

УДК 532.5.031:532.591

## ДЕЙСТВИЕ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ИСТОЧНИКА В ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СДВИГОВОГО СЛОЯ

© 2023 г. И. В. Стурова\*

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*

*\*E-mail: sturova@hydro.nsc.ru*

Поступила в редакцию 10.01.2023 г.

После доработки 28.02.2023 г.

Принята к публикации 28.02.2023 г.

Решена двумерная нестационарная задача о развитии волнового движения в двухслойной жидкости конечной глубины, ограниченной сверху свободной поверхностью. Рассмотрены случаи, когда в невозмущенном состоянии один из слоев покоится, а в другом (приповерхностном или придонном) горизонтальная скорость потока линейно меняется по глубине. Определены дисперсионные зависимости и групповые скорости трех волновых мод, возникающих при наличии сдвигового потока. Вычислены вертикальные смещения свободной поверхности, вызванные включением пульсирующего источника, расположенного в изначальном неподвижном слое жидкости. Задача рассматривается в линейной постановке, жидкость предполагается идеальной и несжимаемой.

*Ключевые слова:* поверхностные волны, пульсирующий источник, сдвиговые течения

**DOI:** 10.31857/S102470842360001X, **EDN:** WKLCAS

В линейной постановке достаточно полно исследованы процессы генерации, развития и распространения поверхностных волн, вызванных различными подводными возмущениями для покоящейся в невозмущенном состоянии среде или в потоке жидкости, текущей с постоянной по глубине скоростью [1–3]. Однако в реальных условиях часто имеет место изменение скорости и направления основного потока жидкости по глубине. Обзор исследований о взаимодействии поверхностных волн и сдвиговых течений дан в [4, 5]. Учет произвольного изменения скорости течения по глубине даже в двумерном случае является довольно сложной задачей. Одним из наиболее распространенных способов приближенного учета сдвигового течения является его кусочно-линейная аппроксимация с условием непрерывности скоростей на границе слоев. Большое число подобных исследований было выполнено в Морском гидрофизическом институте АН УССР [6].

Одним из наиболее простых примеров сдвигового течения с непостоянной завихренностью является двухслойная жидкость со свободной поверхностью, в верхнем слое которой имеется линейный сдвиговой поток, а нижний слой покоится. Исследование дисперсионных свойств волнового движения при бесконечно глубоком нижнем слое выполнено в [7], а для жидкости конечной глубины – в [8]. В [9] показано, что рассматриваемое течение становится неустойчивым для некоторой области волновых чисел при достаточно больших скоростях сдвигового течения на свободной поверхности.

В данной работе исследовано волновое движение, вызываемое включением пульсирующего источника, расположенного в слое первоначально покоящейся жидкости. Рассмотрено два варианта сдвигового потока: приповерхностный или придонный. Задача о развитии волнового движения при отсутствии сдвигового потока подробно исследована в [10, 11]. Показано, что при наличии сдвиговых потоков структура волнового движения существенно меняется.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим горизонтальный слой однородной невязкой несжимаемой жидкости постоянной глубины  $H$ , ограниченной сверху свободной поверхностью, а снизу ровным горизонтальным дном. В невозмущенном состоянии часть жидкости находится в покое, а в верхнем либо в ниж-

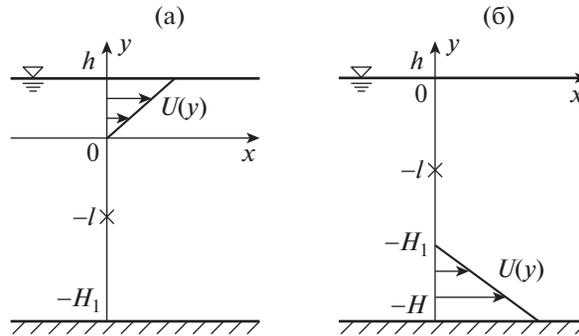


Рис. 1. Схема течения в невозмущенном состоянии для первого (а) и второго (б) случаев.

нем слое толщины  $h$  имеется сдвиговое течение с линейным профилем скорости (рис. 1). В первом случае (а) горизонтальная скорость в верхнем слое равна  $U(y) = U_0 y/h$ , а во втором случае (б) – в нижнем придонном слое  $U(y) = -U_0(y + H_1)/h$ . Система декартовых координат  $x, y$  введена так, что горизонтальная ось  $x$  в первом случае совпадает с невозмущенной границей между сдвиговым и покоящимся слоями, а во втором случае – с невозмущенной свободной поверхностью, ось  $y$  направлена вертикально вверх. Толщина покоящегося слоя равна  $H_1$ , и полная глубина жидкости составляет  $H = H_1 + h$ .

Предполагается, что в покоящемся слое жидкости в момент времени  $t = 0$  в точке  $x = 0, y = -l, 0 < l < H_1$ , начинает работать точечный массовый источник, пульсирующий по гармоническому закону с мощностью  $Q(t) = Q_0 \sin(\Omega t)$ . Движение жидкости в первоначально покоящемся слое предполагается потенциальным всюду, кроме точки локализации источника.

Задача решается в линейной постановке, и далее случаи верхнего и нижнего сдвигового слоя будут рассматриваться отдельно.

### 1.1. Верхний сдвиговой слой

Линеаризованные уравнения Эйлера в сдвиговом слое имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right) \mathbf{v} + v \frac{d\mathbf{V}}{dy} + \frac{\nabla p_1}{\rho} = 0, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (|x| < \infty, 0 \leq y \leq h) \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{V} = (U(y), 0)$  – вектор скорости основного потока,  $U(y) = U_0 y/h$ ,  $\mathbf{v} = (u, v)$  – возникающие возмущения скорости жидкости, которые предполагаются малыми,  $p_1$  – динамический добавок давления,  $\rho$  – плотность жидкости.

При наличии линейного сдвига продольной скорости основного течения компоненты волнового движения можно представить в виде [12]

$$u(x, y, t) = U(y) + \partial \phi_1 / \partial x, \quad v(x, y, t) = \partial \phi_1 / \partial y$$

где функция  $\phi_1(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\partial^2 \phi_1 / \partial x^2 + \partial^2 \phi_1 / \partial y^2 = 0 \quad (|x| < \infty, 0 \leq y \leq h) \quad (1.2)$$

Кинематическое и динамическое условия на свободной поверхности жидкости имеют вид

$$\partial \eta / \partial t + U_0 \partial \eta / \partial x = v, \quad \rho g \eta = p_1 \quad (y = h) \quad (1.3)$$

где  $\eta(x, t)$  – вертикальное смещение свободной поверхности,  $g$  – ускорение свободного падения.

В слое первоначально покоящейся жидкости потенциал скорости возмущенного течения  $\Phi(x, y, t)$  представим в виде, аналогичном [10]

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_0(x, y, t) + \phi_2(x, y, t) \quad (|x| < \infty, -H_1 \leq y \leq 0) \quad (1.4)$$

где

$$\Phi_0(x, y, t) = \frac{Q(t)}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y+l)^2} \quad (1.5)$$

потенциал скорости течения, создаваемого точечным пульсирующим источником в безграничной жидкости. Функция  $\phi_2(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\partial^2 \phi_2 / \partial x^2 + \partial^2 \phi_2 / \partial y^2 = 0 \quad (|x| < \infty, -H_1 \leq y \leq 0) \quad (1.6)$$

На границе раздела между верхним и нижним слоями выполняются условия непрерывности вертикальной скорости и давления

$$\partial \phi_1 / \partial y = \partial \Phi / \partial y, \quad p_1 = -\rho \partial \Phi / \partial t \quad (y = 0) \quad (1.7)$$

а на ровном горизонтальном дне – условие непротекания

$$\partial \Phi / \partial y = 0 \quad (y = -H_1) \quad (1.8)$$

В начальный момент времени волновые возмущения отсутствуют

$$\phi_1 = \phi_2 = 0, \quad \eta = \partial \eta / \partial t = 0 \quad (t = 0) \quad (1.9)$$

### 1.2. Придонный сдвиговой слой

В верхнем первоначально покоящемся слое жидкости потенциал скорости  $\Psi(x, y, t)$  ищем в виде, аналогичном (1.4)

$$\Psi(x, y, t) = \Phi_0(x, y, t) + \psi_1(x, y, t) \quad (|x| < \infty, -H_1 \leq y \leq 0)$$

где функция  $\Phi_0(x, y, t)$  задана в (1.5), и функция  $\psi_1(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа.

В нижнем слое ( $-H \leq y \leq -H_1$ ), в котором имеет место сдвиговое течение  $U(y) = -U_0(y + H_1)/h$ , выполняются линеаризованные уравнения Эйлера, аналогичные (1.1) и компоненты скорости волнового движения ищем в виде

$$u(x, y, t) = U(y) + \partial \psi_2 / \partial x, \quad v(x, y, t) = \partial \psi_2 / \partial y$$

где функция  $\psi_2(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа.

Граничные условия на свободной поверхности жидкости имеют вид

$$\partial \eta / \partial t = \partial \Psi / \partial y, \quad g\eta + \partial \Psi / \partial t = 0 \quad (y = 0) \quad (1.10)$$

На границе раздела между слоями имеем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial t} - \frac{U_0}{h} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \quad (y = -H_1) \quad (1.11)$$

а на дне

$$\partial \psi_2 / \partial y = 0 \quad (y = -H) \quad (1.12)$$

Начальные условия аналогичны (1.9).

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для решения начально-краевых задач, сформулированных в п. 1, используем преобразования Фурье и Лапласа в виде

$$\bar{\phi}_1(k, y, s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_{-\infty}^\infty \phi_1(x, y, t) e^{-ikx} dx dt$$

Аналогичные преобразования вводятся для остальных искомых функций.

Функции  $\phi_{1,2}(x, y, t)$  удовлетворяют уравнению Лапласа (1.2), (1.6), которое после преобразования Фурье принимает вид

$$\partial^2 \bar{\phi}_{1,2} / \partial y^2 - k^2 \bar{\phi}_{1,2} = 0$$

Аналогичное соотношение имеет место и для функций  $\bar{\Psi}_{1,2}(k, y)$ .

В случае 1 решения для функций  $\bar{\Phi}_1(k, y, s)$  и  $\bar{\Phi}_2(k, y, s)$  ищем в виде

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_1 &= C_1 \text{sh}[|k|(h-y)] + D_1 \text{ch}[|k|(h-y)] \quad (0 \leq y \leq h) \\ \bar{\Phi}_2 &= C_2 \text{sh}(|k|y) + D_2 \text{ch}(|k|y) \quad (-H_1 \leq y \leq 0)\end{aligned}$$

а для случая 2 – в виде

$$\bar{\Psi}_1 = C_3 \text{sh}(|k|y) + D_3 \text{ch}(|k|y) \quad (-H_1 \leq y \leq 0) \quad (2.1)$$

$$\bar{\Psi}_2 = C_4 \text{sh}[|k|(y+H_1)] + D_4 \text{ch}[|k|(y+H_1)] \quad (-H \leq y \leq -H_1) \quad (2.2)$$

где функции  $C_j(k, s)$ ,  $D_j(k, s)$  ( $j = 1-4$ ) являются неизвестными.

При вычислении преобразования Фурье для функции  $\Phi_0(x, y, t)$  и ее производных по  $x$  и  $y$  использованы результаты [10]. Выполняя преобразование Лапласа для функции  $Q(t)$ , получим

$$\int_0^{\infty} Q(t) e^{-st} dt = \frac{Q_0 \Omega}{s^2 + \Omega^2}$$

В случае 1 неизвестные функции  $\bar{\eta}(k, s)$ ,  $C_j(k, s)$ ,  $D_j(k, s)$  ( $j = 1, 2$ ) определяются из системы пяти алгебраических уравнений, вытекающих из граничных условий (1.3), (1.4), (1.7) и (1.8)

$$\begin{aligned}(s + ikU_0)\bar{\eta} + |k|C_1 &= 0 \\ g\bar{\eta} + i\gamma C_1 + (s + ikU_0)D_1 &= 0 \\ C_1 \text{ch}(|k|h) + D_1 \text{sh}(|k|h) + C_2 &= -\Lambda e^{-|k|h} \\ C_1 \left[ \text{sh}(|k|h) + \frac{i\gamma}{s} \text{ch}(|k|h) \right] + D_1 \left[ \text{ch}(|k|h) + \frac{i\gamma}{s} \text{sh}(|k|h) \right] - D_2 &= -\Lambda e^{-|k|h} \\ C_2 \text{ch}(|k|H_1) - D_2 \text{sh}(|k|H_1) &= \Lambda e^{-|k|(H_1-l)}\end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\gamma = \frac{U_0}{h} \text{sgnk}, \quad \Lambda = \frac{Q_0 \Omega}{2|k|(s^2 + \Omega^2)} \quad (2.4)$$

Решение системы уравнений (2.3) для  $\bar{\eta}(k, s)$  имеет вид

$$\bar{\eta} = Q_0 \Omega \frac{[1 + e^{-2|k|(H_1-l)}] e^{-|k|(l+h)}}{1 + e^{-2|k|H}} \frac{s(s + ikU_0)}{(s^2 + \Omega^2) P_1(k, s)}$$

Здесь  $P_1(k, s)$  – полином третьей степени

$$P_1(k, s) = s^3 + ia_1 s^2 + a_2 s + ia_3 \quad (2.5)$$

где

$$a_1(k) = 2kU_0 + \gamma[b_+ - \text{th}(|k|H)] \quad (2.6)$$

$$a_2(k) = g|k|\text{th}(|k|H) + \gamma[kU_0(\text{th}(|k|H) - 2b_+) + \gamma b_-] - k^2 U_0^2 \quad (2.7)$$

$$a_3(k) = \gamma[kU_0(\gamma b_- - kU_0 b_+) + g|k|b_-] \quad (2.8)$$

$$b_{\pm}(k) = (1 \pm e^{-2|k|h}) \frac{1 - e^{-2|k|H_1}}{2(1 + e^{-2|k|H})} \quad (2.9)$$

Полином  $P_1(k, s)$  представим в виде

$$P_1(k, s) = \prod_{n=1}^3 (s - s_n)$$

где  $s_n(k)$  ( $n = 1-3$ ) корни уравнения  $P_1(k, s) = 0$ .

После выполнения обратных преобразований Лапласа и Фурье получим решение для отклонения свободной поверхности от ее равновесного положения

$$\eta(x, t) = \frac{Q_0 \Omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + e^{-2k(H_1-l)}}{1 + e^{-2kH}} e^{-k(l+h)} [A_1(k, t) \cos kx - B_1(k, t) \sin kx] dk \quad (2.10)$$

где  $A_1(k, t)$  и  $B_1(k, t)$  соответственно вещественная и мнимая части суммы  $\sum_{n=1}^5 \alpha_n(k) e^{s_n(k)t}$ ,  $s_{4,5} = \pm i\Omega$ .  
Функции  $\alpha_n(k)$  ( $n = 1-5$ ) удовлетворяют равенству

$$\frac{s(s + ikU_0)}{(s^2 + \Omega^2)P_1(k, s)} = \sum_{n=1}^5 \frac{\alpha_n(k)}{s - s_n(k)} \quad (2.11)$$

и их определение сводится к решению системы пяти линейных алгебраических уравнений, получающихся из равенства числителей в левой и правой частях соотношения (2.11). При выводе (2.10) использовано свойство функций  $s_n(k)$  ( $n = 1-3$ ) и  $\alpha_n(k)$  ( $n = 1-5$ ), заключающееся в том, что их значения при  $k > 0$  и  $k < 0$  являются комплексно-сопряженными.

Аналогичным образом строится решение задачи и в случае 2. Используя для функций  $\bar{\Psi}_1(k, y, s)$  и  $\bar{\Psi}_2(k, y, s)$  представления (2.1) и (2.2), неизвестные функции  $\bar{\eta}(k, s)$ ,  $C_j(k, s)$ ,  $D_j(k, s)$  ( $j = 3, 4$ ) определяются из системы уравнений, вытекающих из граничных условий (1.10)–(1.12)

$$s\bar{\eta} - |k|C_3 = |k|\Lambda e^{-|k|l}$$

$$g\bar{\eta} + sD_3 = s\Lambda e^{-|k|l}$$

$$C_3 \operatorname{ch}(|k|H_1) - D_3 \operatorname{sh}(|k|H_1) - C_4 = \Lambda e^{-|k|(H_1-l)}$$

$$C_3 \operatorname{sh}(|k|H_1) - D_3 \operatorname{ch}(|k|H_1) + i\gamma C_4/s + D_4 = -\Lambda e^{-|k|(H_1-l)}$$

$$C_4 - D_4 \operatorname{th}(|k|h) = 0$$

где использованы обозначения (2.4). Решение этой системы уравнений для  $\bar{\eta}(k, s)$  имеет вид

$$\bar{\eta} = Q_0 \Omega \frac{(1 + e^{-2|k|h})e^{-|k|l}}{1 + e^{-2|k|H}} \frac{s(cs + d)}{(s^2 + \Omega^2)P_2(k, s)}$$

где  $P_2(k, s)$  – полином третьей степени

$$P_2(k, s) = s^3 + ib_1 s^2 + b_2 s + ib_3 \quad (2.12)$$

$$b_1(k) = \gamma f_+, \quad b_2(k) = g|k| \operatorname{th}(|k|H), \quad b_3(k) = g\gamma|k|f_- \quad (2.13)$$

$$f_{\pm}(k) = (1 \pm e^{-2|k|H_1}) \frac{1 - e^{-2|k|h}}{2(1 + e^{-2|k|H})} \quad (2.14)$$

$$c(k) = \frac{1 + e^{-2|k|(H-l)}}{1 + e^{-2|k|h}}, \quad d(k) = 0.5i\gamma(1 + e^{-2|k|(H_1-l)}) \operatorname{th}(|k|h)$$

Решение для возвышения свободной поверхности после выполнения обратных преобразований Лапласа и Фурье имеет вид

$$\eta(x, t) = \frac{Q_0 \Omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 + e^{-2kh})e^{-kl}}{1 + e^{-2kH}} [A_2(k, t) \cos(kx) - B_2(k, t) \sin(kx)] dk \quad (2.15)$$

где  $A_2(k, t)$  и  $B_2(k, t)$  соответственно вещественная и мнимая части суммы  $\sum_{n=1}^5 \beta_n(k) e^{s_n(k)t}$ . Функции  $\beta_n(k)$  ( $n = 1-5$ ) определяются из равенства

$$\frac{s(cs + d)}{(s^2 + \Omega^2)P_2(k, s)} = \sum_{n=1}^5 \frac{\beta_n(k)}{s - s_n(k)}$$

после решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

### 3. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Полученные решения позволяют исследовать дисперсионные свойства волн, возникающих в рассматриваемых случаях. Дисперсионное соотношение устанавливает для каждой волны зависимость ее частоты  $\omega$  от волнового числа  $k$ . Ранее достаточно подробно был исследован случай 1 [7–9], тогда как для случая 2 подобные исследования автору не известны.

Для случая 1 используем уравнение  $P_1(k, s) = 0$ , где функция  $P_1(k, s)$  дана в (2.5). Вводя замену  $\omega = is$ , получим полином для определения дисперсионных соотношений каждой из трех волновых мод

$$\omega^3 - a_1(k)\omega^2 - a_2(k)\omega + a_3(k) = 0 \quad (3.1)$$

где значения  $a_n(k)$  ( $n = 1-3$ ) даны в (2.6)–(2.8). Анализируя функции  $a_n(k)$ , легко видеть, что для каждой из трех волн выполняется равенство  $\omega_n(k) = -\omega_n(-k)$ .

Групповая скорость каждой волновой моды равна  $c_g^{(n)} = d\omega_n/dk$ . Используя (3.1), получим

$$c_g^{(n)} = \frac{a_1' \omega_n^2 + a_2' \omega_n - a_3'}{3\omega_n^2 - 2a_1 \omega_n - a_2}$$

где штрих означает дифференцирование по  $k$ .

В частном случае однослойной жидкости с линейным сдвиговым потоком  $h = H$  ( $H_1 = 0$ ) функции  $b_{\pm}(k)$  в (2.9) тождественно равны нулю, и уравнение (3.1) становится квадратным уравнением

$$\omega^2 - \bar{a}_1(k)\omega - \bar{a}_2(k) = 0$$

где

$$\bar{a}_1(k) = 2kU_0 - \gamma \text{th}(|k|H), \quad \bar{a}_2(k) = (g|k| + \gamma k U_0) \text{th}(|k|H) - k^2 U_0^2$$

Следовательно, в этом случае существует только две волновые моды

$$\omega_{1,2} = \bar{a}_1/2 \pm \sqrt{(\bar{a}_1/2)^2 + \bar{a}_2} \quad (3.2)$$

Известно, что для кубического уравнения с вещественными коэффициентами (см., например, [13]) возможно существование двух сопряженных комплексных корней. Для уравнения (3.1) это возможно при условии, что значение  $Q$  положительное, где

$$Q = \left(\frac{r}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \quad (3.3)$$

$$r(k) = -\left(a_2(k) + \frac{a_1^2(k)}{3}\right), \quad q(k) = a_3(k) - 2\left(\frac{a_1(k)}{3}\right)^3 - \frac{1}{3}a_1(k)a_2(k)$$

Для случая 2 из уравнения  $P_2(k, s) = 0$ , используя соотношения (2.12)–(2.14), получим

$$\omega^3 - b_1(k)\omega^2 - b_2(k)\omega + b_3(k) = 0 \quad (3.4)$$

В этом случае групповая скорости каждой волновой моды равна

$$c_g^{(n)} = \frac{b_1' \omega_n^2 + b_2' \omega_n - b_3'}{3\omega_n^2 - 2b_1 \omega_n - b_2} \quad (3.5)$$

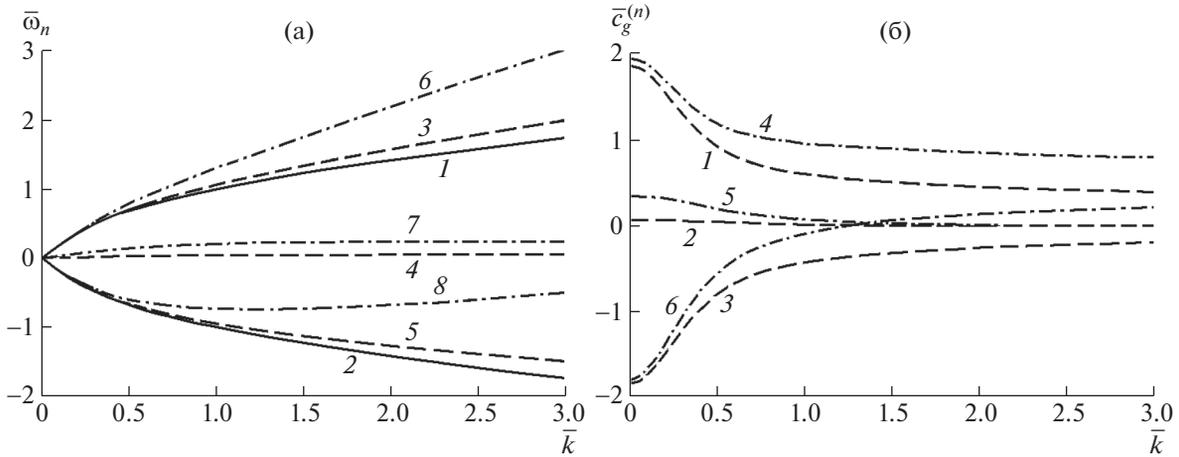


Рис. 2. (а) Дисперсионные зависимости  $\bar{\omega}_n(\bar{k})$ : 1, 2 –  $U_0 = 0$ ; 3–5 –  $\bar{U}_0 = 0.1$ ; 6–8 –  $\bar{U}_0 = 0.5$ . (б) Групповые скорости  $\bar{c}_g^{(n)}(\bar{k})$ : 1–3 –  $\bar{U}_0 = 0.1$ ; 4–6 –  $\bar{U}_0 = 0.5$ .

В частном случае однослойной жидкости при  $h = H$  ( $H_1 = 0$ ) получим аналогично случаю 1 квадратное уравнение

$$\omega^2 - (\gamma\omega + g|k|)\text{th}(|k|H) = 0$$

решение которого имеет вид

$$\omega_{1,2} = \gamma\text{th}(|k|H)/2 \pm \sqrt{[\gamma\text{th}(|k|H)/2]^2 + g|k|\text{th}(|k|H)}$$

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Использованы значения исходных параметров работы [10]:

$$H = 1 \text{ м}, \quad \Omega = 2\pi\text{с}^{-1}, \quad Q_0 = 1 \text{ м}^2/\text{с} \quad (4.1)$$

Ускорение свободного падения  $g = 9.81 \text{ м}/\text{с}^2$ .

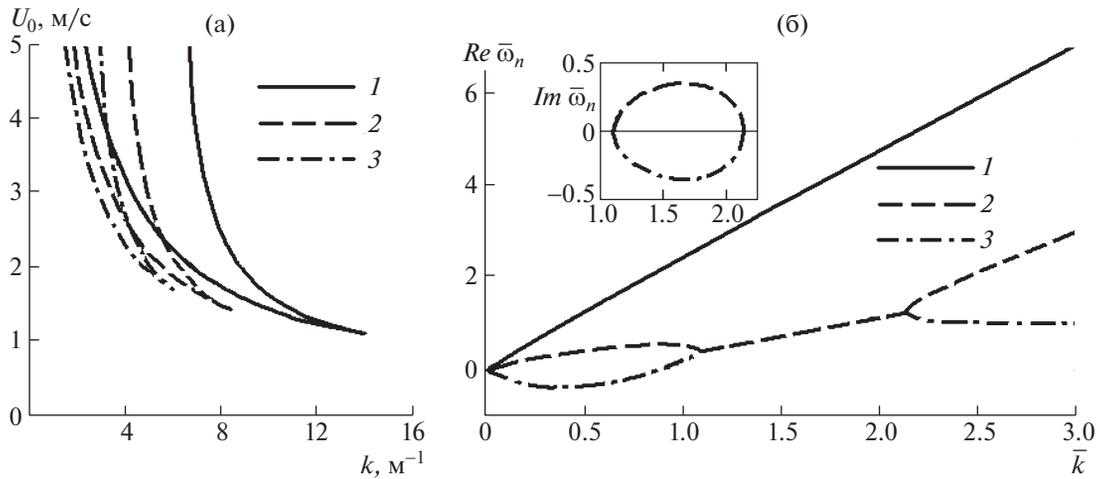
##### 4.1. Верхний сдвиговой слой

На рис. 2а представлены дисперсионные зависимости  $\bar{\omega}_n(\bar{k})$  для случая 1 при  $h=0.3 \text{ м}$ ,  $H_1=0.7 \text{ м}$  в безразмерном виде, где  $\bar{\omega}_n = \omega_n\sqrt{h/g}$ ,  $\bar{k} = kh$ . Кривые 1, 2 соответствуют покоящейся жидкости в невозмущенном состоянии ( $U_0 = 0$ ), для которой существуют только две волновые моды согласно (3.2)

$$\omega_{1,2} = \pm\sqrt{gk\text{th}(kH)}$$

Кривые 3–5 и 6–8 показывают дисперсионные зависимости  $\bar{\omega}_n$  ( $n = 1-3$ ) при  $\bar{U}_0 = U_0/\sqrt{gh} = 0.1, 0.5$  соответственно. Нумерация корней полинома (3.1) производится по убыванию их вещественной части. Видно, что с ростом скорости  $U_0$  увеличивается отклонение дисперсионных зависимостей от случая бессдвигового течения и возникает третья дополнительная волновая мода. Поведение групповых скоростей  $\bar{c}_g^{(n)} = c_g^{(n)}/\sqrt{gh}$  ( $n = 1-3$ ) показано на рис. 2б для  $\bar{U}_0 = 0.1$  (штриховые кривые 1–3) и  $\bar{U}_0 = 0.5$  (штрихпунктирные кривые 4–6).

С увеличением скорости  $U_0$  появляются комплексные корни в уравнении (3.1) при некоторых значениях волнового числа  $k$ . Это означает, что возникающее волновое движение становится неустойчивым. Границы устойчивости на плоскости  $(U_0, k)$  можно определить, используя нулевую изолинию функции  $Q$  в (3.3). На рис. 3а показаны нулевые изолинии функции  $Q$  при различных значениях толщины сдвигового слоя  $h = 0.3, 0.5, 0.7 \text{ м}$  (кривые 1–3) соответственно. При увели-

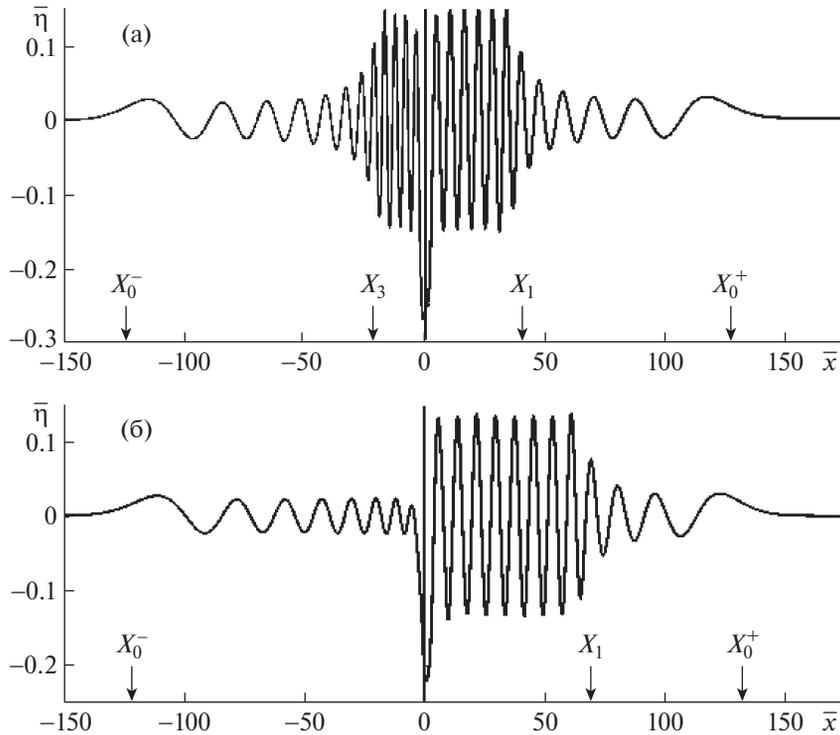


**Рис. 3.** (а) Области неустойчивых значений волновых чисел в зависимости от скорости сдвигового потока  $U_0$  при различных толщинах сдвигового слоя: 1–3 –  $h = 0.3, 0.5, 0.7$  м. (б) Вещественные значения дисперсионных зависимостей  $\bar{\omega}_n(\bar{k})$  при наличии неустойчивого диапазона волновых чисел. Номер кривых 1–3 соответствует номеру моды. На врезке показана зависимость мнимых значений  $\bar{\omega}_n(\bar{k})$  при  $n = 2$  и  $n = 3$ .

чении толщины сдвигового слоя область неустойчивых значений  $k$  уменьшается и полностью исчезает при  $h = H$ . Пример поведения дисперсионных зависимостей  $\bar{\omega}_n(\bar{k})$  ( $n = 1-3$ ) при наличии неустойчивого диапазона волновых чисел представлен на рис. 3б для  $h = 0.3$  м и  $\bar{U}_0 = 2$ . На отрезке  $1.095 < \bar{k} < 2.138$  значения  $\bar{\omega}_2$  и  $\bar{\omega}_3$  становятся комплексно-сопряженными и их мнимые значения показаны на врезке рис. 3б. Развитие волновых возмущений в этом случае надо исследовать на основе уравнений и граничных условий, учитывающих нелинейные члены.

Возвышения свободной поверхности  $\eta(x, t)$  при  $h = 0.3$  м,  $l = 0.2$  м,  $t = 12$  с определены в результате численного интегрирования (2.10) и представлены на рис. 4а, б для  $\bar{U}_0 = 0.1, 0.5$  соответственно. Используются следующие безразмерные переменные:  $\bar{\eta} = \eta\sqrt{gh}/Q_0$ ,  $\bar{x} = x/h$ . При отсутствии сдвигового течения ( $U_0 = 0$ ) профили свободной поверхности для заданного момента времени представлены в [10]. В этом случае волновые возмущения являются четной функцией по  $x$ .

Зависимости групповой скорости волновых мод от волнового числа позволяют определить границы волновых фронтов возбуждаемых колебаний. Значение  $c_g^{(n)}(0)$  показывает скорость распространения длинноволновых возмущений. В рассматриваемой задаче волновые движения порождаются периодическим источником, фиксированная частота которого  $\Omega$  определяет волновой фронт распространения возмущений заданной частоты. Границы этого волнового фронта подробно изучены в [11] для случая бессдвигового течения. В рассматриваемой задаче для каждой дисперсионной зависимости  $\omega_n(k)$  ( $n = 1-3$ ) следует определить значение  $k_n$ , удовлетворяющее уравнению  $\omega_n(k_n) = \Omega$ . Скорость волнового фронта, который устанавливает границы профиля свободной поверхности с колебаниями заданной частоты  $\Omega$ , определяется значением групповой скорости  $c_g^{(n)}(k_n)$ . При наличии сдвигового течения распространение волн вправо и влево от пульсирующего источника происходит с разными скоростями. Для рис. 4а  $\bar{c}_g^{(1)}(0) = 1.84$ ,  $\bar{c}_g^{(3)}(0) = -1.81$ ,  $\bar{k}_1 = 1.07$ ,  $\bar{c}_g^{(1)}(\bar{k}_1) = 0.576$ ,  $\bar{k}_3 = 1.43$ ,  $\bar{c}_g^{(3)}(\bar{k}_3) = -0.325$ . Для заданного момента времени  $t = 12$  с (в безразмерных переменных  $\bar{t} = t\sqrt{g/h} = 68.62$ ) координаты волновых фронтов показаны вертикальными стрелками на рис. 4а:  $X_0^+ = \bar{t}\bar{c}_g^{(1)}(0) = 126.3$ ,  $X_0^- = \bar{t}\bar{c}_g^{(3)}(0) = -124.2$ ,  $X_1 = \bar{t}\bar{c}_g^{(1)}(\bar{k}_1) = 39.55$ ,  $X_3 = \bar{t}\bar{c}_g^{(3)}(\bar{k}_3) = -22.33$ .



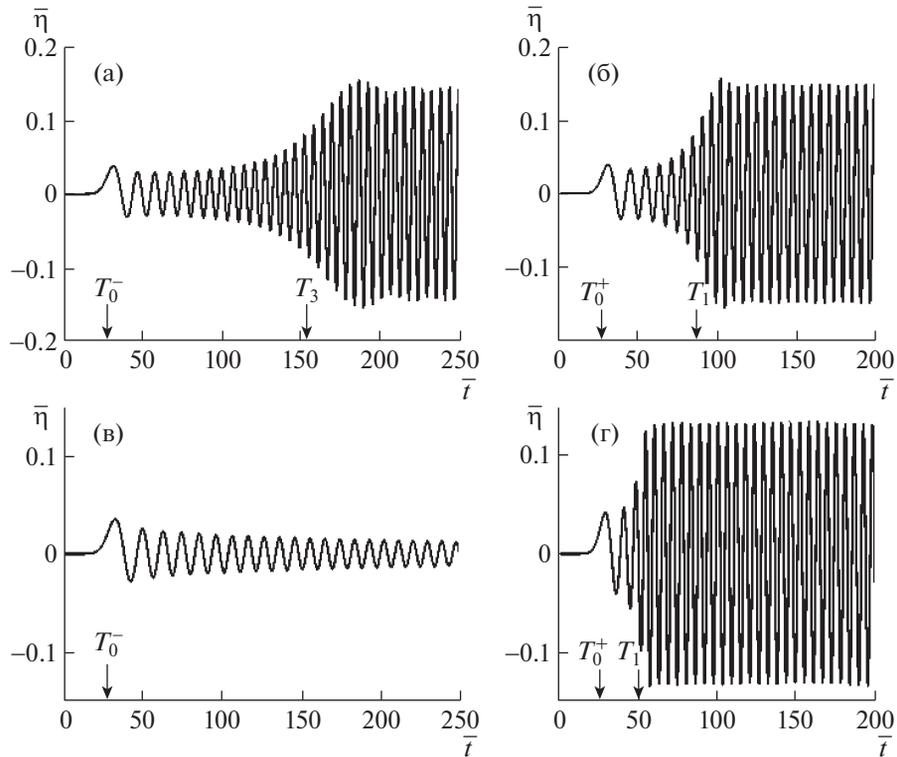
**Рис. 4.** Возвышения свободной поверхности при  $t = 12$  с: (а, б)  $\bar{U}_0 = 0.1, 0.5$ . Вертикальные стрелки указывают положения волновых фронтов для различных мод.

Для значения скорости  $\bar{U}_0 = 0.5$  согласно рис. 2а (кривая 8) дисперсионная зависимость  $|\bar{\omega}_3(\bar{k})| < \bar{\Omega}$  для всех значений  $\bar{k}$ , где  $\bar{\Omega} = \Omega\sqrt{h/g} = 1.099$ . Это означает, что при отрицательных значениях  $x$  второй волновой фронт отсутствует, так как не возникает колебаний свободной поверхности с частотой пульсирующего источника. Для рис. 4б  $\bar{c}_g^{(1)}(0) = 1.92$ ,  $\bar{c}_g^{(3)}(0) = -1.76$ ,  $\bar{k}_1 = 0.795$ ,  $\bar{c}_g^{(1)}(\bar{k}_1) = 1.0$ ,  $X_0^+ = 131.8$ ,  $X_0^- = -120.8$ ,  $X_1 = 68.65$  и координаты волновых фронтов также показаны вертикальными стрелками. Рис. 4б подтверждает вывод работы [7] о том, что приповерхностный сдвиговой поток обладает свойствами волногасителя.

Рисунок 5 показывает смещения свободной поверхности жидкости в зависимости от времени  $\bar{t} = t\sqrt{g/h}$  в двух фиксированных точках  $\bar{x} = -50$  (рис. 5а,в) и  $\bar{x} = 50$  (рис. 5б,г) для  $\bar{U}_0 = 0.1$  (рис. 5а,б) и  $\bar{U}_0 = 0.5$  (рис. 5в,г). Можно определить время прохождения волновых фронтов в рассматриваемых точках свободной поверхности. По аналогии с рис. 4 обозначим время прохождения фронта длинноволновых возмущений  $T_0^\pm$  и время прохождения второго фронта  $T_{1,3}$ . Эти моменты времени показаны на рис. 5 вертикальными стрелками: для рис. 5а  $T_0^- = 27.62$ ,  $T_3 = 153.85$ , для рис. 5б  $T_0^+ = 27.17$ ,  $T_1 = 86.75$ , для рис. 5в  $T_0^- = 28.41$  и для рис. 5г  $T_0^+ = 26.04$ ,  $T_1 = 50$ .

#### 4.2. Нижний сдвиговой слой

Для случая 2 расчеты выполнены при значениях исходных параметров (4.1), толщине придонного сдвигового слоя  $h = H - H_1 = 0.3$  м и отстоянии пульсирующего источника от свободной поверхности  $l = 0.5$  м. На рис. 6 представлены дисперсионные зависимости и значения групповых скоростей для двух скоростей  $\bar{U}_0 = 0.5, 2.5$ . Кривые 1–3 соответствуют номеру волновой моды. На рис. 6а,б показаны зависимости  $\bar{\omega}_n(\bar{k})$  ( $n = 1-3$ ), определяемые как корни полинома в (3.4), а на рис. 6в,г – значения групповых скоростей для каждой волновой моды согласно (3.5).



**Рис. 5.** Возвышения свободной поверхности в зависимости от времени в фиксированных точках:  $\bar{x} = -50$  (а, в) и  $\bar{x} = 50$  (б, г) для  $\bar{U}_0 = 0.1$  (а, б) и  $\bar{U}_0 = 0.5$  (в, г). Вертикальные стрелки показывают время прохождения волновых фронтов для различных мод.

Рисунок ба,в соответствует скорости  $\bar{U}_0 = 0.5$ , а рис. бб,г – скорости  $\bar{U}_0 = 2.5$ . Интересно отметить, что в рассматриваемом случае все возбуждаемые волновые моды являются устойчивыми, так как значение величины  $Q$  для полинома в (3.4) при рассматриваемых параметрах остается отрицательным для всех значений волнового числа  $k$ . Другой интересной особенностью рассматриваемого случая является то, что вторая волновая мода, которая при малых скоростях  $U_0$  была значительно меньше двух других мод, с ростом этой скорости становится сопоставимой с двумя другими волновыми модами.

Поведение вертикальных смещений свободной поверхности, полученных в результате численного интегрирования (2.15), представлено на рис. 7 при фиксированном значении времени  $t = 12$  с ( $\bar{t} = 68.62$ ) и на рис. 8 при фиксированном значении продольной координаты  $\bar{x} = -50, 50$ . Использовано два значения скорости  $\bar{U}_0 = 0.5$  (рис. 7а, 8а,б) и  $\bar{U}_0 = 2.5$  (рис. 7б, 8в,г).

Вертикальными стрелками показаны значения волновых фронтов аналогично рис. 4 и 5. Для значения скорости  $\bar{U}_0 = 0.5$  согласно рис. 6а,в  $\bar{c}_g^{(1)}(0) = 1.92$ ,  $\bar{c}_g^{(3)}(0) = -1.76$ ,  $\bar{k}_1 = 1.21$ ,  $\bar{c}_g^{(1)}(\bar{k}_1) = 0.453$ ,  $\bar{k}_3 = 1.21$ ,  $\bar{c}_g^{(3)}(\bar{k}_3) = -0.459$ . Для заданного момента времени координаты волновых фронтов показаны вертикальными стрелками на рис. 7а:  $X_0^+ = 131.7$ ,  $X_0^- = -121.0$ ,  $X_1 = 31.12$ ,  $X_3 = -31.53$ .

Для значения скорости  $\bar{U}_0 = 2.5$  согласно рис. 6б,г  $\bar{c}_g^{(1)}(0) = 2.96$ ,  $\bar{c}_g^{(3)}(0) = -1.65$ ,  $\bar{k}_1 = 0.822$ ,  $\bar{c}_g^{(1)}(\bar{k}_1) = 0.308$ ,  $\bar{k}_2 = 1.31$ ,  $\bar{c}_g^{(2)}(\bar{k}_2) = 0.430$ ,  $\bar{k}_3 = 1.21$ ,  $\bar{c}_g^{(3)}(\bar{k}_3) = -0.464$ . Для заданного момента времени  $\bar{t} = 68.62$  координаты волновых фронтов на рис. 7б равны:  $X_0^+ = 203.1$  (находится за пределами графика),  $X_0^- = -113.4$ ,  $X_1 = 21.13$ ,  $X_2 = 29.52$ ,  $X_3 = -31.82$ .

На рис. 8 по аналогии с рис. 5 обозначены время прохождения фронта длинноволновых возмущений  $T_0^\pm$  и время прохождения фронтов  $T_{1,2,3}$ . Эти моменты времени показаны на рис. 8 вер-

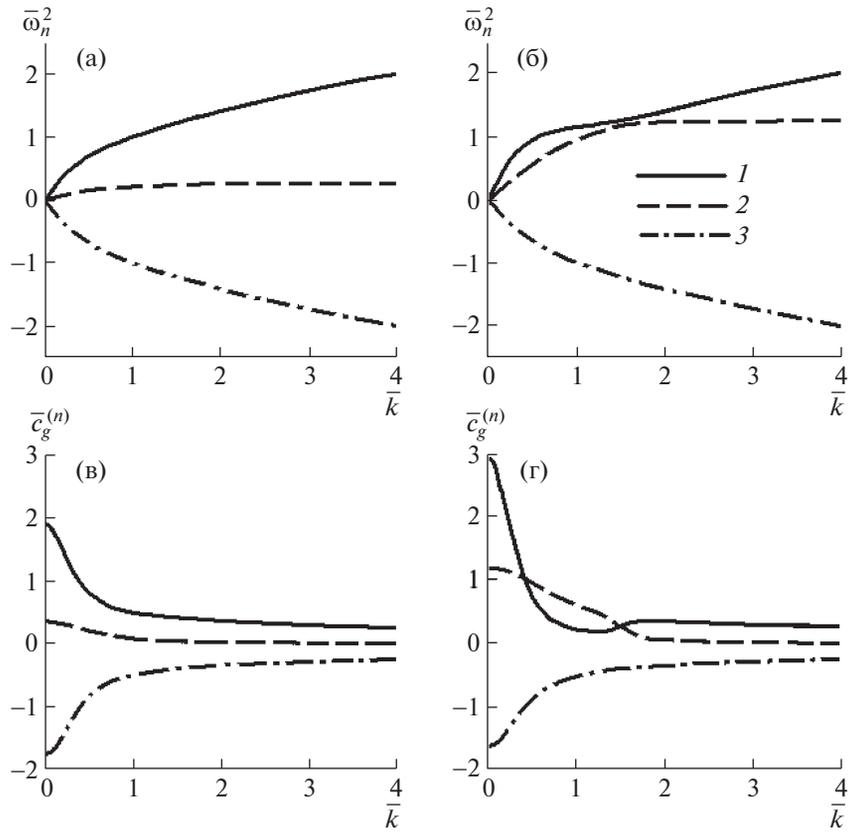


Рис. 6. Дисперсионные зависимости  $\bar{\omega}_n(\bar{k})$  (а, б) и групповые скорости  $\bar{c}_g^{(n)}(\bar{k})$  (в, г) для волновых мод в случае придонного сдвигового слоя при  $\bar{U}_0 = 0.5$  (а, в) и  $\bar{U}_0 = 2.5$  (б, г). Номер кривой соответствует номеру волновой моды.

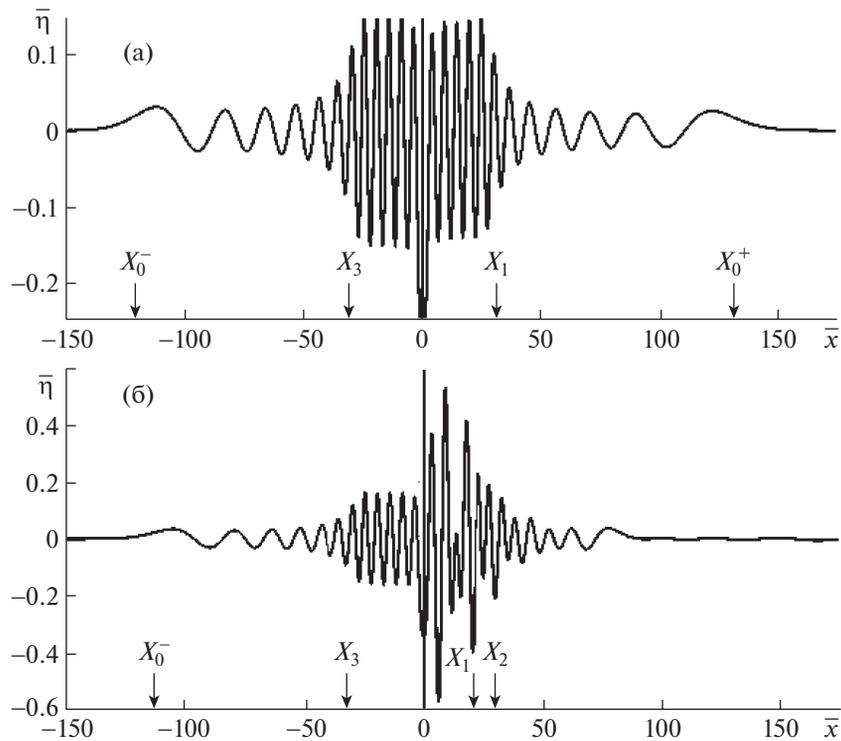
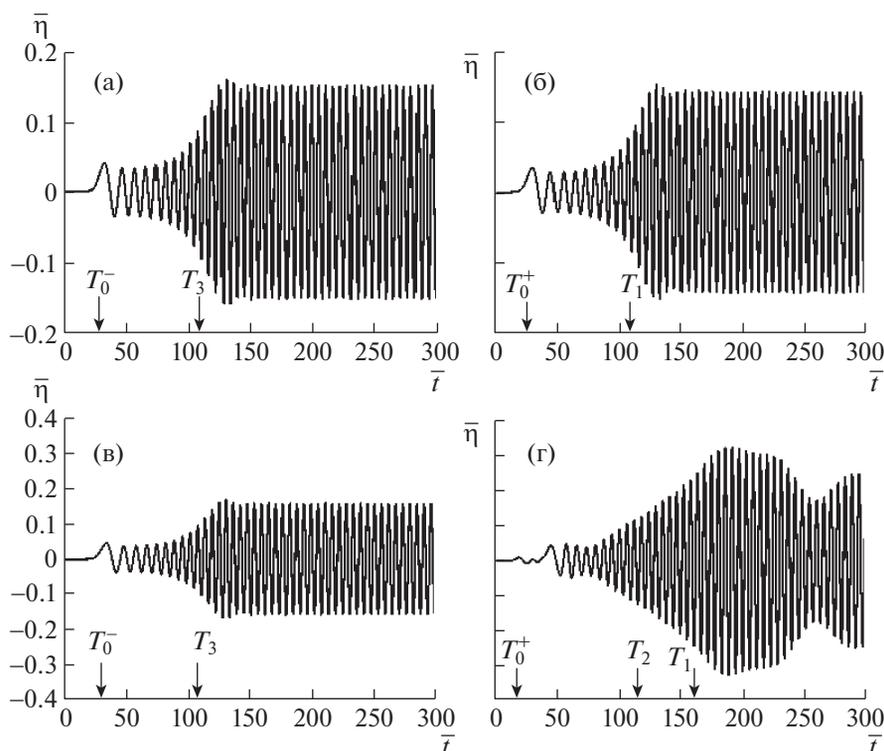


Рис. 7. Возвышения свободной поверхности при  $t = 12$  с: (а,б) –  $\bar{U}_0 = 0.5, 2.5$ . Вертикальные стрелки указывают положения волновых фронтов для различных мод.



**Рис. 8.** Возвышения свободной поверхности в зависимости от времени в фиксированных точках:  $\bar{x} = -50$  (а, в) и  $\bar{x} = 50$  (б, г) для  $\bar{U}_0 = 0.5$  (а, б) и  $\bar{U}_0 = 2.5$  (в, г). Вертикальные стрелки показывают время прохождения волновых фронтов для различных мод.

тикальными стрелками: для рис. 8а  $T_0^- = 28.3$ ,  $T_3 = 108.8$ , для рис. 8б  $T_0^+ = 26.05$ ,  $T_1 = 110.3$ , для рис. 8в  $T_0^- = 30.26$ ,  $T_3 = 107.8$  и для рис. 8г  $T_0^+ = 16.9$ ,  $T_1 = 162.4$ ,  $T_2 = 116.2$ . На рис. 8г заметна модуляция волновых возмущений, так как вторая волновая мода становится сопоставимой с первой модой, что приводит к суперпозиции колебаний с различной длиной волны.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано волновое движение, возникающее при включении пульсирующего источника в жидкости при наличии сдвиговых слоев. В рамках линейной теории волн построено интегральное представление решения, описывающего вертикальные смещения свободной поверхности. Показано, что, как в случае приповерхностного сдвигового слоя, так и в случае придонного слоя, колебания свободной поверхности существенно отличаются от тех, которые имели место при пульсациях источника в изначально покоящейся жидкости [10, 11]. В случае приповерхностного сдвигового слоя волновое движение становится неустойчивым с ростом скорости сдвигового потока. Для придонного сдвигового потока возникает суперпозиция колебаний с различными длинами волн. Это свидетельствует о том, что даже в простых случаях взаимодействие волн и течений приводит к большому разнообразию явлений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wehausen J.V., Laitone E.V. Surface waves. *Handbuch der Physik*. 1960. V. 9. P. 446–778.
2. Сметенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
3. Черкесов Л.В. Гидродинамика волн. Киев: Наук.думка, 1980. 259 с.
4. Peregrine D.H. Interaction of water waves and currents // *Adv. Appl. Mech.* 1976. V. 16. P. 9–117.
5. Jonsson I.G. Wave-current interactions. *The Sea*. 1990. V. 9. P. 65–120.

6. *Букатов А.Е., Власенко В.И., Пухтяр Л.Д., Суворов А.М. и др.* Динамика поверхностных и внутренних волн. Киев: Наук. думка. 1988. 192 с.
7. *Taylor G.* The action of a surface current used as a breakwater // *Proc. Royal Soc. Lond. A.* 1955. V. 231. P. 466–478.
8. *Brevik I.* The stopping of linear gravity waves in currents of uniform vorticity // *Phys. Norv.* 1976. V. 8. № 3. P. 157–162.
9. *Brevik I., Sollie R.* Stable and unstable modes in a wave-current system having uniform vorticity // *Phys. Scr.* 1997. V. 55. P. 639–643.
10. *Павельева Е.Б., Савин А.С.* Установление волн от пульсирующего источника в жидкости конечной глубины // *Изв. РАН. МЖГ.* 2018. № 4. С. 12–22.
11. *Ильичев А.Т., Савин А.С.* Эволюция возмущений свободной поверхности от пульсирующего заглубленного источника в жидкости конечной глубины // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 6. С. 19–24.
12. *Стурова И.В.* Задача Коши–Пуассона для жидкости с ледяным покровом при наличии сдвигового течения (двумерный случай) // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 1. С. 47–56.
13. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.