УДК 532.517

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК БЛИЖНЕГО СЛЕДА ОТ ПАРЫ ЦИЛИНДРОВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ БОК О БОК, НЕ СЛИШКОМ БЛИЗКО

© 2023 г. Г. В. Гембаржевский[a],*, К. Ю. Осипенко[a],**

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**E-mail: gvgemb@ipmnet.ru*

***E-mail: osipenko@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 21.04.2023 г.
После доработки 20.06.2023 г.
Принята к публикации 25.06.2023 г.

На основе модели Ландау–Стюарта и теории возмущений построена одномерная модель ближнего следа в вязкой несжимаемой жидкости от пары не слишком тесно расположенных цилиндров. Этот комплексный след рассматривается как две взаимодействующие парциальные дорожки Кармана – два связанных осциллятора Ландау–Стюарта, при этом нелинейный характер взаимодействия дорожек учитывается. Получены: наблюдаемый спектр глобальных мод такого следа и согласие между расчетными и экспериментальными собственными частотами осцилляций по модам.

Ключевые слова: модель Ландау–Стюарта, взаимодействие дорожек Кармана, перемежаемость глобальных мод, собственные частоты

DOI: 10.31857/S1024708423600240, **EDN:** UZJAOY

Для физического понимания явлений и эффективного управления объектами служат прозрачные – физические модели. Так, известно, что свойства ближних следовых течений в значительной степени определяются параметрами их крупномасштабной когерентной структуры – дорожки Кармана (К), наличествующей в следе [1]. Соответственно, с целью управления свойствами следовых течений, как-то: силами, приложенными к телам, коэффициентами переноса в течениях, успешно применяют различные методы модификации дорожек К в следе. В частности, используют вдув/отсос газа с поверхности тел или проницаемые вставки, локализованный электрический разряд, а при моделировании следа – дорожки К применяют простейшую – одномерную модель Ландау–Стюарта (Л–С) [2–4]. Уместно отметить, что задача обтекания группы близко расположенных цилиндров представляет не меньший практический интерес, чем случай одиночного цилиндра. Как пример типичных актуальных задач, отметим: расчет ветровой нагрузки массива высотных зданий/сооружений, или тепло/массо-обмена в химических/ядерных реакторах-теплообменниках, задачу стабилизации горения топлив. В настоящее время обтекание группы цилиндров принято рассчитывать с помощью численных методов как краевую задачу для уравнений Навье–Стокса или их модификаций. Однако трудоемкость такого расчета резко возрастает с ростом числа Рейнольдса течения. Простая физическая модель обтекания группы цилиндров была бы здесь полезна, по крайней мере, на первоначальном этапе решения оптимизационных задач. Соответственно, предпринимались попытки обобщить модель Л–С хотя бы на случай следа от пары цилиндров, но адекватно воспроизвести наблюдаемые режимы течения не удалось в рамках обобщений с линейным представлением взаимодействия дорожек К от цилиндров [5]. В статье ставится задача построения модели ближнего следа от двух цилиндров, пригодной для предсказания крупномасштабной структуры следа и, в перспективе, для управления перестройкой или, напротив, стабилизации определенной (оптимальной) структуры такого следа.

1. МОДЕЛЬ СЛЕДА С НЕЛИНЕЙНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПАРЦИАЛЬНЫХ ДОРОЖЕК КАРМАНА

Для построения модели следа от пары цилиндров, расположенных в плоскости перпендикулярной набегающему потоку вязкого несжимаемого флюида, исходим из модели Ландау–Стюарта (Л–С) следа от одиночного цилиндра. Она обоснована на решении краевой задачи для уравнений Навье–Стокса [2, 3] в случае ламинарного двумерного течения при числе Рейнольдса $R < 180$. Здесь число Рейнольдса определено по диаметру цилиндров D и невозмущенной скорости течения U_∞. При построении модели учитывается, что осцилляции в различных точках одной дорожки К приблизительно когерентны, но различаются по амплитуде и фазе колебаний, так, что вся дорожка за порождающим ее цилиндром моделируется уравнением одного осциллятора Л–С [4, Fig. 4]. (Упомянутая когерентность в ламинарном следе соблюдается точно только после выхода на стационар $t \to \infty$.) В рамках теории возмущений, комплексный след от пары цилиндров рассматривается как две парциальные дорожки К, существенно взаимодействующие между собой в области их формирования, вблизи порождающих цилиндров. Соответственно, записываются два связанных (возмущенных, модифицированных) уравнения осцилляторов Л–С для двух комплексных, учитывающих фазу осцилляций, управляющих параметров (a и b) двух осцилляторов-дорожек К. В рассматриваемой модели цилиндры должны располагаться не слишком тесно, иначе их комплексный след вырождается в одну дорожку К от одного плохо проницаемого тела – пары цилиндров. В последнем случае пара взаимодействующих дорожек К будет неудачным первым приближением для такого комплексного следа.

$$\frac{da}{dt} - a\left\{i\omega_0 + \varepsilon_{LS}\left[\lambda + \Lambda\,\mathrm{Re}\,\lambda - (\mu - il\,\mathrm{Im}\,\mu)\left(\frac{\mathrm{Re}\,\lambda}{\mathrm{Re}\,\mu}\right)|a|^2 - (\mathrm{Re}\,\lambda)\Lambda|b|^4 - l(\mathrm{Re}\,\lambda)a\bar{b}\right]\right\} = St_a \tag{1.1}$$

$$\frac{db}{dt} - b\left\{i\omega_0 + \varepsilon_{LS}\left[\lambda + \Lambda\,\mathrm{Re}\,\lambda - (\mu - il\,\mathrm{Im}\,\mu)\left(\frac{\mathrm{Re}\,\lambda}{\mathrm{Re}\,\mu}\right)|b|^2 - (\mathrm{Re}\,\lambda)\,\Lambda|a|^4 - l(\mathrm{Re}\,\lambda)b\bar{a}\right]\right\} = St_b \tag{1.2}$$

Уравнения (1.1), (1.2) приведены в форме принятой в [3]. Здесь зависимыми переменными являются: a – управляющий параметр первой дорожки К, b – управляющий параметр второй дорожки. В эксперименте эти управляющие параметры отождествляются, с точностью до мультипликативной константы, с поперечной составляющей скорости течения в характерной точке соответствующей дорожки (точке на ее оси, т.е. там, где среднее значение поперечной скорости нулевое). Удаление этой точки вниз по потоку от порождающего цилиндра целесообразно выбрать равным $x/D \approx 5$, поскольку в этом случае коэффициенты уравнений Л–С наиболее консервативны [4, Fig. 3]. Черта над символом управляющего параметра в уравнениях обозначает комплексное сопряжение. Независимое переменное t в уравнениях – это время, обезразмеренное по невозмущенной скорости течения и диаметру цилиндров $t = t_{phys}U_\infty/D$. Уравнения (1.1), (1.2) содержат параметры, наследуемые от модели Л–С для следа одиночного цилиндра. Во-первых, это безразмерная частота установившихся колебаний на пороге (при критическом числе Рейнольдса $R_{cr} = 46$, [3]) бифуркации Ландау–Хопфа к осциллирующему течению $\omega_0 = 2\pi Sh_1 = 0.74$, где $Sh_1 = f_{L-H}D/U_\infty$ – соответствующее число Струхаля. Во-вторых, малый параметр $\varepsilon_{LS} = (1/R_{cr}) - (1/R)$, определяющий малую скорость эволюции следа в масштабе периода базовых осцилляций. В-третьих, два комплексных параметра λ и μ модели Л–С, фактически определяющих, совместно с ε_{LS}, динамику классического осциллятора Л–С – уединенной дорожки К. В работе [3] приведены выражения λ и μ через квадратуры от установившегося решения соответствующей краевой задачи. Для учета взаимодействия дорожек К в области их формирования в стандартные уравнения модели Л–С [3] введены дополнительные – возмущающие члены, пропорциональные действительным параметрам l и Λ. Параметр l характеризует интенсивность взаимодействия дорожек К, зависящую от относительной фазы осцилляций в дорожках К, а параметр Λ – интенсивность фазонезависимого взаимодействия дорожек. Естественно ожидать, что оба этих параметра являются монотонно убывающими функциями расстояния между осями цилиндров. Форма возмущающих членов уравнений, т.е. их зависимость от определяющих параметров дорожек К – a и b, выбрана нелинейной, поскольку известно, что простейшая – линейная форма дополнительных членов в уравнениях модели Л–С не приводит к полностью удовлетворительным результатам моделирования следа [5]. В пользу нелинейности возмущающих членов свидетельствует и квадратичная нелинейность основополагающих уравнений Навье–Стокса. Для случая турбулентного следа уравнения модели содержат в правой части стохастизирующие члены St – аналог сил Ланжевена. Это – некоторые случайные функции времени, моделирующие воздействие высокочастотных мод течения на основную – низкочастотную моду осцилляций дорожки K, а также и влияние турбулентности набегающего потока. В соответствии с [3], без ограничения общности, можно считать, что $\mathrm{Re}\,\lambda = \mathrm{Re}\,\mu$, так чтобы управляющие параметры дорожек K удовлетворяли естественной нормировке $|a| = |b| = 1$ для случая установившегося следа от уединенных цилиндров $\Lambda = l = 0$.

Для анализа систему комплексных уравнений модели (1.1), (1.2) удобно привести к системе четырех уравнений для действительных амплитуд r, ρ и фаз φ, ψ осцилляций в двух дорожках K согласно преобразованию переменных (1.3)

$$a = r\exp i(\omega_0 t + \varphi)$$
$$b = \rho\exp i(\omega_0 t + \psi) \tag{1.3}$$

Введем также "медленное" время $\tau = 2\varepsilon_{LS}\, t\,\mathrm{Re}\lambda$, интенсивности $x = r^2$, $y = \rho^2$ и разность фаз $P = \varphi - \psi$ осцилляций в двух осцилляторах-дорожках K (по образцу [6]). В результате проведенных преобразований имеем систему четырех уравнений модели

$$\frac{dx}{d\tau} - x\left[1 + \Lambda - x - \Lambda y^2 - l\sqrt{xy}\cos P\right] = St_x \tag{1.4}$$

$$\frac{dy}{d\tau} - y\left[1 + \Lambda - y - \Lambda x^2 - l\sqrt{xy}\cos P\right] = St_y \tag{1.5}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} - k\left[(1 - l)x - 1\right] + \frac{l}{2}\sqrt{xy}\sin P = St_\varphi \tag{1.6}$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} - k\left[(1 - l)y - 1\right] - \frac{l}{2}\sqrt{xy}\sin P = St_\psi \tag{1.7}$$

Здесь введен коэффициент $k = -\mathrm{Im}\,\mu/2\,\mathrm{Re}\,\mu$. В модели (1.4)–(1.7) можно усмотреть отделяющуюся систему из трех уравнений (1.4), (1.5) и (1.8) для интенсивностей x, y и относительной фазы P колебаний в двух дорожках K, составляющих комплексный след.

$$\frac{dP}{d\tau} - k(1 - l)(x - y) + l\sqrt{xy}\sin P = \mathrm{St}_\phi - \mathrm{St}_\psi \tag{1.8}$$

Разрешив эту систему трех "ведущих" уравнений, можно восстановить полное решение согласно уравнениям (1.6) и (1.7). Как модель (1.4)–(1.7), так и ведущая система уравнений (1.4), (1.5), (1.8) содержит всего три действительных параметра: k, Λ и l, причем первый из них – наследуемый от модели Л–С. Для его оценки можно использовать результаты расчета для случая следа от одиночного цилиндра вблизи порога бифуркации $R \approx R_{cr}$, согласно которому $k = 1.64$ по [3], или $k = -c/2 \approx 1.35$, где $c \approx -2.7$ – "постоянная Ландау" для характерной точки дорожки K $x/D \approx 5$ по [4].

2. МОДЫ И РЕЖИМЫ СЛЕДА ОТ ПАРЫ ЦИЛИНДРОВ; СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Простую модель комплексного следа (1.4)–(1.8) удалось проанализировать почти полностью аналитически, определив набор мод и собственных частот осцилляций. Глобальные моды находим как линейно-устойчивые точки покоя или квазипериодические решения уравнений модели (1.4)–(1.8) при нулевых правых частях $St = 0$. Имеем следующий спектр мод – рис. 1. При произвольной интенсивности взаимодействия $\Lambda > 0$ и при $l > 0$, но вне клина $\Lambda > 0.5$, $|l| < 2\Lambda^2 + 2\Lambda - 1.5$ существует первая симметричная мода, в форме одинаковых синфазно-синхронизованных парциальных дорожек K. Конфигурация моды I следующая: $x = y = [\sqrt{(1 + l)^2 + 4\Lambda(1 + \Lambda)} - (1 + l)]/2\Lambda$, $P = 0$. Напротив, при $\Lambda > 0$, но $l < 0$ и вне отмеченного клина существует вторая симметричная мода, в виде одинаковых противофазно-синхронизованных дорожек с конфигурацией: $x = y = [\sqrt{(1 - l)^2 + 4\Lambda(1 + \Lambda)} - (1 - l)]/2\Lambda$, $P = \pi$. При относительно интенсивном взаимодействии парциальных дорожек K, т.е. на интервале изменения параметра $0.5 < \Lambda < 0.5(\sqrt{5} - 1)$, становится линейно-устойчивой третья асимметричная мода в форме двух

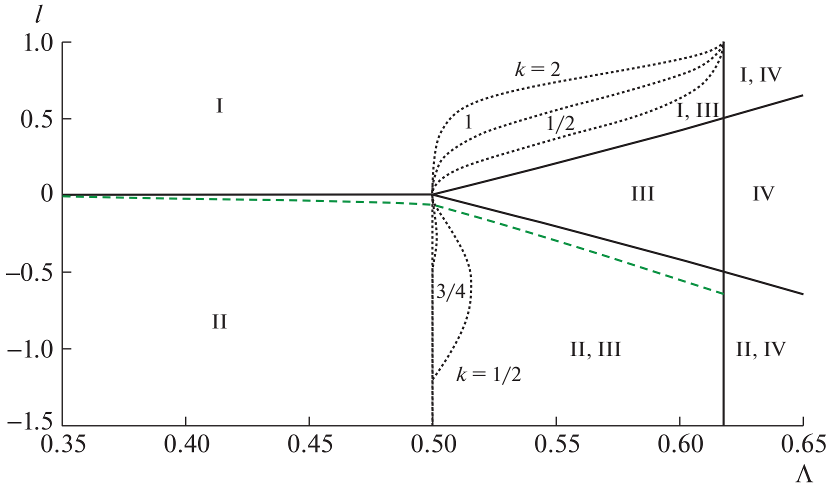

Рис. 1. Области существования глобальных мод I–IV следа. На каждом сегменте плоскости Λ, l римскими цифрами нанесены номера реализующихся в пределах этого сегмента мод. Положение границ сегментов (сплошные линии) не зависит от параметра модели k, за исключением левой границы области существования моды III – $\underline{\Lambda}(l,k)$, нанесенной пунктиром. Возможная траектория изменения параметров взаимодействия дорожек Кармана (согласно уравнениям (2.2), $\alpha = 1$) – зеленая штриховая линия.

различающихся по всем характеристикам дорожек К. Примерная конфигурация моды III следующая: $x \approx [1+\sqrt{4\Lambda(1+\Lambda)-3}]/2\Lambda$, $y \approx [1-\sqrt{4\Lambda(1+\Lambda)-3}]/2\Lambda$. Эта мода глобально устойчива в треугольнике параметров: $0.5 < \Lambda < 0.5(\sqrt{5}-1)$, $|l| < 2\Lambda^2 + 2\Lambda - 1.5$. Вне этого треугольника, когда параметр $\Lambda > \underline{\Lambda}(l,k)$, она перемежается при $l > 0$ с модой I или при $l < 0$ с модой II. Здесь для левой границы области существования моды III, найденной численным расчетом системы уравнений (1.4)–(1.7), введено обозначение $\underline{\Lambda}(l,k)$ (рис. 1, пунктир). При дальнейшем повышении интенсивности взаимодействия дорожек, т.е. при $\Lambda > 0.5(\sqrt{5}-1)$, модель теряет корректность, ввиду предсказания для этой области не наблюдавшейся моды IV в форме невозмущенной дорожки К от одного из цилиндров при полном подавлении дорожки от второго цилиндра. Кроме того, при весьма малых значениях параметра k дополнительно обнаруживается мода V в виде различающихся по интенсивности, но синхронизованных дорожек К (при $l < 0$ и $0.5 < \Lambda <$ $< (0.5(\sqrt{5}-1)$ для этого требуется выполнение неравенства $k < 1/4\sqrt{2}$).

Из приведенных данных видно, что спектр расчетных глобальных мод I–III точно соответствует экспериментально наблюдаемому набору трех огрубленных мод следа [7–9]. При этом, в случае достаточно широко разнесенных цилиндров $L/D > 2 - 2.5$, в эксперименте наблюдается перемежающееся течение по модам I и II, причем № II – преимущественно реализуемая мода, согласно [8]. Соответственно этому случаю, в модели при сравнительно слабом взаимодействии дорожек К – при $0 < \Lambda < 0.5$ воспроизводится одномодовое течение по моде II (при надлежащем выборе зависимости $l = l(\Lambda)$, о чем будет сказано ниже). Далее, при сближении цилиндров до расстояния $L/D = 2 - 2.5$ (в зависимости от числа Рейнольдса течения) в эксперименте визуализируется бифуркация от течения по моде II к перемежающемуся по модам II и III следу [7, 8]. Эта бифуркация полностью воспроизводится в рамках модели при критическом значении параметра $\Lambda \approx 0.5$: смотри движение изображающей точки слева-направо вдоль зеленой штриховой линии на рис. 1.

Что можно сказать о расчете собственных частот осцилляций по модам следа? Соответствующие данные приведены на рис. 2, где частоты осцилляций рассчитывались по формулам (2.1), для средних установившихся значений интенсивностей осцилляций в дорожках – $\langle x \rangle$ и $\langle y \rangle$.

$$\begin{aligned} \omega_x &= 1 + \left(\frac{k\varepsilon_{LS}\operatorname{Re}\lambda}{\pi Sh_1}\right)\left[(1-l)\langle x\rangle - 1\right] \\ \omega_y &= 1 + \left(\frac{k\varepsilon_{LS}\operatorname{Re}\lambda}{\pi Sh_1}\right)\left[(1-l)\langle y\rangle - 1\right] \end{aligned} \qquad (2.1)$$

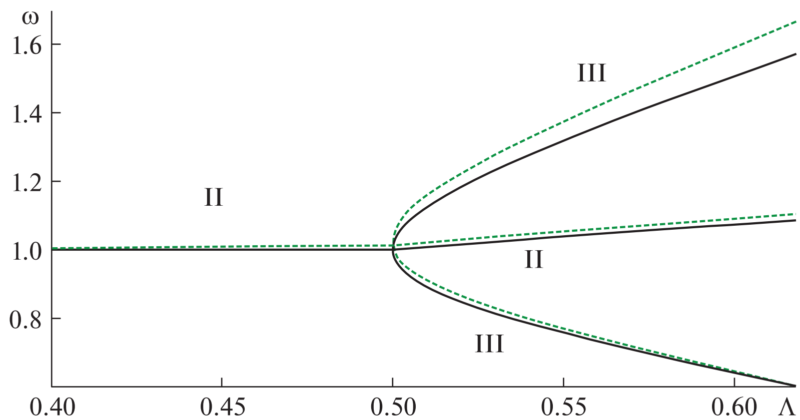

Рис. 2. Спектр собственных частот осцилляций в следе от двух цилиндров, случай $(k\varepsilon_{LS}\,\mathrm{Re}\,\lambda)/(2\pi Sh_1) = 0.2$. Номера мод приведены возле соответствующих ветвей спектра римскими цифрами. Сплошные черные кривые соответствуют траектории изображающей точки, проходящей по верхней границе существования моды II – согласно уравнению (2.2) при значении $\alpha = 0$, зеленые штриховые линии – для траектории (2.2): $\alpha = 1$.

В частности, для уединенных дорожек $\Lambda = l = 0$ имеем $\langle x\rangle = \langle y\rangle = 1$, и соответствующие безразмерные частоты осцилляций $\omega_x = \omega_y = 1$ при любом закритическом числе Рейнольдса течения $R > R_{cr}$. Дорожки К в комплексном следе интенсивно взаимодействуют лишь в области их формирования вблизи цилиндров, соответственно, считаем основной параметр, характеризующий взаимодействие дорожек в модели, – $\Lambda(L/D, R)$ монотонно убывающей функцией расстояния между осями цилиндров L/D. (Дополнительно учитываем, что эффективный зазор между цилиндрами, с учетом пограничных слоев на цилиндрах, определяется не исключительно геометрией, но и числом Рейнольдса). Для согласования расчетных частот с экспериментальными данными, выбираем значение второго параметра взаимодействия – l чуть ниже верхней границы области существования моды II, например:

$$\begin{gathered} l = -\alpha\Lambda^4, \quad 0 \le \Lambda \le 0.5 \\ l = -2\Lambda(1+\Lambda) + 1.5 - \alpha\Lambda^4, \quad 0.5 \le \Lambda < 0.5(\sqrt{5}-1); \quad 0 \le \alpha \le 1 \end{gathered} \tag{2.2}$$

С учетом установленного соответствия $l = l(\Lambda)$ и $\Lambda = \Lambda(L/D, R)$ констатируем хорошее согласие расчетных данных о распределении частот осцилляций по глобальным модам следа – рис. 2 с известными экспериментальными данными $Sh = Sh(L/D, R)$ [7, Fig. 31, 32; 8, Fig. 14a]. Замечание: если на интервале $0 \le \Lambda \le 0.5$ сместить траекторию изображающей точки чуть выше уровня $l = 0$, то в рамках модели, при слабом взаимодействии дорожек К вместо моды II будет существовать мода I, но частота осцилляций по моде I останется примерно единичной (как и была для моды II), что соответствует экспериментальным измерениям для разнесенных цилиндров $L/D > 2-2.5$ (когда частоты осцилляций по перемежающимся модам I и II не удается различить).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вариант модели ближнего следа от пары цилиндров, установленных бок о бок, предлагается как обобщение, с использованием теории возмущений, известной, обоснованной модели Ландау–Стюарта для следа уединенного цилиндра. Этот вариант, в целом, адекватно воспроизводит спектр огрубленных экспериментальных мод комплексного следа I–III и, в частности, бифуркацию к режиму перемежаемости мод II $\to$ II/III в турбулентном следе, а также собственные частоты осцилляций мод следа для не слишком близко расположенных цилиндров, примерно $L/D \ge 1.5$. Известно [7–9], что при меньших расстояниях, в результате усиления взаимодействия между областями формирования дорожек К, след принимает форму одной широкой дорожки К. Такая форма комплексного следа плохо воспроизводится в рамках модели, хотя и допускает неформальную интерпретацию в виде следа в состоянии моды III с наличествующей низкочастотной дорожкой K, но при полностью релаксировавшей вниз по потоку высокочастотной дорожке. Существенное различие в скорости диссипации двух дорожек, составляющих моду III, действительно наблюдается в эксперименте [7, 8].

Лежащая в основе предлагаемой модели, модель Л–С следа от одиночного цилиндра находит применение в широком диапазоне чисел Рейнольдса $R < 10^5$ (например, при расчете ветровой нагрузки линий передачи электроэнергии, трубопроводов). Можно ожидать, что обобщенная модель комплексного следа работоспособна примерно в том же широком диапазоне чисел Рейнольдса. Здесь подразумевается, что эффективность применения теории возмущений в предлагаемой модели следа определяется, прежде всего, широко варьируемой интенсивностью Λ и l возмущающих членов уравнений, а не изменением сравнительно консервативных наследуемых параметров модели Л–С. Естественно, численные значения коэффициентов уравнений модели будут варьировать при изменении числа Рейнольдса течения, граничных условий на концах цилиндров и других параметров задачи, как это имеет место уже для следа одиночного цилиндра, например [10].

Здесь уместно отметить, что осцилляторная модель следа от двух цилиндров, при нелинейном представлении взаимодействия парциальных дорожек K, рассматривается нами где-то с 2013 г. При этом смоделировать экспериментальное распределение частот осцилляций по модам следа [7, Fig. 31, 32; 8, Fig. 14a] в широком диапазоне изменения интенсивности взаимодействия дорожек K удалось только в 2022 г., тогда как набор трех огрубленных мод I–III следа был получен сразу [6, 11, 12]. Предыдущие варианты модели удавалось согласовать с нашими измерениями базовых частот осцилляций только для одного фиксированного расстояния между осями цилиндров $L/D = 2.1 - 2.2$ [6].

Работа выполнена с использованием средств государственного бюджета по госзаданию № 123021700057-0.

Статья посвящена светлой памяти профессора Эдуарда Владимировича Теодоровича 18.07.1932–1.11.2022.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гувернюк С.В., Дынников Я.А., Дынникова Г.Я., Малахова Т.В.* Вклад силы присоединенных масс в формирование пропульсивной силы машущего профиля в вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 5. С. 3–12.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
3. *Sipp D., Lebedev A.* Global stability of base and mean flows: a general approach and its applications to cylinder- and open cavity flows // J. Fluid Mech. 2007. V. 593. P. 333–358.
4. *Thompson M.C., Le Gal P.* The Stusrt-Landau model applied to wake transition revisited // Europ. J. Mech. B/Fluids. 2004. V. 23. P. 219–228.
5. *Peschard I., Le Gal P.* Coupled wakes of cylinders // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. № 15. P. 3122–3125.
6. *Гембаржевский Г.В., Осипенко К.Ю.* Интерпретация и механизм перестройки течения ближнего следа под действием тлеющего разряда // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 1. С. 14–31.
7. *Sumner D.* Two circular cylinders in cross-flow: A review // J. Fluids Struct. 2010. V. 26. P. 849–899.
8. *Alam Md.M., Moriya M., Sakamoto H.* Aerodynamic characteristics of two side-by-side circular cylinders and application of wavelet analysis on the switching phenomenon // J. Fluids Struct. 2003. V. 18. P. 325–346.
9. *Sumner D., Reitenbach H.K.* Wake interference effects for two finite cylinders: A brief review and some new measurements // J. Fluids Struct. 2019. V. 89. P. 25–39.
10. *Душина О.А., Калинин Е.И., Клюев М.А., Мазо А.Б., Молочников В.М.* Влияние ограничения потока боковыми стенками на поперечное обтекание кругового цилиндра при умеренных числах Рейнольдса // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 1. С. 97–114.
11. *Гембаржевский Г.В., Леднев А.К., Осипенко К.Ю.* Моделирование эволюции плазменного следа пары цилиндров под действием электрического разряда // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. № 23. С. 40–48.
12. *Гембаржевский Г.В., Леднев А.К., Осипенко К.Ю.* Развитие простой модели следа от пары цилиндров: двухчастотная мода течения // ТВТ. 2019. Т. 57. № 1. С. 121–126.