

УДК 532.516

## ДИНАМИКА ВЯЗКОГО ГАЗА В ЗАКРЫТОЙ УЗКОЙ ТРУБЕ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ПОРШНЯ

© 2023 г. П. П. Осипов<sup>a,\*</sup>, Р. Р. Насыров<sup>a,\*\*</sup>

<sup>a</sup>Федеральный исследовательский центр “Казанский научный центр” РАН,  
Институт механики и машиностроения, Казань, Россия

\*E-mail: petro300@rambler.ru

\*\*E-mail: nasYROV.ravil@bk.ru

Поступила в редакцию 05.07.2023 г.

После доработки 14.08.2023 г.

Принята к публикации 01.09.2023 г.

В результате решения линеаризованных двумерных уравнений Навье—Стокса в цилиндрической системе координат получено периодическое решение задачи о динамике газа в закрытой трубе при колебаниях поршня по гармоническому закону. Представлены зависимости резонансных частот от диаметра трубы. Исследован вопрос о максимальной амплитуде продольной скорости колебаний вязкого политропного газа на первой резонансной частоте. Полученные зависимости сравнены с известными результатами для плоского резонатора. Показано, что максимальная продольная скорость примерно в два раза больше в плоском резонаторе, чем в трубе с диаметром, равным ширине плоского резонатора.

**Ключевые слова:** закрытая труба-резонатор, резонансная частота, колебания вязкого газа

**DOI:** 10.31857/S1024708423600458, **EDN:** CQWRSY

При исследовании колебаний газа в резонаторах зачастую используется предположение о плоском характере волн в исследуемой области. В работе [1] на основе полных уравнений Навье—Стокса проведено численное моделирование волн в плоском закрытом резонаторе, имеющем прямоугольную форму.

В [2] на основе редуцированных уравнений Навье—Стокса получено аналитическое решение задачи колебаний газа в узкой плоской прямоугольной осциллирующей каверне. На основе полученного решения исследован вопрос о зависимости первой резонансной частоты от ширины канала, а также изучены акустические течения газа в каверне, создаваемые на резонансной частоте стоячей волной.

В [3] представлено численное решение одномерной задачи распространения периодической ударной волны в резонаторе на основе подхода Лагранжа. Результаты расчетов показали хорошее согласование как с физическими экспериментами [4], так и с результатами численного моделирования динамики газа в двумерном резонаторе [5].

В [6] получено аналитическое решение задачи колебаний динамики вязкого политропного газа в закрытом плоском резонаторе. На основе аналитического решения построена резонансная кривая давления. Установлено хорошее согласование полученных результатов на резонансных и субрезонансных частотах с результатами подхода Лагранжа [3].

В [7] во втором приближении получено аналитическое решение задачи о колебаниях газа в плоском закрытом резонаторе с вибрирующей стенкой. Построены графики средних массовых скоростей, которые хорошо согласуются как с численным решением задачи с осциллирующей стенкой [1], так и с аналитическим решением колеблющегося канала [2].

В [8, 9] численно изучены колебания воздуха в закрытом резонаторе. В ходе исследования использовались полные уравнения Навье—Стокса с уравнением сохранения энергии, теплопроводности и состояния.

Во всех вышеизложенных работах акустические волны рассматривались в закрытом плоском резонаторе, однако на практике резонаторы представляют собой трубу. Поэтому целью настоя-

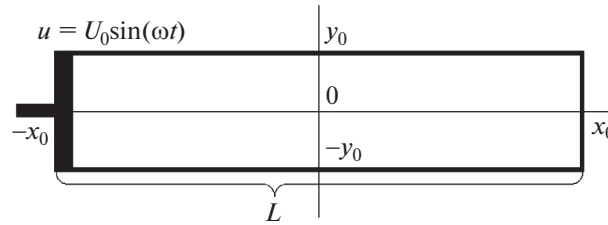


Рис. 1. Труба или плоский резонатор.

шей работы является получение аналитического решения задачи о колебаниях вязкого газа в трубе-резонаторе.

### 1. ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ ГАЗА В ТРУБЕ-РЕЗОНАТОРЕ

Рассмотрим резонатор  $-x_0 \leq x \leq x_0$ ,  $0 \leq y \leq y_0$  с жесткими стенками (рис. 1). На левой границе возбуждается продольная скорость так, что

$$\frac{2}{y_0^2} \int_0^{y_0} y u(-x_0, y, t) dy = U_0 \sin \omega t.$$

Линеаризованная система, описывающая осесимметричные колебания вязкого сжимаемого газа, имеет вид [7]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial yv}{\partial y} &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Будем искать периодическое решение системы (1.1) с граничными условиями: на левой границе — поршень, на правой — отсутствие протекания, на стенках — условия прилипания.

$$\begin{aligned} \frac{2}{y_0^2} \int_0^{y_0} y u(-x_0, y, t) dy &= U_0 e^{i\omega t}; \\ u(x_0, y, t) &= 0; \\ u(x, y_0, t) &= 0, \quad v(x, y_0, t) = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Заметим, что чем больше отношение  $x_0/y_0$ , тем более точно линеаризованная система (1.1) описывает колебания вязкого сжимаемого газа в резонаторе. Периодическое решение задачи (1.1)–(1.2) ищем в виде стоячей волны

$$\begin{aligned} p &= \tilde{p}(x, y) e^{i\omega t}, \\ u &= \tilde{u}(x, y) e^{i\omega t}, \\ v &= \tilde{v}(x, y) e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Подстановка (1.3) в (1.1)–(1.2) дает

$$\frac{i\omega}{\rho_0 c_0^2} \tilde{p} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial y \tilde{v}}{\partial y} = 0, \quad (1.4a)$$

$$\tilde{u} + \frac{1}{i\omega \rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{\mu}{i\omega \rho_0} \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right). \quad (1.4b)$$

Граничные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned}\frac{2}{y_0^2} \int_0^{y_0} y \tilde{u}(-x_0, y) dy &= U_0; \\ \tilde{u}(x_0, y) &= 0; \\ \tilde{u}(x, y_0) &= 0, \quad \tilde{v}(x, y_0) = 0.\end{aligned}$$

### 1.1. Продольная скорость в произвольном сечении

Вводя амплитуду скорости  $\tilde{u}_{x0}(x) = -\frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$ , запишем для нее уравнение

$$\tilde{u} - \frac{\mu}{i\omega\rho_0} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) = \tilde{u}_{x0}(x).$$

Его общее решение есть  $\tilde{u} = \tilde{u}_{x0}(x) + A(x)J_0(\beta^* y)$ , где введена функция Бесселя нулевого рода, удовлетворяющая уравнению  $z^2 J_0''(z) + z J_0'(z) + z^2 J_0(z) = 0$ , где  $z = \beta^* y$ ,  $\beta = \frac{1+i}{\delta}$ ,  $\delta = \sqrt{\frac{2\mu}{\omega\rho_0}}$ , а звездочка означает комплексно-сопряженную величину. С учетом известного соотношения  $J_0'(z) = -J_1(z)$  можно записать на оси

$$\left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right|_{y=0} = A(x) \beta^* J_0'(\beta^* y) \Big|_{y=0} = -A(x) \beta^* J_1(\beta^* y) \Big|_{y=0} = 0.$$

Из условий прилипания на стенке  $y = y_0$ :

$$\tilde{u}_{x0}(x) + A(x)J_0(\beta^* y_0) = 0,$$

получим  $A(x) = -\frac{\tilde{u}_{x0}(x)}{J_0(\beta^* y_0)}$ , откуда

$$\tilde{u} = \tilde{u}_{x0}(x) \left( 1 - \frac{J_0(\beta^* y)}{J_0(\beta^* y_0)} \right).$$

Вводя осредненную по сечению трубы продольную скорость

$$U(x) = \frac{2}{y_0^2} \int_0^{y_0} y \tilde{u}(x, y) dy,$$

с учетом известного соотношения  $\int_0^z z J_0(z) dz = z J_1(z)$ , запишем

$$\int_0^{y_0} y \frac{J_0(\beta^* y)}{J_0(\beta^* y_0)} dy = \frac{1}{\beta^{*2} J_0(\beta^* y_0)} \int_0^{\beta^* y_0} z J_0(z) dz = \frac{y_0 J_1(\beta^* y_0)}{\beta^* J_0(\beta^* y_0)},$$

откуда следует  $U(x) = (1 - f) \tilde{u}_{x0}(x)$ , где  $f = \frac{2}{\beta^* y_0} \frac{J_1(\beta^* y_0)}{J_0(\beta^* y_0)}$ . Таким образом, запишем амплитуду колебаний продольной скорости

$$\tilde{u} = \frac{U(x)}{1 - f} \left( 1 - \frac{J_0(\beta^* y)}{J_0(\beta^* y_0)} \right).$$

### 1.2. Касательное напряжение на стенке

Амплитуда касательного напряжения имеет вид:

$$\tilde{\sigma} = \mu \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right|_{y_0} = \mu \frac{U(x)}{1-f} \beta^* \frac{J_1(\beta^* y_0)}{J_0(\beta^* y_0)} = \mu \frac{U(x)}{1-f} \frac{\beta^{*2} y_0}{2} f = -\mu \frac{U(x)}{1-f} i \frac{y_0}{\delta^2} f.$$

То есть, касательное напряжение пропорционально средней по сечению  $x$  продольной скорости.

### 1.3. Усредненные по сечению уравнения неразрывности и импульса

Запишем осредненные по сечению уравнения (1.4)

$$\frac{i\omega}{\rho_0 c_0^2} \tilde{p} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

$$U(x) + \frac{1}{i\omega \rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{2}{i\omega \rho_0 y_0} \tilde{\sigma} = -\frac{2}{i\omega \rho_0 y_0} \mu \frac{U(x)}{1-f} i \frac{y_0}{\delta^2} f = -\frac{U(x)}{1-f} f,$$

окончательно:

$$\frac{i\omega}{\rho_0 c_0^2} \tilde{p} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (1.5a)$$

$$\frac{U(x)}{1-f} + \frac{1}{i\omega \rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = 0. \quad (1.5b)$$

### 1.4. Продольная скорость

Дифференцируя уравнение (1.5a) по  $x$  и исключая градиент давления с помощью (1.5b), получим уравнение для средней продольной скорости

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \alpha^2 U = 0,$$

где  $\alpha = \frac{i\omega/c_0}{\sqrt{1-f}}$ .

Запишем общее решение этого уравнения  $U = A \operatorname{ch} \alpha x + B \operatorname{sh} \alpha x$ . Граничные условия дают

$$U_{-x_0} = A \operatorname{ch} \alpha x_0 - B \operatorname{sh} \alpha x_0 = U_0,$$

$$U_{x_0} = A \operatorname{ch} \alpha x_0 + B \operatorname{sh} \alpha x_0 = 0,$$

откуда  $A = \frac{U_0}{2 \operatorname{ch} \alpha x_0}$ ,  $B = -\frac{U_0}{2 \operatorname{sh} \alpha x_0}$  и  $U(x) = \frac{U_0}{2} \left( \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha x_0} - \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} \alpha x_0} \right)$ .

Поэтому амплитуда продольной скорости равна

$$\frac{\tilde{u}}{U_0} = \frac{0.5}{1-f} \left( \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha x_0} - \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} \alpha x_0} \right) \left( 1 - \frac{J_0(\beta^* y)}{J_0(\beta^* y_0)} \right).$$

### 1.5. Давление

Из (1.5a) получаем

$$\tilde{p} = -\frac{\rho_0 c_0^2}{i\omega} \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\rho_0 c_0 U_0}{2} \frac{1}{\sqrt{1-f}} \left( \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha x_0} - \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{sh} \alpha x_0} \right),$$

откуда

$$\frac{\tilde{p}}{\rho_0 c_0 U_0} = -\frac{0.5}{\sqrt{1-f}} \left( \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha x_0} - \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{sh} \alpha x_0} \right).$$

### 1.6. Поперечная скорость

Уравнение для поперечной скорости найдем, умножив (1.4а) на  $y$  и проинтегрировав полученное уравнение по  $y$ . Выражая поперечную скорость, получим

$$\frac{\tilde{v}}{U_0} = -\frac{i\omega}{\rho_0 c_0^2} \frac{y}{2U_0} \tilde{p} - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y y \frac{\tilde{u}}{U_0} dy.$$

Вычисляя  $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y y \frac{\tilde{u}}{U_0} dy = \frac{0.5\alpha}{1-f} \left( \frac{\text{sh } \alpha x}{\text{ch } \alpha x_0} - \frac{\text{ch } \alpha x}{\text{sh } \alpha x_0} \right) \int_0^y y \left( 1 - \frac{J_0(\beta^* y)}{J_0(\beta^* y_0)} \right) dy$ , с учетом известного соотношения

$$\int_0^y y \frac{J_0(\beta^* y)}{J_0(\beta^* y_0)} dy = \frac{1}{\beta^{*2} J_0(\beta^* y_0)} \int_0^{\beta^* y} z J_0(z) dz = \frac{y J_1(\beta^* y)}{\beta^* J_0(\beta^* y_0)}$$

запишем, опуская громоздкие вычисления

$$\frac{\tilde{v}}{U_0} = y_0 \alpha \frac{0.25f}{1-f} \left( \frac{\text{sh } \alpha x}{\text{ch } \alpha x_0} - \frac{\text{ch } \alpha x}{\text{sh } \alpha x_0} \right) \left( \frac{J_1(\beta^* y)}{J_1(\beta^* y_0)} - \frac{y}{y_0} \right).$$

### 1.7. Резонатор-труба

Переходя к мнимым частям, получим формулы

$$\begin{aligned} \frac{u(x, y, t)}{U_0} &= \text{Im} \left( \frac{0.5}{1-f} \left( \frac{\text{ch } \alpha x}{\text{ch } \alpha x_0} - \frac{\text{sh } \alpha x}{\text{sh } \alpha x_0} \right) \left( 1 - \frac{J_0(\beta^* y)}{J_0(\beta^* y_0)} \right) e^{i\omega t} \right), \\ \frac{v(x, y, t)}{U_0} &= \text{Im} \left( \alpha y_0 \frac{0.25f}{1-f} \left( \frac{\text{sh } \alpha x}{\text{ch } \alpha x_0} - \frac{\text{ch } \alpha x}{\text{sh } \alpha x_0} \right) \left( \frac{J_1(\beta^* y)}{J_1(\beta^* y_0)} - \frac{y}{y_0} \right) e^{i\omega t} \right), \\ \frac{p(x, t) - p_0}{\rho_0 c_0 U_0} &= -\text{Im} \left( \frac{0.5}{\sqrt{1-f}} \left( \frac{\text{sh } \alpha x}{\text{ch } \alpha x_0} - \frac{\text{ch } \alpha x}{\text{sh } \alpha x_0} \right) e^{i\omega t} \right), \end{aligned}$$

где  $\alpha = \frac{i\omega/c_0}{\sqrt{1-f}}$ ,  $f = \frac{2}{\beta^* y_0} \frac{J_1(\beta^* y_0)}{J_0(\beta^* y_0)}$ ,  $\beta = \frac{i+1}{\delta}$ ,  $\delta = \sqrt{\frac{2\mu}{\omega \rho_0}}$ .

### 1.8. Плоский резонатор

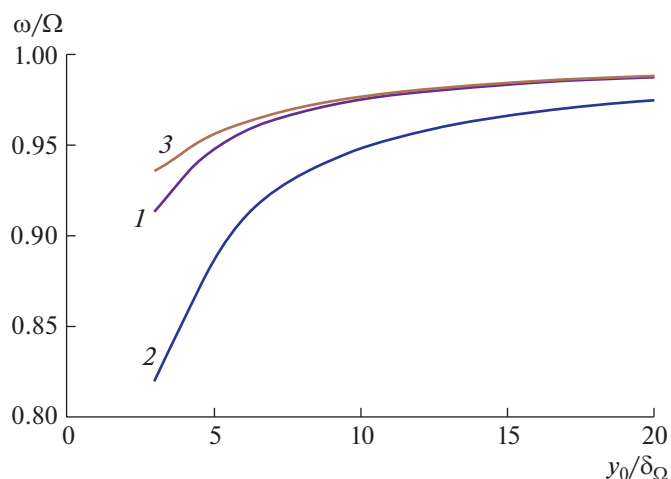
Для сравнения приведем аналогичные формулы, полученные в работе [3] для плоского резонатора

$$\begin{aligned} \frac{u(x, y, t)}{U_0} &= \text{Im} \left( \frac{0.5}{1-f} \left( \frac{\text{ch } \alpha x}{\text{ch } \alpha x_0} - \frac{\text{sh } \alpha x}{\text{sh } \alpha x_0} \right) \left( 1 - \frac{\text{ch } \beta y}{\text{ch } \beta y_0} \right) e^{i\omega t} \right), \\ \frac{v(x, y, t)}{U_0} &= \text{Im} \left( \alpha y_0 \frac{0.5f}{1-f} \left( \frac{\text{sh } \alpha x}{\text{ch } \alpha x_0} - \frac{\text{ch } \alpha x}{\text{sh } \alpha x_0} \right) \left( \frac{\text{sh } \beta y}{\text{sh } \beta y_0} - \frac{y}{y_0} \right) e^{i\omega t} \right), \\ \frac{p(x, t) - p_0}{\rho_0 c_0 U_0} &= -\text{Im} \left( \frac{0.5}{\sqrt{1-f}} \left( \frac{\text{sh } \alpha x}{\text{ch } \alpha x_0} - \frac{\text{ch } \alpha x}{\text{sh } \alpha x_0} \right) e^{i\omega t} \right), \end{aligned}$$

где  $\alpha = \frac{i\omega/c_0}{\sqrt{1-f}}$ ,  $f = \frac{\text{th } \beta y_0}{\beta y_0}$ ,  $\beta = \frac{i+1}{\delta}$ ,  $\delta = \sqrt{\frac{2\mu}{\omega \rho_0}}$ .

## 2. СРАВНЕНИЕ ПЛОСКОГО И ОСЕСИММЕТРИЧНОГО РЕШЕНИЯ

Далее будем сравнивать резонатор-трубу и плоский резонатор. При этом диаметр первого будет равен ширине плоского резонатора. Максимум амплитуды продольной скорости достигается



**Рис. 2.** Резонансная частота: 1 – плоский резонатор, 2 – труба-резонатор диаметром, равным ширине плоского резонатора, 3 – плоская каверна [2].

на оси  $y = 0$  в центре резонатора  $x = 0$ . Поэтому будем искать максимум модуля продольной скорости газа по частоте  $\omega$ , т.е. величины

$$\frac{|\tilde{u}(0,0)|}{U_0} = \left| \frac{0.5}{1 - f \operatorname{ch} \alpha x_0} \left( 1 - \frac{1}{J_0(\beta^* y_0)} \right) \right|.$$

При этом надо учесть, что величины  $\delta$ ,  $\beta^*$ ,  $f$ ,  $\alpha$  зависят от частоты  $\omega$ . В результате определяются оптимальные значения частоты  $\omega$  и максимальная продольная скорость  $U_{\max}$ .

Для поиска максимума скорости будем задавать длину резонатора  $L = 2x_0$  и его относительный радиус  $y_0/\delta_\Omega$ . Толщина акустического пограничного слоя  $\delta_\Omega = \sqrt{\frac{2\nu}{\Omega}}$  берется для фундаментальной частоты  $\Omega = \pi c_0/L$ . Для воздуха эта толщина может быть выражена в системе СГС через длину резонатора  $\delta_\Omega = \sqrt{\frac{2\nu}{\pi c_0}} \sqrt{L} = 0.00165 \sqrt{L}$ .

Для плоского резонатора будем искать максимум по частоте  $\omega$  выражения [7]

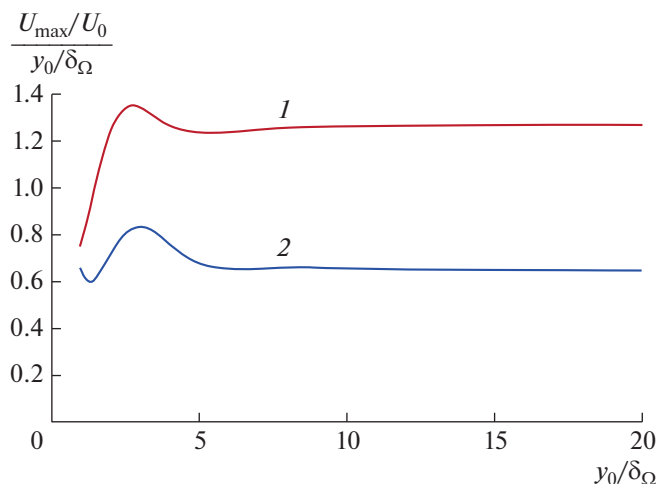
$$\frac{|\tilde{u}(0,0)|}{U_0} = \left| \frac{0.5}{1 - f \operatorname{ch} \alpha x_0} \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \beta y_0} \right) \right|.$$

На рис. 2 приведены графики зависимости резонансной частоты от поперечных размеров плоского [7], осесимметричного резонатора и плоской каверны [2]. Чем больше эти размеры, тем ближе резонансная частота к фундаментальной. Чем меньше поперечные размеры резонаторов, тем больше сказывается вязкость газа и тем более сдвигается резонанс от фундаментальной частоты в область низких частот. Для осесимметричного резонатора резонансные частоты меньше частот, чем для плоского.

В случае колеблющейся каверны, рассмотренной в работе [2], резонансная частота определяется из выражения  $\frac{|\tilde{u}(0,0)|}{2U_0} = \left| \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha x_0} \right) \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \beta y_0} \right) \right|$ , и ее зависимость от ширины каверны представлена на рис. 2.

На рис. 3 представлены зависимости максимальной амплитуды продольной скорости газа  $U_{\max}/U_0$  от поперечных размеров плоского и осесимметричного резонаторов на резонансной частоте.

Графики рис. 3 показывают, что в диапазоне  $5 \leq y_0/\delta \leq 20$  скорости  $U_{\max}/U_0$  пропорциональны относительным поперечным размерам резонаторов  $y_0/\delta_\Omega$ . Эти значения приближенно могут быть оценены по следующим формулам: для трубы-резонатора  $\frac{U_{\max}}{U_0} \approx 0.64 \frac{y_0}{\delta_\Omega}$ ; для плоского ре-



**Рис. 3.** Максимальная продольная скорость: 1 – плоский резонатор, 2 – труба-резонатор диаметром, равным ширине плоского резонатора.

зонатора  $\frac{U_{\max}}{U_0} \approx 1.26 \frac{y_0}{\delta_\Omega}$ . Максимальная амплитуда продольной скорости газа в плоском резонаторе шириной  $2y_0$  примерно в два раза больше, чем в трубе диаметром  $2y_0$ .

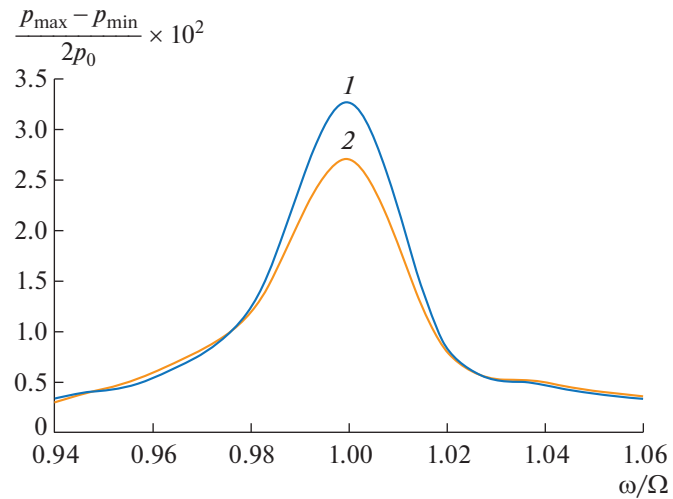
Приведенная формула позволяет оценить трудно измеряемую максимальную продольную скорость газа. Так, для трубы-резонатора длиной  $L = 106$  см с внутренним диаметром  $2y_0 = 3.65$  см изучаемой в работе [10], при угловой частоте  $\omega \approx 1009$  рад/с, амплитуде смещения поршня  $X_0 = 0.035$  см, амплитуде скорости поршня  $U_0 = 35.3$  см/с толщина акустического пограничного слоя равна  $\delta_\Omega = 0.00165\sqrt{L} \approx 0.0165$  см = 165 мкм, а максимальная продольная скорость газа равна  $\frac{U_{\max}}{U_0} \approx 0.64 \times \frac{1.8}{0.0165} \approx 69.8$ .

В качестве другого примера рассмотрим плоский резонатор длиной  $L = 0.8825$  см, шириной  $2y_0 = 0.0316$  см [1]. Толщина акустического пограничного слоя равна  $\delta_\Omega = 0.00165 \times \sqrt{0.8825} \approx 0.00155$  см = 15.5 мкм. Максимальная амплитуда продольной скорости газа в этом случае равна  $\frac{U_{\max}}{U_0} \approx 1.26 \times \frac{0.0158}{0.00155} \approx 12.84$ .

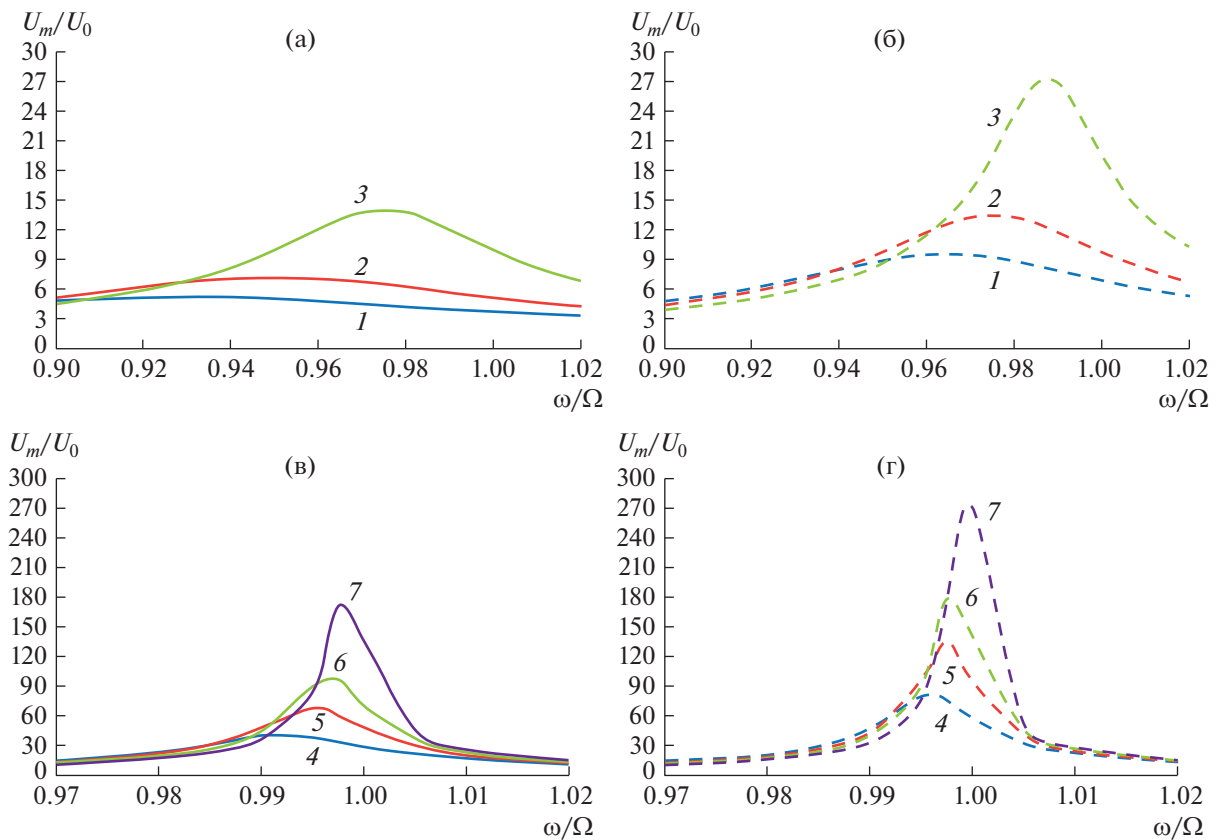
На рис. 4 изображены резонансные кривые давления в осесимметричном резонаторе, посчитанные аналитически и численно, в диапазоне частот  $\omega/\Omega \in [0.94, 1.06]$ .

Графики полностью совпадают вне резонанса в областях  $[0.94, 0.98]$  и  $[1.02, 1.06]$ , хорошо согласуются около резонанса ( $[0.98, 0.99]$  и  $[1.01, 1.02]$ ). В резонансе  $\omega/\Omega = 1$  значения безразмерной амплитуды давления  $\frac{p_{\max} - p_{\min}}{2p_0}$  максимальны и примерно равны 0.03.

На рис. 5 изображены графики максимальной амплитуды продольной скорости газа для частот, близких к фундаментальной частоте  $\Omega = \pi c_0/L$ . На графиках а и в представлены амплитудно-частотные характеристики для цилиндрического резонатора, на б и г — для плоского прямоугольного резонатора. Из графиков видно, что максимальные амплитуды продольной скорости газа для резонаторов различной ширины/радиуса значительно различаются вблизи фундаментальной частоты и сближаются по мере отклонения от нее. Максимальные амплитуды продольной скорости газа достигаются вблизи фундаментальной частоты попарно для осесимметричного и плоского случаев для резонаторов одинаковой ширины (или радиуса для осесимметричного случая). Графики имеют схожий колоколообразный характер. Из графиков видно, что максимальная скорость газа в плоском случае в 2 раза превышает скорость в осесимметричном случае вблизи фундаментальной частоты и совпадает вне фундаментальной резонансной области. На графиках пики сплошной линии находятся левее пиков пунктирной, значит резонансная частота для осесимметричного случая меньше резонансной частоты для плоского случая. Видно,

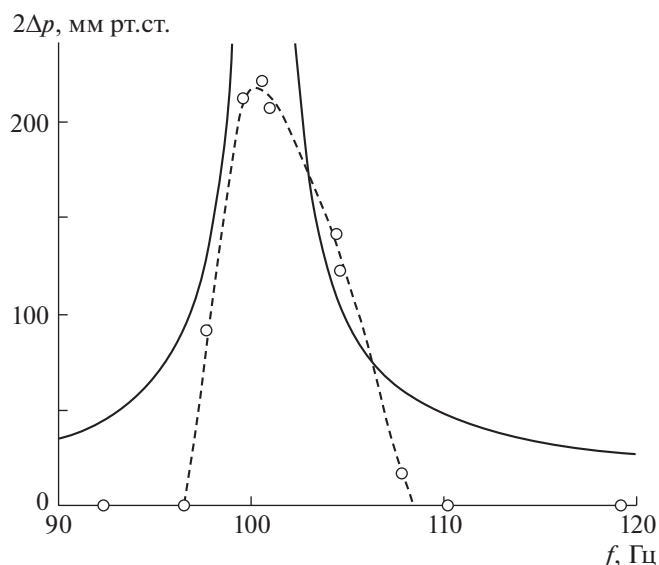


**Рис. 4.** Резонансная кривая давления в осесимметричном резонаторе. 1 – аналитическое решение, 2 – численное моделирование.

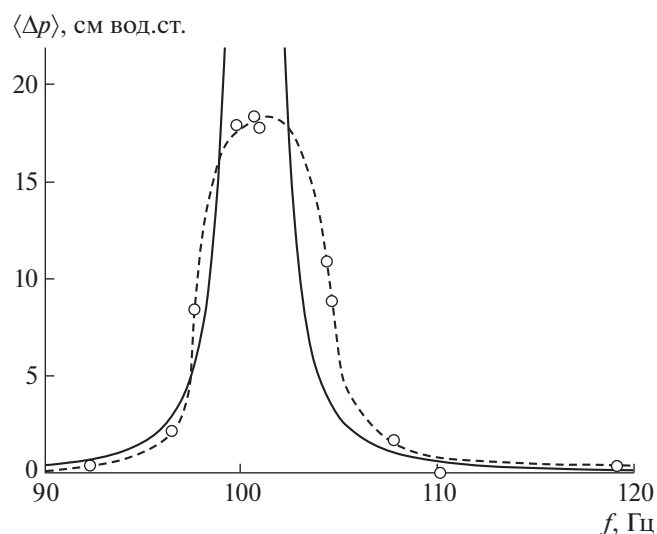


**Рис. 5.** Максимальные амплитуды продольной скорости газа вблизи фундаментальной частоты. а и в – цилиндрический резонатор, б и г – плоский двумерный резонатор. 1 –  $y_0/\delta = 7$ , 2 –  $y_0/\delta = 10$ , 3 –  $y_0/\delta = 20$ , 4 –  $y_0/\delta = 60$ , 5 –  $y_0/\delta = 100$ , 6 –  $y_0/\delta = 150$ , 7 –  $y_0/\delta = 300$ .

что для узких резонаторов максимальная скорость газа достигается при частотах меньше фундаментальной. С ростом ширины (радиуса) резонатора максимальная скорость достигается при частотах, близких к фундаментальной частоте.



**Рис. 6.** Резонансная кривая максимального размаха давления на закрытом конце трубы-резонатора. Пунктиром – эксперимент [4], сплошной – аналитическое решение.



**Рис. 7.** Резонансная кривая среднего возмущения давления на закрытом конце трубы-резонатора. Пунктиром – эксперимент [4], сплошной – аналитическое решение.

В [4] изучены колебания газа в трубе-резонаторе длиной  $L = 170.18$  см и диаметром  $d = 4.826$  см. Толщина пограничного слоя равна  $\delta_\Omega = \sqrt{\frac{2\nu}{\pi c_0}} \sqrt{L} = 0.00165 \times \sqrt{1.7018} = 0.002145$  см,  $d/\delta = 0.04826/0.002145 = 22.5$ , т.е.  $d = 22.5\delta$ , что говорит о том, что эта труба достаточно узкая для применения предложенного аналитического решения.

На рис. 6 изображены резонансные кривые максимального размаха давления  $\Delta p = p - p_0$  на закрытом конце трубы-резонатора, посчитанные аналитически и экспериментально. В работе [4] изучались ударные волны, которые возникают вблизи резонансной частоты, поэтому вне резонансных частот (где ударные волны не возникают) размах давления принимался равным нулю. Графики удовлетворительно согласуются на субрезонансных частотах.

На рис. 7 изображены резонансные кривые среднего возмущения давления на закрытом конце трубы-резонатора, посчитанные аналитически и экспериментально [4]. Графики хорошо согласуются вне резонанса и удовлетворительно согласуются на субрезонансных частотах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено приближенное решение задачи о колебаниях газа в закрытой трубе-резонаторе в замкнутом виде. На основе этого решения изучены поля скоростей и давления на резонансной и субрезонансных частотах для труб различного диаметра. Построены зависимости резонансных частот от диаметра трубы-резонатора. Установлено, что чем больше диаметр резонатора, тем ближе резонансная частота к фундаментальной. Чем меньше поперечные размеры резонаторов, тем больше сказывается вязкость газа и тем более сдвигается резонанс от фундаментальной частоты в область низких частот. Показано, что для осесимметричного резонатора резонансные частоты меньше частот, чем для плоского.

Найдены зависимости максимальной продольной скорости колебаний вязкого политропного газа от диаметра резонатора. Полученные зависимости сравнены с известными результатами для плоского резонатора. Показано, что средняя продольная скорость плоского резонатора примерно в два раза больше, чем скорость в трубе-резонаторе с диаметром, равным ширине плоского резонатора.

Получены резонансные кривые давления в осесимметричном резонаторе, посчитанные аналитически и численно вблизи резонанса. Установлены хорошее согласование графиков вблизи резонанса и удовлетворительное согласование амплитуды безразмерного давления в резонансе. Заметим, что, помимо практической пользы для прикладных оценок, аналитическое решение необходимо для учета вторичных течений.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 20-11-20070, <https://rscf.ru/project/20-11-20070/>

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aktas M.K., Farouk B. Numerical simulation of acoustic streaming generated by finite-amplitude resonant oscillations in an enclosure // Journal of the Acoustical Society of America. 2004. V. 116. № 5. P. 2822–2831. <https://doi.org/10.1121/1.1795332>
2. Hamilton M.F., Ilinskii Yu.A., Zabolotskaya E.A. Acoustic streaming generated by standing waves in two-dimensional channels of arbitrary width // Journal of the Acoustical Society of America. 2003. V. 113. № 1. P. 153–160. <https://doi.org/10.1121/1.1528928>
3. Gubaidullin D.A., Osipov P.P., Nasyrov R.R., Almakaev I.M. Numerical simulation of the shock wave in the closed resonator using 1D Lagrange's approach // Journal of Physics: Conference Series. 2018. V. 1058. № 012064. P. 1–4. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1058/1/012064>
4. Saenger R.A., Hudson G.E. Periodic shock waves in resonating gas columns // Journal of the Acoustical Society of America. 1960. V. 32. P. 961–970. <https://doi.org/10.1121/1.1908343>
5. Chester W. Resonant oscillations in closed tubes // Journal of Fluid Mechanics. 1964. V. 18. P. 44–64. <https://doi.org/10.1017/S0022112064000040>
6. Osipov P.P., Nasyrov R.R. Resonance curve in rectangular closed channel // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41. № 7. P. 1283–1288. <https://doi.org/10.1134/S1995080220070355>
7. Губайдуллин Д.А., Осипов П.П., Насыров Р.Р. Акустическое течение, индуцированное колебанием стенки плоского прямоугольного резонатора // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 1. С. 3–13. <https://doi.org/10.31857/S0568528122010054>
8. Aganin A.A., Ilgamov M.A., Smirnova E.T. Development of longitudinal gas oscillations in a closed tube // Journal of Sound and Vibration. 1996. V. 195. P. 359–374. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0431>
9. Тукмаков А.Л. Численное моделирование колебаний монодисперсной газовзвеси в нелинейном волновом поле // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52. № 2. С. 36–43. <https://doi.org/10.1134/S0021894411020040>
10. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А. Экспериментальное исследование коагуляции и осаждения аэрозоля в закрытой трубе в безударно-волновом режиме // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50. № 4. С. 603–605. <https://doi.org/10.1134/S0018151X12040098>