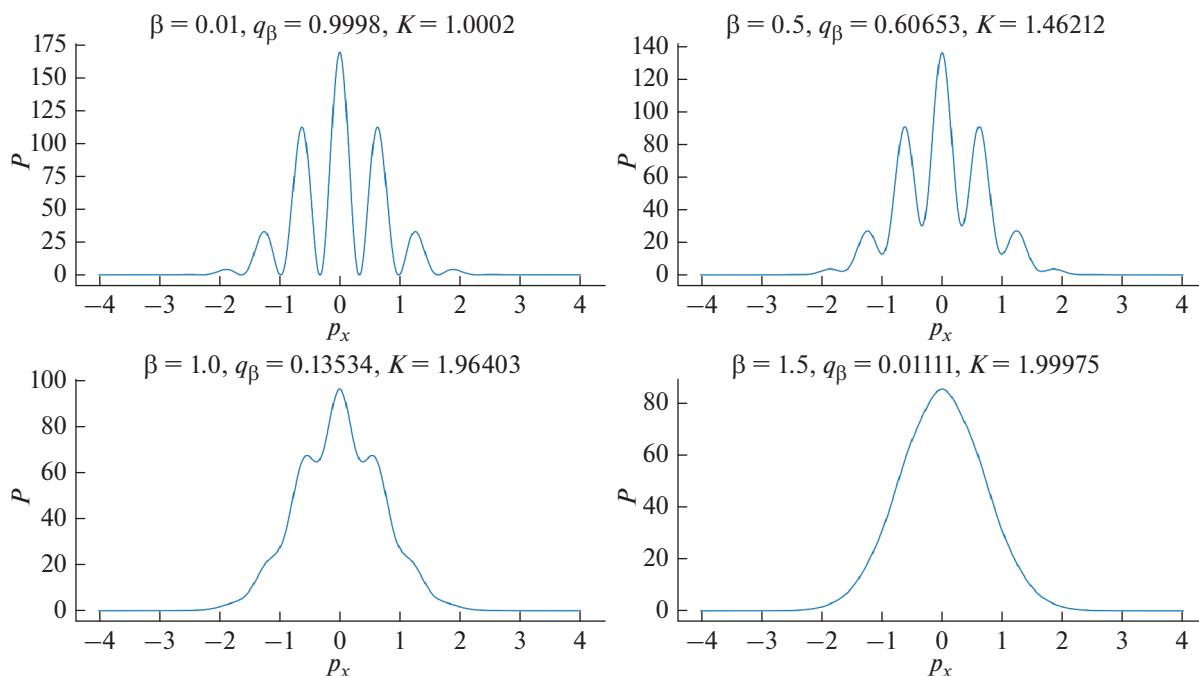


Рис. 2. Иллюстрация исчезновения интерференционной картины при увеличении параметра  $\beta$  ( $\alpha = 3.4$ ).

Представленная формула является прямым следствием формулы (12) без учета несущественного фазового множителя. Фурье-образ этой функции соответствует волновой функции состояния (12) в импульсном представлении:

$$\tilde{\Psi}_{\alpha\beta}(p_x, p_y) = \frac{\sqrt{2}\tilde{C}_{\alpha\beta}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2}{2}\right) \cos((\alpha p_x + \beta p_y)\sqrt{2}), \tag{14}$$

где  $\tilde{C}_{\alpha\beta} = (\exp(2\bar{\alpha}^2 + 2\bar{\beta}^2) + \exp(-2\bar{\alpha}^2 - 2\bar{\beta}^2))^{-1/2}$  – нормировочный множитель. Можно заметить, что константы  $C_{\alpha\beta}$  и  $\tilde{C}_{\alpha\beta}$  переходят друг в друга, если  $\bar{\alpha}^2$  и  $\bar{\beta}^2$  (а также  $\bar{\beta}^2$  и  $\bar{\alpha}^2$ ) меняются местами. Более подробно, при повороте когерентного состояния на угол  $\pi/2$ , координата переходит в импульс  $x \rightarrow p$ , а амплитуда  $\alpha_j$  переходит в некоторую новую амплитуду  $\alpha'_j$ :  $\alpha_j \rightarrow \alpha'_j = \exp(i\pi/2)\alpha_j = i\alpha_j$ , поэтому  $\bar{\alpha}'_j = -\bar{\alpha}_j$ , а  $\bar{\alpha}'_j = \bar{\alpha}_j$ . При таком преобразовании координатная волновая функция (13) переходит в импульсную волновую функцию (14).

На рис. 1 отчетливо видны интерференционные полосы в импульсном представлении.

Так как в данной системе присутствуют interfering альтернативы, то, для исследования квантовой корреляционной связи (запутанности) между модами, а также явлений когерентности и интерференции применим общие подходы, представленные в разделах 2 и 3. Те-

перь следует считать, что  $q_1 = q_\alpha = \langle \alpha | -\alpha \rangle = \exp(-2|\alpha|^2)$ , а  $q_2 = q_\beta = \langle \beta | -\beta \rangle = \exp(-2|\beta|^2)$ .

Для демонстрации того, как происходит постепенное исчезновение интерференционной картины (и уменьшение когерентности) зафиксируем значение параметра  $\alpha$  и будем варьировать значение параметра  $\beta$ . На рис. 2 представлены соответствующие интерференционные картины, образованные маргинальным импульсным распределением  $P(p_x) = \int |\tilde{\Psi}_{\alpha\beta}(p_x, p_y)|^2 dp_y$  первой моды.

При расчете данных зависимостей, вторая подсистема (представленная параметром  $\beta$ ) играет роль окружения основной системы, представленной параметром  $\alpha$ . Таким образом, введенный параметр  $q_\beta = \langle \beta | -\beta \rangle$  имеет смысл когерентности (или видности, если учесть, что  $q_\beta$  – действительное, положительное число, а  $q_\alpha = \exp(-2|\alpha|^2)$  мало). Отметим, что по мере роста параметра  $\beta$  видность интерференционной картины убывает (что так же подтверждается формой представленных графиков), а число Шмидта возрастает, что сви-

детельствует об усилении корреляции между системой и ее окружением.

Также стоит отметить возможность перехода от состояний вида кота Шредингера к двухщелевому эксперименту и обратно. Это возможно в следствии аналогичной с физической точки зрения двухуровневой природы этих систем.

$$\psi(x, y) = \frac{\tilde{C}_{ab}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x\sigma_y}} \left[ \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{4\sigma_x^2} - \frac{(y-b)^2}{4\sigma_y^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x+a)^2}{4\sigma_x^2} - \frac{(y+b)^2}{4\sigma_y^2}\right) \right], \quad (15)$$

где

$$\tilde{C}_{ab} = \left( \exp\left(\frac{\bar{a}^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\bar{b}^2}{2\sigma_y^2}\right) + \exp\left(-\frac{\bar{a}^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\bar{b}^2}{2\sigma_y^2}\right) \right)^{-1/2}$$

– константа нормировки,  $\bar{a} = \text{Re}(a)$ ,  $\bar{a} = \text{Im}(a)$ ,  $\bar{b} = \text{Re}(b)$ ,  $\bar{b} = \text{Im}(b)$ .

В представленной формуле переменная  $x$  соответствует координате интерферирующей микрочастицы, а переменная  $y$  отвечает окружению (показаниям детектора или координате детектирующей частицы). В случае действительных параметров  $a$  и  $b$  можно дать следующую наглядную интерпретацию формуле (15). Интерферирующая частица описывается двумя гауссовыми распределениями со средним  $\pm a$  и дисперсией  $\sigma_x^2$ . Аналогично, детектирование описывается двумя гауссовыми распределениями со средним  $\pm b$  и дисперсией  $\sigma_y^2$ . При прохождении частицы через щель с центром в точке  $x = +a$ , детектор фиксиру-

ет параметр  $y$  (координату детектирующей частицы) вблизи  $y = +b$ . Аналогично, при прохождении частицы через щель с центром в точке  $x = -a$ , детектор фиксирует параметру вблизи  $y = -b$ . Таким образом, показания детектора коррелируют с положением частицы. С квантовомеханической точки зрения рассматриваемое состояние является запутанным: координаты  $x$  и  $y$  коррелируют (запутанны) друг с другом. Очевидно, что корреляция между  $x$  и  $y$  высокая, когда  $b \gg \sigma_y$ . В этом случае, однако, пропадает интерференционная картина.

На основе представленного выражения (15) для координатной волновой функции, путем несложных вычислений, проделанных в работе [22], можно посредством преобразования Фурье получить двумерную волновую функцию в импульсном представлении

$$\tilde{\Psi}(p_x, p_y) = \frac{\sqrt{2}\tilde{C}_{ab}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\sigma_x\sigma_y} \exp(-\sigma_x^2 p_x^2 - \sigma_y^2 p_y^2) \cos(p_x a + p_y b). \quad (16)$$

Сравнивая структуру данной формулы с формулой (14) можно увидеть четкие аналогии. Наличие интерференционного поведения в обеих формулах приводит к выводу о возможности перехода от одного представления (двухмодовое состояние кота Шредингера) к другому (двухщелевая интерференция волновой функции). Полное соответствие этих формул наблюдается при  $a = \alpha\sqrt{2}$ ,  $b = \beta\sqrt{2}$ ,  $\sigma_x = \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\tilde{C}_{ab} = \tilde{C}_{\alpha\beta}$ .

Найденная тесная связь между квантовой интерференцией и математическим аппаратом

квантовых двумерных состояний котов Шредингера, позволяет эффективно оценивать оптические параметры интерференционных систем.

## 5. ОБОБЩЕНИЕ НА МНОГОМОДОВЫЙ СЛУЧАЙ

По аналогии с двухмодовым состоянием кота Шредингера можно ввести состояние, состоящее из произвольного числа мод. Состояние кота Шредингера размерности  $n$  определяется формулой

$$|cat_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 + 2\prod_{j=1}^n q_{\alpha_j}}} (|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\rangle + |-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n\rangle), \quad (17)$$

где

$$q_{\alpha_j} = \langle \alpha_j | -\alpha_j \rangle = \exp(-2|\alpha_j|^2), \quad j = 1, \dots, n.$$

Определим две подсистемы для рассматриваемого состояния: *A* и *B*. Пусть подсистема *A* содержит в себе  $n - m$  различных когерентных мод с параметрами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-m}$  (например, первые  $n - m$  мод), а подсистема *B* состоит из  $m$  мод с параметрами когерентности  $\alpha_{n-m+1}, \alpha_{n-m+2}, \dots, \alpha_n$  (например, последние  $m$  мод).

В рамках данной работы был получен следующий результат: какой бы размерности не было состояние, его можно свести к эффективной двухуровневой системе. Другими словами, любому квантовому состоянию кота Шредингера размерности большей двух, состоящему из двух подсистем можно поставить в соответствие квантовое состояние двухмодового кота Шредингера.

Для изучения корреляционных и интерференционных свойств подсистем *A* и *B* введем два когерентных состояния с параметрами когерентности  $a$  и  $b$ , которые связаны с исходными параметрами следующим образом:

$$a = \sqrt{\sum_{j=1}^{n-m} |\alpha_j|^2}, \quad b = \sqrt{\sum_{j=1}^m |\alpha_{n-m+j}|^2}. \quad (18)$$

Запишем квантовое состояние двумерного кота Шредингера для этих двух параметров на основе (12)

$$|cat_{ab}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 + 2q_a q_b}} (|a, b\rangle + |-a, -b\rangle). \quad (19)$$

Можно показать, что для состояний (17) и (19) числа Шмидта будут в точности совпадать (см. Приложение 1). Данный факт позволяет анализировать когерентность между подсистемами произвольных размерностей.

Кроме того, для многомерных состояний котов Шредингера также справедлива интерпретация в виде двухщелевого эксперимента. Для оценки интерференционных свойств необходимо получить волновую функцию состояния (17) в импульсном представлении. Это можно сделать по аналогии с формулой (14)

$$\tilde{\Psi}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{\sqrt{2} \tilde{C}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}}{4\sqrt{\pi^n}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j^2\right) \cos\left(\sqrt{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j p_j\right), \quad (20)$$

где нормировочный множитель задается формулой

$$\tilde{C}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \left( \exp\left(2 \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_j^2\right) + \exp\left(-2 \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_j^2\right) \right)^{-1/2},$$

а действительные и мнимые части амплитуд когерентных состояний есть  $\bar{\alpha}_j = \text{Re}(\alpha_j)$  и  $\bar{\alpha}_j = \text{Im}(\alpha_j)$ .

Далее, находим соответствующее вероятностное распределение и интегрируем по переменным, со-

ответствующим окружению (последние  $m$  мод). Полученное маргинальное распределение первых  $n - m$  переменных будет описывать соответствующую многомерную интерференционную картину

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(p_1, p_2, \dots, p_{n-m}) &= \frac{\tilde{C}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^2}{\sqrt{\pi^{n-m}}} \exp\left(-\sum_{j=1}^{n-m} p_j^2\right) \cdot \left[ \exp\left(-2 \sum_{j=n-m+1}^n \bar{\alpha}_j^2\right) \cos\left(2\sqrt{2} \sum_{j=1}^{n-m} \bar{\alpha}_j p_j\right) + \right. \\ &\left. + \exp\left(2 \sum_{j=n-m+1}^n \bar{\alpha}_j^2\right) \cosh\left(2\sqrt{2} \sum_{j=1}^{n-m} \bar{\alpha}_j p_j\right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Для примера, возьмем 100000-мерное состояние кота Шредингера с параметрами  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha = 0.01$  и рассмотрим постепенное исчезновение интерференции по мере роста количества мод, рассматриваемых в качестве окружения (см. рис. 3).

Введем суммарный импульс системы, связанный с интерференционной картиной:

$$p = p_1 + \dots + p_{n-m}. \quad (22)$$

В случае, когда параметр  $\alpha$  действителен, можно получить следующее выражение для распределения интерферирующей переменной  $p$ .

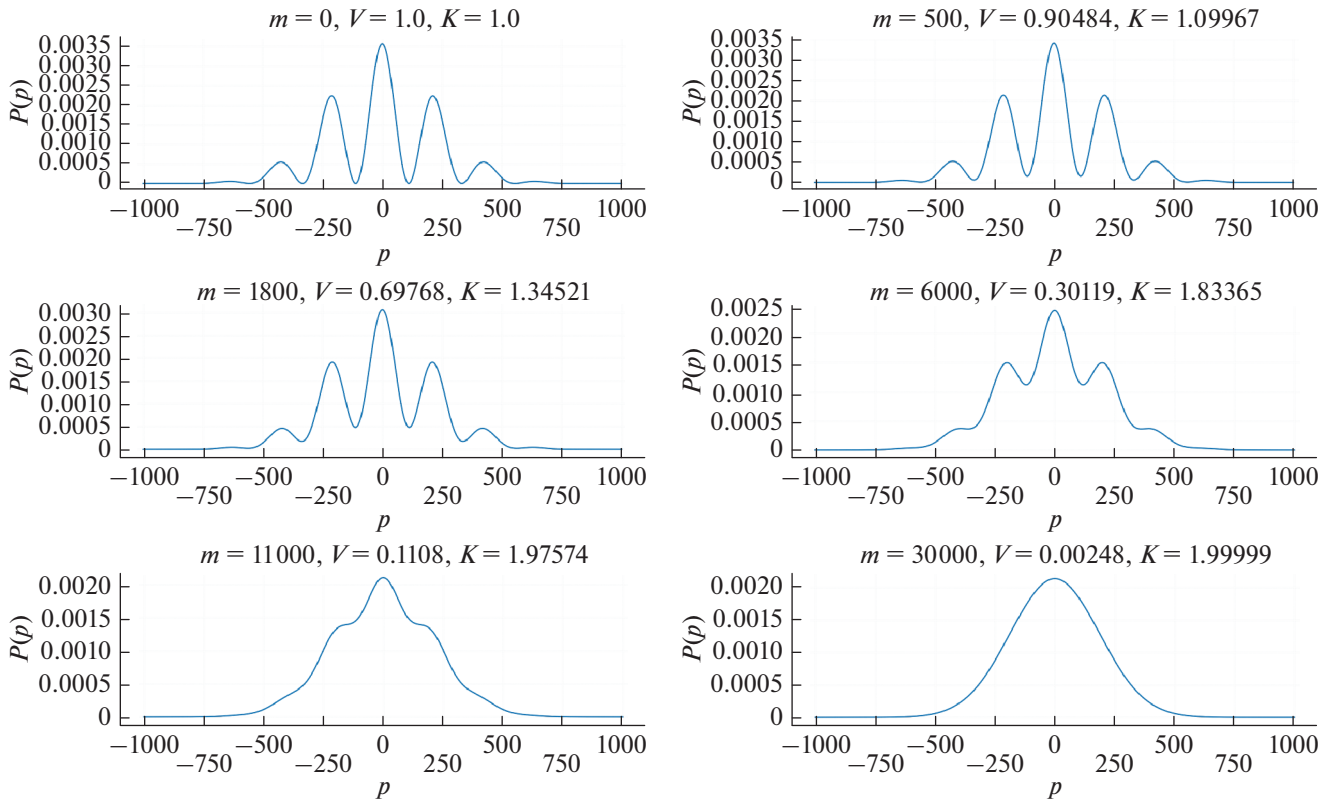


Рис. 3. Постепенное исчезновение интерференционной картины при увеличении числа мод окружения. По оси абсцисс отложен суммарный импульс  $p$ .

$$\tilde{P}(p) = \frac{1}{(1 + \exp(-2n\alpha^2))\sqrt{\pi(n-m)}} \exp\left(-\frac{p^2}{n-m}\right) [1 + V \cos(2\sqrt{2}\alpha p)]. \quad (23)$$

Здесь параметр  $V$  есть видность интерференционной картины в приближении хорошо различимых альтернатив. Она определяется числом мод окружения  $m$  и задается следующей простой формулой:

$$V = \exp(-2m\alpha^2). \quad (24)$$

Полученные зависимости показывают, что видность интерференционной картины резко снижается уже при редукции одного фотона в модах окружения. Например, использование  $m = 11000$  мод в качестве окружения соответствует редукции 1.1 фотона (поскольку в рассматриваемом примере среднее число фотонов в расчёте на одну моду равно  $|\alpha|^2 = 0.0001$ ).

Полученные аналитические формулы для многомерного состояния кота Шредингера произвольной размерности позволяют анализировать корреляционные характеристики с использованием разложения Шмидта, а также оценивать параметры

интерференционных двухщелевых экспериментов с различной степенью влияния окружения.

## 6. ВЫВОДЫ

В рамках настоящего исследования был разработан математический аппарат для систем с интерферирующими альтернативами. В качестве примера подобных систем, были рассмотрены квантовые состояния кота Шредингера и волновые функции двухщелевого эксперимента. Данные системы оказались аналогичными по своей структуре, что позволяет легко переходить от одного рассмотрения к другому. Полученная связь позволяет эффективно рассчитывать различные интерференционные характеристики, такие как, видность и когерентность.

Было показано, что с квантово-информационной точки зрения важный для оптики комплексный параметр когерентности световых колебаний естественным образом связан со скалярным произведением состояний окружения, отвечающих интерфе-



рирующим альтернативам. Была получена простая явная формула, задающая видность интерференционной картины в зависимости от числа Шмидта, характеризующего степень корреляции между интерферирующей системой и ее окружением.

Результаты работы обобщены на случай состояний котов Шредингера произвольной размерности. Получены явные формулы для редуцированных состояний, возникающих при измерении части мод рассматриваемой многомодовой системы.

Результаты проведенных исследований имеют существенное прикладное значение и могут быть использованы при разработке высокоразмерных квантовых систем обработки информации.

Работа выполнена в рамках Государственного задания ФТИАН им. К.А. Валиева РАН Минобрнауки РФ по теме № 0066-2019-0005 при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (грант № 20-1-1-34-1).

Приложение 1

Утверждение о равенстве чисел Шмидта формул (17) и (19) следует из эквивалентности эффективных двухуровневых систем. Рассмотрим вначале формулу (19), которая в точности эквивалентна (12):

$$|cat_{\alpha\beta}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 + 2q_\alpha q_\beta}} (|\alpha, \beta\rangle + |-\alpha, -\beta\rangle).$$

Соответствующая эффективная двухуровневая система определяется заменой на ортогональные кубитные состояния (4), (5). В данном случае:

$$\begin{aligned} |0\rangle_1 &= |\alpha\rangle, & |1\rangle_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - q_\alpha^2}} (1 - \alpha - q_\alpha |\alpha\rangle), \\ |0\rangle_2 &= |\beta\rangle, & |1\rangle_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 - q_\beta^2}} (1 - \beta - q_\beta |\beta\rangle), \end{aligned}$$

где  $q_\alpha = \exp(-2|\alpha|^2)$ ,  $q_\beta = \exp(-2|\beta|^2)$ . Тогда состояние двумерного кота Шредингера можно представить в виде двухкубитного состояния:

$$|cat_{\alpha\beta}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 + 2q_\alpha q_\beta}} \left( (1 + q_\alpha q_\beta) |00\rangle + q_\alpha \sqrt{1 - q_\beta^2} |01\rangle + q_\beta \sqrt{1 - q_\alpha^2} |10\rangle + \sqrt{1 - q_\alpha^2} \sqrt{1 - q_\beta^2} |11\rangle \right). \tag{25}$$

Рассмотрим теперь формулу многомерного состояния кота Шредингера (17).

$$|cat_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 + 2 \prod_{j=1}^n q_{\alpha_j}}} (|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\rangle + |-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n\rangle).$$

Можно определить эффективную двухкубитную систему по аналогии с двумерным состоянием кота Шредингера. Для этого необходимо принять во внимание, что подсистема *A* состоит из первых  $n - m$  мод  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-m})$ , а подсистема *B* состоит из последних  $m$  мод  $(\alpha_{n-m+1}, \alpha_{n-m+2}, \dots, \alpha_n)$ . Далее необходимо произвести следующие замены:

$$\begin{aligned} |0\rangle_1 &= |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-m}\rangle, \\ |1\rangle_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \prod_{i=1}^{n-m} q_{\alpha_i}^2}} \left( |-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_{n-m}\rangle - \prod_{i=1}^{n-m} q_{\alpha_i} |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-m}\rangle \right), \\ |0\rangle_2 &= |\alpha_{n-m+1}, \alpha_{n-m+2}, \dots, \alpha_n\rangle, \\ |1\rangle_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \prod_{i=1}^m q_{\alpha_{n-m+i}}^2}} \left( |-\alpha_{n-m+1}, -\alpha_{n-m+2}, \dots, -\alpha_n\rangle - \prod_{i=1}^m q_{\alpha_{n-m+i}} |\alpha_{n-m+1}, \alpha_{n-m+2}, \dots, \alpha_n\rangle \right). \end{aligned}$$

Тогда формулу для многомерного состояния кота Шредингера можно представить в виде:

$$\begin{aligned} |cat_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2 + 2 \prod_{j=1}^n q_{\alpha_j}}} \left( \left( 1 + \prod_{i=1}^{n-m} q_{\alpha_i} \right) |00\rangle + \prod_{i=1}^{n-m} q_{\alpha_i} \sqrt{1 - \prod_{i=1}^m q_{\alpha_{n-m+i}}^2} |01\rangle + \right. \\ &\quad \left. + \prod_{i=1}^m q_{\alpha_{n-m+i}} \sqrt{1 - \prod_{i=1}^{n-m} q_{\alpha_i}^2} |10\rangle + \sqrt{1 - \prod_{i=1}^{n-m} q_{\alpha_i}^2} \sqrt{1 - \prod_{i=1}^m q_{\alpha_{n-m+i}}^2} |11\rangle \right). \end{aligned} \tag{26}$$

Можно заметить, что структура данной формулы идентична формуле (25). Если ввести замену (18), то амплитуды базисных состояний упрощаются:

$$\prod_{i=1}^{n-m} q_{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{n-m} \exp(-2|\alpha_i|^2) = \exp\left(-2\sum_{i=1}^{n-m} |\alpha_i|^2\right) = \exp(-2a^2) = q_a,$$

$$\prod_{i=1}^m q_{\alpha_{n-m+i}} = \prod_{i=1}^m \exp(-2|\alpha_{n-m+i}|^2) = \exp\left(-2\sum_{i=1}^m |\alpha_{n-m+i}|^2\right) = \exp(-2b^2) = q_b.$$

В итоге мы получаем, что формула (26) в точности преобразуется в формулу (25). Эквивалентность формул (25) и (26) говорит о равенстве всех характеристик, которые вычисляются с использованием соответствующего кубитного представления, включая коэффициенты Шмидта, число Шмидта, видность интерференционной картины и т.п.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Валиев К.А., Кокин А.А.* Квантовые компьютеры: надежда и реальность. Ижевск: РХД, 2001. 352 с.
2. *Нильсен М., Чанг И.* Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир, 2006. 824 с.
3. *Buks E., Schuster R., Heiblum M., Mahalu D., Umansky V.* Dephasing in electron interference by a 'which-path' detector // *Nature*. 1998. V. 391. P. 871–874.
4. *Glauber R.J.* Coherent and Incoherent States of the Radiation Field // *Phys. Rev.* 1963. V. 131. P. 2766.
5. *van Enk S.J., Fuchs C.A.* Quantum State of an Ideal Propagating Laser Field // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 88. P. 027902.
6. *Tan K.C., Volkoff T., Kwon H., Jeong H.* Quantifying the Coherence between Coherent States // *Phys. Rev. Lett.* 2017. V. 119. P. 190405.
7. *Bose S., Home D., Mal S.* Nonclassicality of the Harmonic-Oscillator Coherent State Persisting up to the Macroscopic Domain // *Phys. Rev. Lett.* 2018. V. 120. P. 210402.
8. *Neergaard-Nielsen J.S., Takeuchi M., Wakui K., Takahashi H., Hayasaka K., Takeoka M., Sasaki M.* Optical Continuous-Variable Qubit // *Phys. Rev. Lett.* 2010. V. 105. P. 053602.
9. *Ralph T.C., Gilchrist A., Milburn G.J., Munro W.J., Glancy S.* Quantum computation with optical coherent states // *Phys. Rev. A*. 2003. V. 68. P. 042319.
10. *Jeong H., Kim M.S.* Efficient quantum computation using coherent states // *Phys. Rev. A*. 2002. V. 65. P. 042305.
11. *Cochrane P.T., Milburn G.J., Munro W.J.* Macroscopically distinct quantum-superposition states as a bosonic code for amplitude damping // *Phys. Rev. A*. 1999. V. 59. P. 2631.
12. *Gottesman D., Kitaev A., Preskill J.* Encoding a qubit in an oscillator // *Phys. Rev. A*. 2001. V. 64. P. 012310.
13. *Ralph T.C.* Coherent superposition states as quantum rulers // *Phys. Rev. A*. 2002. V. 65. P. 042313.
14. *Joo J., Munro W.J., Spiller T.P.* Quantum Metrology with Entangled Coherent States // *Phys. Rev. Lett.* 2011. V. 107. P. 083601.
15. *Bartlett S.D., Sanders B.C.* Universal continuous-variable quantum computation: requirement of optical nonlinearity for photon counting // *Phys. Rev. A*. 2002. V. 65. P. 042304.
16. *Daoud M., Choubabi E.B.* Bipartite entanglement of multipartite coherent states using quantum network of beam splitters // *Int. J. Quantum Inform.* 2012. V. 10. P. 1250009.
17. *Jeong H., An N.B.* Greenberger-Horne-Zeilinger-type and W-type entangled coherent states: Generation and Bell-type inequality tests without photon counting // *Phys. Rev. A*. 2006. V. 74. P. 022104.
18. *Munhoz P.P., Semião F.L., Vidiella-Barranco A., Roversi J.A.* Cluster-type entangled coherent states // *Phys. Lett. A*. 2008. V. 372. P. 3580–3585.
19. *Богданов А.Ю., Богданов Ю.И., Валиев К.А.* Информация Шмидта и запутанность квантовых систем // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика*. 2007. № 1. С. 37–48.
20. *Богданов Ю.И., Фастовец Д.В., Богданова Н.А., Лукичев В.Ф., Чернявский А.Ю.* Разложение Шмидта и анализ статистических корреляций // *Микроэлектроника*. 2016. Т. 45. № 5. С. 342–351.
21. *Богданов Ю.И.* Основные понятия классической и квантовой статистики: корневой подход // *Оптика и спектроскопия*. 2004. Т. 96. № 5. С. 735–746.
22. *Богданов Ю.И., Валиев К.А., Нуязин С.А., Гавриченко А.К.* Информационные аспекты интерференционных экспериментов "Который путь" с микрочастицами // *Микроэлектроника*. 2010. Т. 39. № 4. С. 243–264.
23. *Bogdanov Yu.I., Bogdanov A.Yu., Nuianzin S.A., Gavrichenko A.K.* On the Informational Aspects of Interfering Quantum States // arXiv: 0812.4808 [quant-ph].
24. *Zych M., Costa F., Pikovski I., Brukner C.* Quantum interferometric visibility as a witness of general relativistic proper time // *Nat. Commun.* 2011. V. 2. P. 505.
25. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1973. 719 с.
26. *Dodonov V.V., Malkin I.A., Man'ko V.I.* Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator // *Physica*. 1974. V. 72. № 3. P. 597–615.
27. *Glancy S., Vasconcelos H.M.* Methods for producing optical coherent state superpositions // *J. Opt. Soc. Am. B*. 2008. V. 25. P. 712–733.
28. *Gilchrist A., Nemoto K., Munro W.J., Ralph T.C., Glancy S., Braunstein S.L., Milburn G.J.* Schrödinger cats and their power for quantum information processing // *J. Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. 2004. V. 6. № 8. P. S828–S833.
29. *Daoud M., Laamara A.R., Essaber R.* Quantum correlations dynamics of quasi-Bell cat states // *International J. Quantum Information*. 2013. V. 11. № 6. P. 1350057.
30. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. Пер. с англ. Н. ИОНФМИ. 1998. 380 с.