

УДК 532.59:539.3

ДВИЖЕНИЕ НАГРУЗКИ ПО ЛЕДЯНОМУ ПОКРОВУ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕЧЕНИЯ СО СДВИГОМ СКОРОСТИ

© 2023 г. Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 22.06.2022 г.

После доработки 20.12.2022 г.

Принята к публикации 20.12.2022 г.

Исследовано поведение ледяного покрова на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины под действием движущейся прямолинейно с постоянной скоростью области давления при наличии потока со сдвигом скорости. Течение жидкости не потенциально. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной с учетом равномерного сжатия. Движение нагрузки может происходить под произвольным углом к направлению течения. Предполагается, что в системе координат, движущейся вместе с нагрузкой, прогиб льда является установившимся. Использован метод преобразования Фурье в рамках линейной теории волн. Исследованы критические скорости и прогиб ледяного покрова в зависимости от градиента скорости течения, направления движения и коэффициента сжатия.

Ключевые слова: тонкая упругая плавающая пластина, изгибно-гравитационные волны, сдвиг скорости, движущаяся нагрузка, критическая скорость

DOI: 10.31857/S0568528123700044, **EDN:** NTTSET

Ледяной покров на поверхности рек, озер, морей и океана часто используется для создания дорог, взлетных полос, причалов и плавающих платформ для разведочного бурения. Для безопасности работ на льду необходимо изучать закономерности его поведения при механическом воздействии.

В настоящее время задача о поведении ледяного покрова под действием прямолинейно движущейся нагрузки изучена достаточно хорошо при ее стационарном и нестационарном движении. Имеется значительное число работ о действии различных физических факторов на характер распространения изгибно-гравитационных волн в плавающем ледяном покрове [1–9]. Однако влияние течения со сдвигом скорости изучено недостаточно. Имеется несколько работ на эту тему [10–15], в которых рассмотрена двумерная задача для линейного профиля скорости течения. В этом случае возмущения в жидкости носят потенциальный характер. Достаточно хорошо изучено воздействие сдвига скорости течения на поверхностные волны (см. [16–23] и имеющуюся в них библиографию). В трехмерном случае возмущения не потенциальны, носят вихревой характер [23].

Задача о влиянии сдвигового течения на изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове в трехмерной постановке находится на начальной стадии изучения. В [24] исследована трехмерная начально-краевая задача о поведении ледяного покрова под действием импульсной и периодической нагрузки осесимметричного вида при наличии сдвигового потока. В работе [25] решена задача Коши–Пуассона для случая, когда имеются линейный сдвиг скорости по двум направлениям и неравномерное сжатие ледяного покрова.

В настоящей работе приведено решение задачи о поведении плавающего ледяного покрова под действием прямолинейно с постоянной скоростью движущейся нагрузки при наличии течения с линейным сдвигом скорости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается бесконечный ледяной покров, плывущий на поверхности потока идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H с вертикальным сдвигом скорости. Ледяной покров моделируется упругой бесконечной пластиной постоянной толщины. В подвижной декартовой системе координат $Oxuz$, связанной с пластиной, с центром O на верхней границе жидко-

сти, осью Ox , направленной противоположно основному течению и осью Oz , направленной вертикально вверх, вектор скорости жидкости можно представить в виде

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = (U(z) + u, v, w), \quad U(z) = \gamma z$$

где γ – константа, основное течение жидкости $U(z)$ не потенциально, имеет постоянную завихренность, u, v, w – возмущенные компоненты скорости, малые по сравнению с основным течением. Предполагается, что заданное внешнее давление p_0 равномерно распределено по прямоугольной области шириной $2b$ и длиной $2a$. Область давления движется с постоянной скоростью V под углом ψ к оси Ox . Давление внешней нагрузки равно $p_0 = gM/(4ab)$, где M – масса движущегося тела, g – ускорение свободного падения. Данная нагрузка моделирует судно на воздушной подушке.

Рассмотрим движение жидкости. Скорость течения жидкости удовлетворяет уравнениям Эйлера и неразрывности

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P/\rho - g\mathbf{i}_z, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$P = -\rho gz + p$$

Здесь d/dt – полная производная по времени, P – гидродинамическое давление, которое складывается из гидростатической части и возмущенного гидродинамического давления p , ρ – плотность жидкости, \mathbf{i}_z – единичный орт оси Oz . Прогиб ледяного покрова $\eta(x, y, t)$ описывается уравнением изгиба тонких упругих пластин Кирхгофа-Лява

$$D\Delta^2\eta + Q\Delta\eta + \rho_0 h d^2\eta/dt^2 = -\rho g\eta + p(x, y, 0, t) - p_0(x, y, t), \quad (1.2)$$

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

где D – цилиндрическая жесткость пластины, E – модуль Юнга, ρ_0, h – плотность и толщина льда, ν – коэффициент Пуассона, Q – сжимающие усилия в пластине.

Ставятся граничные условия: условие непротекания на дне

$$w(x, y, -H, t) = 0 \quad (1.3)$$

а на верхней границе жидкости кинематическое условие

$$w(x, y, 0, t) = d\eta/dt \quad (1.4)$$

и динамическое условие (1.2). Условие излучения ставится в следующем виде: перед нагрузкой распространяются только те волны, групповая скорость которых больше скорости нагрузки.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение строится аналогично работе [21]. Введем безразмерные переменные, параметры и функции по формулам

$$(x', y', z', H', b') = (x, y, z, H, b)/a, \quad t' = t\sqrt{g/a}$$

$$F = \frac{V}{\sqrt{ag}}, \quad S = \gamma\sqrt{a/g}, \quad \beta = \frac{D}{\rho ga^4}, \quad q = \frac{Q}{\rho ga^2}, \quad \chi = \frac{\rho_0 h}{\rho a}$$

$$(U', u', v', w') = (U, u, v, w)/\sqrt{ag}, \quad \eta' = \eta/a, \quad (p', p'_0) = (p, p_0)/(\rho ga)$$

Штрихи далее опускаем. Поскольку мы ищем стационарное решение в системе координат, движущейся вместе с нагрузкой, то в исходной системе координат, связанной с ледяной пластиной, возмущенные скорости движения жидкости имеют вид

$$(u, v, w) = (u(\mathbf{r}_1, z), v(\mathbf{r}_1, z), w(\mathbf{r}_1, z)), \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{F}t$$

$$\mathbf{r} = (x, y), \quad \mathbf{F} = (F \cos \psi, F \sin \psi)$$

В предположении малости возмущенных скоростей по сравнению с основным течением уравнения (1.1) линеаризуются. Применяем преобразование Фурье по переменным x, y . Известные функции u, v, w, η, p ищем в виде

$$(u, v, w)(\mathbf{r}_1, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})(\mathbf{k}, z) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} dk_x dk_y, \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y),$$

$$\eta(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \bar{\eta}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} dk_x dk_y$$

$$p(\mathbf{r}_1, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \bar{p}(\mathbf{k}, z) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} dk_x dk_y$$

Функцию $p_0(\mathbf{r}_1)$ также представим в виде

$$p_0(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \bar{p}_0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} dk_x dk_y$$

Тогда из системы уравнений (1.1) получаем

$$\begin{aligned} i(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F})\bar{u} + S\bar{w} &= -ik_x \bar{p} \\ i(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F})\bar{v} &= -ik_y \bar{p} \\ i(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F})\bar{w} &= -\bar{p}_z \\ ik_x \bar{u} + ik_y \bar{v} + \bar{w}_z &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Умножим первое уравнение на ik_x , второе уравнение на ik_y и сложим. С помощью четвертого уравнения находим

$$-i(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F}) \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + ik_x S \bar{w} = k^2 \bar{p}, \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \tag{2.2}$$

Дифференцируем по z и получаем с учетом третьего уравнения

$$i(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F}) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} - k^2 \bar{w} \right) = 0$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} - k^2 \bar{w} = 0 \tag{2.3}$$

Решение уравнения (2.3) с условием (1.3) на дне записывается в виде

$$\bar{w}(\mathbf{k}, z) = kA(\mathbf{k}) \operatorname{sh}k(z + H)$$

Подставляем это выражение в уравнения (2.1), (2.2) и находим остальные компоненты скорости и давление

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{k}, z) &= iA(\mathbf{k}) \left(k_x \operatorname{ch}k(H + z) + \frac{Sk_y^2 \operatorname{sh}k(z + H)}{k(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F})} \right) \\ \bar{v}(\mathbf{k}, z) &= iA(\mathbf{k}) \left(k_y \operatorname{ch}k(H + z) - \frac{Sk_x k_y \operatorname{sh}k(z + H)}{k(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F})} \right) \\ \bar{p}(\mathbf{k}, z) &= -i(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F})A(\mathbf{k}) \operatorname{ch}k(H + z) + ik_x SA(\mathbf{k}) \operatorname{sh}k(H + z)/k \end{aligned}$$

Из условия (1.4) следует

$$-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{F} \bar{\eta} = kA(\mathbf{k}) \operatorname{sh}kH$$

Тогда уравнение движения пластины (1.2) записывается в виде

$$[\beta k^4 - qk^2 + 1 - \chi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2 - k_x S(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})/k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2 \operatorname{cth}kH/k] \bar{\eta} = -\bar{p}_0$$

С помощью обратного преобразования Фурье находим

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{r}_1) &= \frac{-1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} k \operatorname{th}kH dk_x dk_y}{[(\beta k^4 - qk^2 + 1 - \chi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2)k - Sk_x(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F}/k)] \operatorname{th}kH - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2} = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi/0}^{\pi} \int_{-\pi/0}^{\pi} \frac{\bar{p}_0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} k^2 \operatorname{th}kH dk d\alpha}{[(\beta k^4 - qk^2 + 1 - \chi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2)k - S \cos \alpha(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})] \operatorname{th}kH - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

где (k, α) – полярные координаты в k -плоскости.

Для того, чтобы картина волн была стационарна, компонента скорости источника, нормальная к гребню волны, должна быть равна фазовой скорости гребня [1]. В размерных переменных получаем $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})/k = \omega/k$. Поэтому функция в знаменателе формулы (2.4) представляет собой дисперсионное соотношение изгибно-гравитационных волн в ледяной пластине, вызванных движением нагрузки, при наличии течения со сдвигом скорости, где ω заменено на $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})$.

Теперь удобно перейти в систему координат Ox_1y_1z , движущуюся вместе с нагрузкой, повернутую относительно исходной системы координат на угол ψ , с осью Ox_1 , направленной вдоль линии движения, осью Oy_1 – перпендикулярной к ней. В этой системе координат получаем

$$\begin{aligned} \sigma &= \alpha - \psi, \quad \bar{p}_0(\mathbf{k}) = 4p_0 \frac{\sin(k \cos \sigma) \sin(kb \sin \sigma)}{k^2 \cos \sigma \sin \sigma} \\ \eta(x_1, y_1) &= -\frac{p_0}{\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f_1(k, \sigma)}{f(k, \sigma)} e^{ik(x_1 \cos \sigma + y_1 \sin \sigma)} dk d\sigma \\ f(k, \sigma) &= [\beta k^4 - qk^2 + 1 - \chi F^2 F^2 \cos^2 \sigma - SF \cos(\sigma + \psi) \cos \sigma] \text{th} k H - k F^2 \cos^2 \sigma \\ f_1(k, \sigma) &= \frac{\sin(k \cos \sigma) \sin(kb \sin \sigma) \text{th} k H}{k \sin \sigma \cos \sigma} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из полученных ранее результатов в отсутствие течения известно, что существует критическое значение скорости, равное минимальной фазовой скорости изгибно-гравитационных волн. При скорости движения нагрузки, меньшей критической, волны в ледяном покрове не образуются, деформации льда носят локальный характер вблизи области нагрузки. При наличии течения со сдвигом скорости также существует критическая скорость и находится аналогично работе [4]. Преобразуем уравнение $f(k, \sigma) = 0$ к виду

$$\begin{aligned} [2(\beta k^4 - qk^2 + 1) - \chi F^2 k^2 (1 + \cos 2\sigma) - SF \cos \psi (1 + \cos 2\sigma) + SF \sin \psi \sin 2\sigma] \text{th} k H - \\ - k F^2 (1 + \cos 2\sigma) = G(k, \psi) - \cos 2\sigma [F^2 k (1 + \chi k \text{th} k H) + SF \text{th} k H \cos \psi] + SF \text{th} k H \sin \psi \sin 2\sigma = 0 \quad (2.6) \\ G(k, \psi) = [2(\beta k^4 - qk^2 + 1) - \chi F^2 k^2 - SF \cos \psi] \text{th} k H - F^2 k \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \varphi &= \arcsin \left(\frac{SF \text{th} k H \sin \psi}{B(k, \psi)} \right) \\ B(k, \psi) &= \sqrt{S^2 F^2 \text{th}^2 k H \sin^2 \psi + (F^2 k (1 + \chi k \text{th} k H) + SF \text{th} k H \cos \psi)^2} \end{aligned}$$

Тогда (2.6) можно записать в виде

$$G(k, \psi) - B(k, \psi) \cos(2\sigma + \varphi) = 0$$

Отсюда находим

$$\cos(2\sigma + \varphi) = \frac{G(k, \psi)}{B(k, \psi)} \quad (2.7)$$

Чтобы решение существовало, необходимо, чтобы

$$\left| \frac{G(k, \psi)}{B(k, \psi)} \right| \leq 1$$

Возводим в квадрат, преобразуем и в результате получаем: критическое значение числа Фруда F_* определяется как минимум функции $\Phi(k)$

$$\Phi(k) = 2d(k) \frac{\sqrt{S^2 \text{th}^2 k H + 4d(k)d_1(k)\text{th} k H - S \text{th} k H \cos \psi}}{S^2 \text{th}^2 k H \sin^2 \psi + 4d(k)d_1(k)}$$

$$d(k) = \beta k^4 - qk^2 + 1, \quad d_1(k) = k(1 + \chi k \text{th} k H)$$

$$F_* = \Phi(k_*), \quad \Phi'(k_*) = 0$$

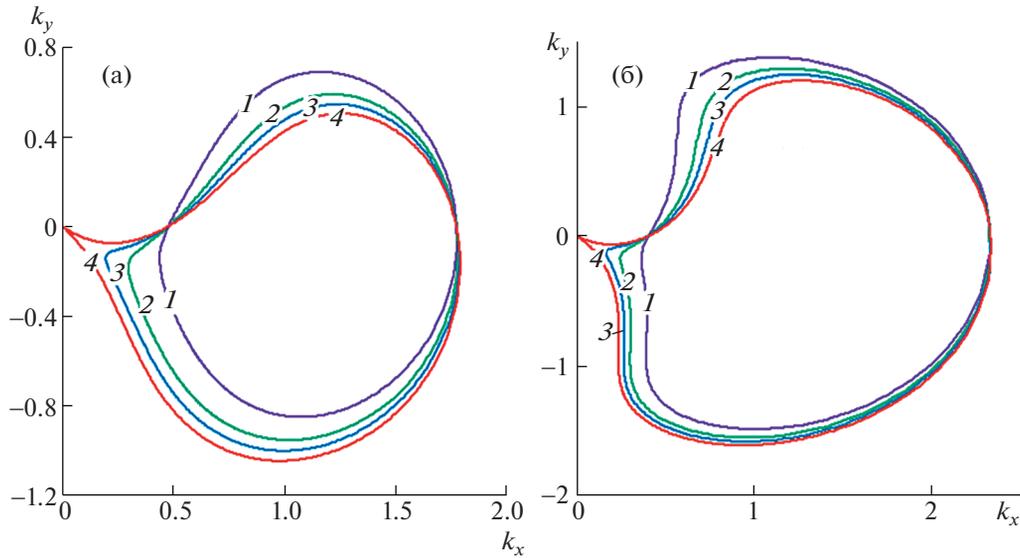


Рис. 1. Кривые волновых чисел C_k при $\psi = \pi/2$ в случаях отсутствия сжатия $\bar{Q} = 0$ (а) и $\bar{Q} = 1.5$ (б): 1–4 – $S = 0.3, 0.7, 0.9, 1.1$.

При $F > F_*$ функция $f(k, \sigma)$ имеет нули $k_1 = k_1(\sigma)$ и $k_2 = k_2(\sigma)$, $k_1 < k_2$ в некоторых областях значений угла σ . Поэтому при этих значениях угла σ интеграл по k в выражении (2.5) является интегралом в смысле главного значения. Контур интегрирования деформируется таким образом, чтобы выполнить условие излучения. Известно, что групповая скорость изгибно-гравитационных волн больше их фазовой скорости для коротких волн и меньше для длинных волн. Короткие волны соответствуют упругой ветви дисперсионной кривой, а длинные волны – гравитационной ветви. Поэтому при $\cos \sigma > 0$ корень k_1 обходится сверху, а корень k_2 – снизу, при $\cos \sigma < 0$ – наоборот.

Картини гребней изгибно-гравитационных волн в дальнем поле строятся с помощью асимптотических методов аналогично тому, как в случае отсутствия течения [1, 26]. Положения гребней волн в дальнем поле определяются с помощью кривой волновых чисел C_k в k -плоскости, удовлетворяющей уравнению $f(k, \sigma) = 0$. Кривые C_k удобно строить с помощью формулы (2.7). Примеры вида кривых C_k изображены на рис. 1 при $\psi = \pi/2$, $S = 0.3, 0.7, 0.9, 1.1$, в случаях отсутствия сжатия $Q = 0$ (а) и $Q/\sqrt{\rho g D} = 1.5$ (б).

Стационарная картина волн содержит только те волны, волновые числа которых лежат на кривой C_k . Из любой точки $P_0 = (k_0, \sigma_0)$ на C_k волны излучаются в направлении, нормальном к C_k и соответствующем возрастанию ω . Вертикальное смещение ледяного покрова η в дальнем поле от этой точки выражается формулой

$$\eta(\mathbf{r}_1) \approx -\frac{f_1(k_0, \sigma_0)}{2\pi} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial n} \right)_{P_0} \right]^{-1} \left(\frac{2\pi}{\kappa_0 r_1} \right)^{1/2} e^{i(k_0 r_1 \cos(\sigma_0 - \theta) + \mu)} \quad (2.8)$$

Здесь $\mathbf{r}_1 = (r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta)$; κ_0 – величина кривизны кривой C_k в точке P_0 ; $\partial/\partial n$ – дифференцирование по нормали к C_k , соответствующей возрастанию ω ; $\mu = \pi/4$, если кривая C_k выпукла в этой точке и $3\pi/4$ в противном случае. Гребни волн являются линиями постоянной фазы $k_0 r_1 \cos(\sigma_0 - \theta) = K$, K – константа. Таким образом, каждой точке P_0 на C_k соответствует точка на волновом гребне с полярными координатами в (x_1, y_1) -плоскости

$$\left(\frac{K}{k_0 \cos(\sigma_0 - \theta)}, \theta \right)$$

Если кривая волновых чисел C_k имеет точку перегиба, то соответствующая линия распространения волны L является каустикой, и линии гребней имеют заострения в точке их пересечения с линией L [1, 26]. В точке перегиба константа K меняется скачком, так как меняется сдвиг фазы μ в формуле (2.8).

С ростом параметра S кривая C_k приближается к началу координат в k -плоскости. При $S > S_*$ кривая C_k проходит через начало координат, где критическое значение параметра S_* находится из условия

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left| \frac{G(k, \psi)}{B(k, \psi)} \right| - 1 = 0$$

При $S = S_*$ касательные к верхней и нижней ветвям кривой C_k при $k = 0$ совпадают. При $S > S_*$ касательные к кривой C_k в начале координат составляют некоторый угол с k_x -осью. Существует область за нагрузкой, в которой волны не распространяются, так как нет нормалей к кривой C_k в этих направлениях.

Из формулы (2.8) следует, что амплитуда волн в дальнем поле в общем случае порядка $O(r^{-1/2})$ и пропорциональна $\kappa_0^{-1/2}$. Таким образом, относительно плоские участки кривой C_k с малой кривизной дают большие амплитуды волн в соответствующих направлениях, поскольку все точки этого участка кривой C_k излучают волны примерно в одном направлении [1]. Из рис. 1 видно, что в случае $Q = 0$ такие направления находятся за нагрузкой под некоторым углом к оси Ox . В случае $Q/\sqrt{\rho g D} = 1.5$ такие участки дают большие амплитуды в отрицательной части оси Ox , если $S < S_*$. Асимптотика амплитуд изгибно-гравитационных волн в дальнем поле в каустических направлениях дана в работе [1].

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные расчеты проводились для ледяного покрова при следующих входных параметрах задачи: $E = 5$ ГПа, $\rho = 1025$ кг/м³, $\rho_0 = 922.5$ кг/м³, $\nu = 0.3$, $a = 20$ м, $b = 10$ м, толщина льда $h = 1$ м, глубина жидкости $H = 100$ м, скорость движения нагрузки $V = 20$ м/с. Сжимающие усилия в пластине заданы в виде $Q = \bar{Q}\sqrt{\rho g D}$, $\bar{Q} = 0$ и 1.5.

На рис. 2 приведены зависимости критических скоростей изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове от направления движения нагрузки при различных значениях параметра сдвига S и $\bar{Q} = 0, 1.5$. Из графиков видно, что минимальные критические скорости достигаются при $\psi = 0$, когда нагрузка движется противоположно течению жидкости. Максимальные критические скорости наблюдаются при $\psi = \pi$, когда нагрузка движется по течению. При $\psi = \pi/2$ критическая скорость при любых значениях параметра S близка к ее значению в отсутствие течения. При увеличении коэффициента сжатия льда критические скорости значительно уменьшаются. Видно, что сдвиг скорости, направление движения и коэффициент сжатия льда оказывают существенное влияние на критические скорости изгибно-гравитационных волн.

На рис. 3а показаны зависимости прогиба ледяного покрова вдоль линии движения нагрузки $\eta(x_1, 0)$ от координаты x_1 в отсутствие сжатия $\bar{Q} = 0$ при $S = 0$, а также $S = 0.4$ и $\psi = 0, \pi$. При наличии сдвига скорости и $\psi = 0$ нагрузка движется против течения, при этом волны перед нагрузкой укорачиваются, встречая сопротивление, а волны за нагрузкой удлиняются, что объясняется двумя причинами. С одной стороны, они сносятся потоком. С другой стороны, выполаживание волн за нагрузкой для изгибно-гравитационных волн при увеличении разности между скоростью нагрузки и критической скоростью наблюдается и в отсутствие течения [1]. При $\psi = \pi$ нагрузка движется по течению, в этом случае волны перед нагрузкой удлиняются, а после нагрузки укорачиваются, амплитуды волн значительно выше, чем в предыдущих случаях, т.к. скорость движения нагрузки ближе к критической скорости.

На рис. 3б приведены зависимости прогиба ледяного покрова на линии движения от координаты x_1 в отсутствие течения $S = 0$, при $\bar{Q} = 0$ и $\bar{Q} = 1.5$. Видно, что при увеличении коэффициента сжатия льда прогиб за нагрузкой значительно увеличивается, а перед нагрузкой уменьшается.

На рис. 4 изображены картины гребней изгибно-гравитационных волн при $\bar{Q} = 0$, $\psi = 0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$ и различных значений параметра сдвига S . При $\psi = 0$ изменение картин волновых гребней аналогично тому, как меняются картины гребней при увеличении скорости нагрузки в

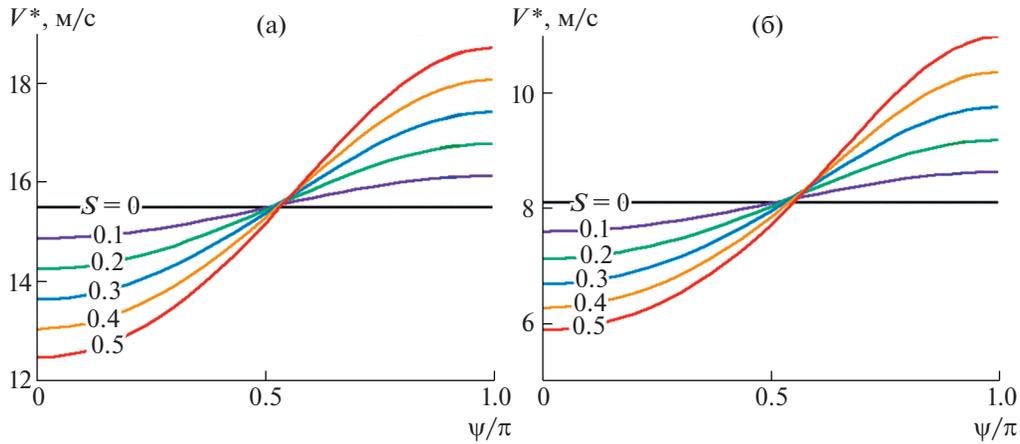


Рис. 2. Критические скорости изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове при $h = 1$ м и различных значениях параметра сдвига S : а, б – $\bar{Q} = 0, 1.5$.

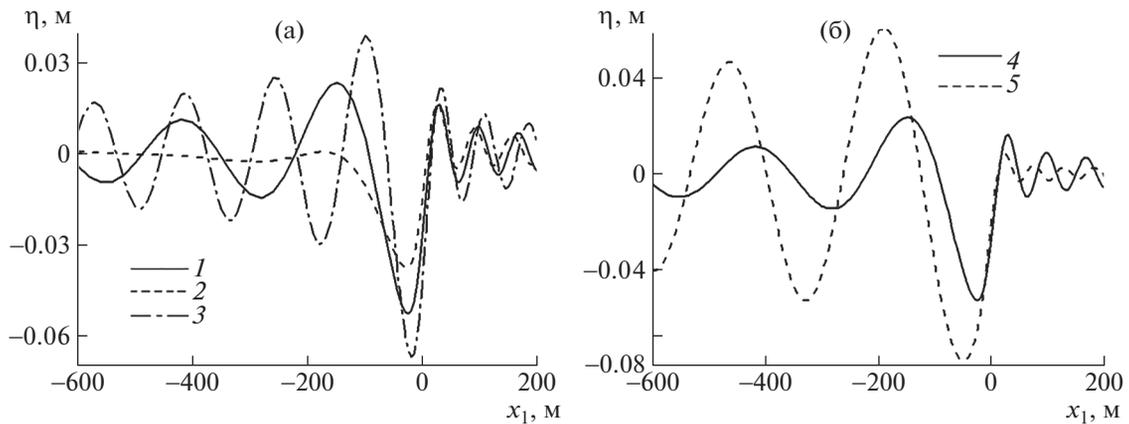


Рис. 3. Зависимость прогиба ледяного покрова от координаты x_1 : (а) – $\bar{Q} = 0, 1 - S = 0, 2, 3 - (S, \psi) = (0.4, 0), (0.4, \pi)$; (б) – $S = 0, 4, 5 - \bar{Q} = 0, 1.5$.

отсутствие течения [1]. При увеличении параметра S волны за нагрузкой становятся длиннее, амплитуда их меньше, появляются каустики и заострения. При $S > S_*$ кривая S_k проходит через начало координат, и волн за нагрузкой нет. Этому случаю соответствуют картины волновых гребней в крайнем правом столбце рис. 4 при $\psi < 2\pi/3$.

При $\psi = \pi/6$ картины волновых гребней аналогичны картинам при $\psi = 0$ при тех же значениях параметра S , но симметрия слегка нарушена. При дальнейшем увеличении угла ψ симметрия нарушается еще сильнее. Например при $\psi = \pi/3, S = 0.4$ и $\psi = \pi/2, S = 0.7$ заострения наблюдаются только при $y_1 > 0$.

При фиксированном значении угла $\psi \neq 0, \pi$ симметрия сильнее нарушается с ростом параметра S . С увеличением угла ψ критическая скорость изгибно-гравитационных волн растет, разница между скоростью нагрузки и критической уменьшается. Поэтому при $\psi = 2\pi/3$ каустики и заострения линий гребней наблюдаются только при больших значениях параметра S .

На рис. 5 представлены трехмерные графики прогиба ледяного покрова в ближнем поле при $\bar{Q} = 0$ и различных значениях угла ψ и параметра сдвига S . При $\psi = 0$ и $S = 0.4$ (рис. 5а) волны за нагрузкой очень длинные и малой амплитуды, близкой к нулю. При $\psi = \pi/3$ и $S = 0.4$ (рис. 5б) волны за нагрузкой длинные, симметрия нарушена. На рис. 5в ($\psi = \pi/3, S = 0.4$) и 5г ($\psi = 2\pi/3, S = 1$) волновое движение ярко выражено во всех областях.

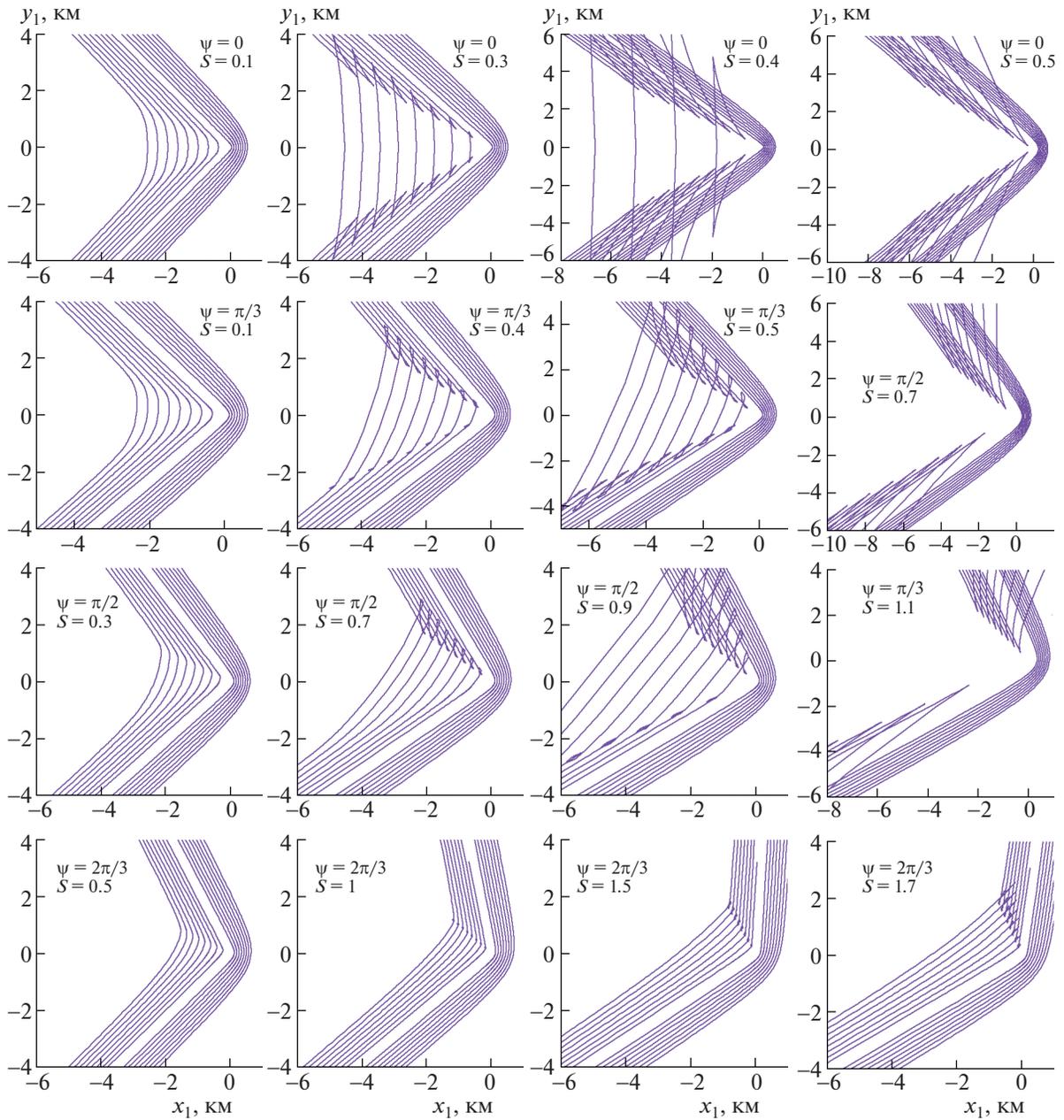


Рис. 4. Картины гребней изгибно-гравитационных волн в дальнем поле при $\bar{Q} = 0$, $\psi = 0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$ и различных значениях параметра S .

Как указано выше, сжатие льда оказывает сильное влияние на критические скорости изгибно-гравитационных волн, при $\bar{Q} = 1.5$ они почти в два раза меньше, чем при $\bar{Q} = 0$. Скорость на грузки $V = 20$ м/с значительно выше критических скоростей при $\bar{Q} = 1.5$, и гребни изгибно-гравитационных волн имеют заострения и каустики даже для $S = 0$. Если скорость на грузки уменьшить, например, до $V = 12$ м/с, то картины гребней волн в дальнем поле будут похожи на те, что при $\bar{Q} = 0$.

Картина волновых гребней в дальнем поле (а) и прогиб ледяного покрова в ближнем поле (б) при $\bar{Q} = 1.5$, $V = 20$ м/с, $\psi = 0$, $S = 0.1$ изображены на рис. 6. Трехмерные графики ледяного покрова при $\bar{Q} = 1.5$, $V = 20$ м/с и различных значениях параметров ψ и $S < S_*$ визуально типичны

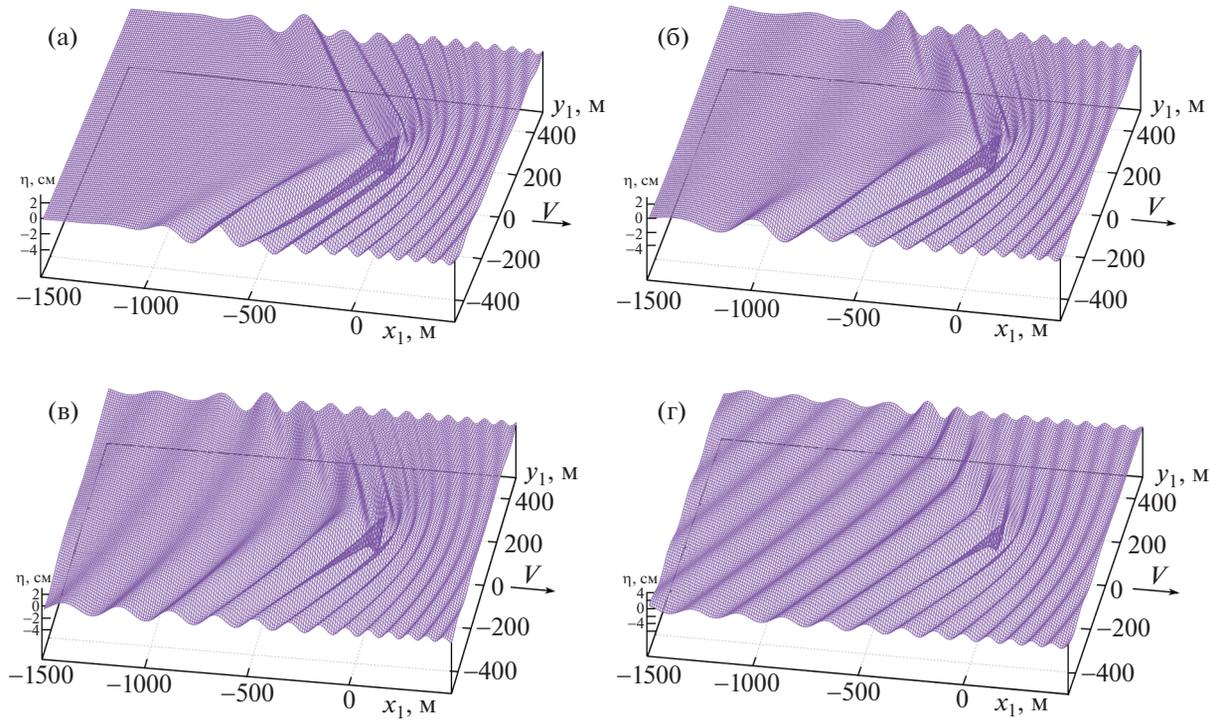


Рис. 5. Вертикальные смещения ледяного покрова при $\bar{Q} = 0$: (а–г) – $(S, \psi) = (0.4, 0), (0.4, \pi/3), (0.4, \pi/2), (1, 2\pi/3)$.

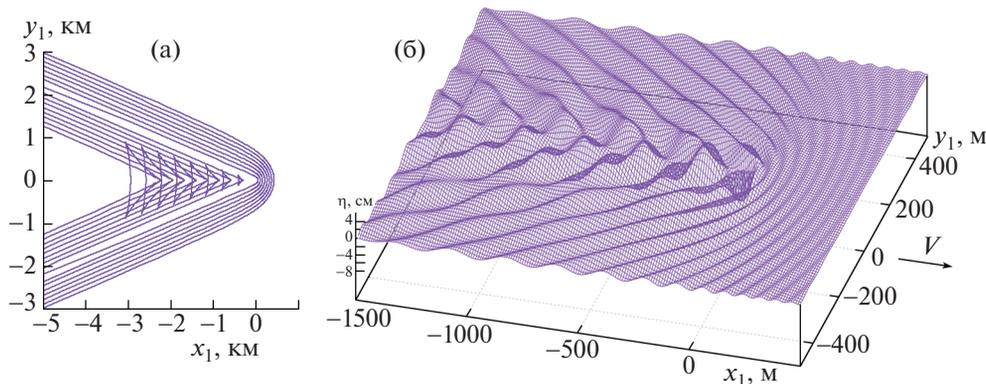


Рис. 6. Картина гребней изгибно-гравитационных волн в дальнем поле (а) и вертикальные смещения ледяного покрова в ближнем поле (б) при $\bar{Q} = 1.5, \psi = 0, S = 0.1$.

и похожи на тот, который изображен на рис. 6б. Амплитуды прогиба ледяного покрова значительно выше, чем при отсутствии сжатия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано влияние сдвига скорости жидкости на стационарные изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове при равномерном прямолинейном движении нагрузки под произвольным углом к направлению течения с учетом однородного сжатия льда. Поле скоростей жидкости не потенциально. Показано, что сдвиг скорости, направление движения нагрузки и коэффициент сжатия льда оказывают существенное влияние на критические скорости изгибно-гравитационных волн и прогиб ледяного покрова. Максимальные критические скорости наблюдаются в тех случаях, когда нагрузка движется по течению. При увеличении коэффициента сжатия льда критические скорости значительно уменьшаются.

Если нагрузка движется против течения, то волны перед нагрузкой укорачиваются, встречая сопротивление, а волны за нагрузкой удлиняются. Если нагрузка движется по течению, то волны перед нагрузкой удлиняются, а за нагрузкой укорачиваются, и амплитуды волн значительно выше, чем в предыдущем случае. При увеличении коэффициента сжатия амплитуды прогиба льда значительно увеличиваются за нагрузкой и уменьшаются перед нагрузкой. Увеличение параметра сдвига S оказывает качественно такое же влияние, как увеличение скорости движения нагрузки. Картины гребней изгибно-гравитационных волн имеют такой же характер, что и в отсутствие течения, но симметрия нарушена при боковом натекании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davys J.W., Hosking R.I., Sneyd A.D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate // J. Fluid Mech. 1985. V. 158. P. 269–287.
2. Schulkes R.M.S.M., Hosking R.J., Sneyd A.D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. Pt 2 // J. Fluid Mech. 1987. V. 180. P. 297–318.
3. Milinazzo F., Shinbrot M., Evans N.W. A mathematical analysis of the steady response of floating ice to the uniform motion of a rectangle load // J. Fluid Mech. 1995. V. 287. P. 173–197.
4. Букатов А.Е., Жарков В.В., Завьялов Д.Д. Трехмерные изгибно-гравитационные волны при неравномерном сжатии // ПМТФ. 1991. № 6. С. 51–57.
5. Жесткая В.Д., Козин В.М. Исследования напряженно-деформированного состояния полубесконечного ледяного покрова под действием движущейся нагрузки // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 112–117.
6. Squire V.A. Moving Loads on Ice Plates / V.A. Squire, R.J. Hosking, A.D. Kerr, et al. Dordrecht: Kluwer, 1996.
7. Yeung R.W., Kim J.W. Effects of a translating load on a floating plate-structural drag and plate deformation // J. Fluids Structures. 2000. V. 14. № 7. P. 993–1011.
8. Nugroho W.S., Wang K., Hosking R.J., Milinazzo F. Time-dependent response of a floating flexible plate to an impulsively started steadily moving load // J. Fluid Mech. 1999. V. 381. P. 337–355.
9. Погорелова А.В., Козин В.М., Матюшина А.А. Исследование напряженно-деформируемого состояния ледяного покрова при взлете и посадке на него самолета // ПМТФ. 2015. Т. 56. № 5. С. 214–221.
10. Букатов А.Е., Мордашев В.И. Влияние продольно сжатой упругой пластинки на развитие волнового возмущения потока однородной жидкости с вертикальным сдвигом скорости // ПМТФ. 1981. № 1. С. 122–129.
11. Суворов А.М. Развитие колебаний ледяного покрова в море при наличии горизонтального течения со сдвигом скорости // Поверхностные и внутренние волны. Севастополь: МГИ АН УССР. 1979. С. 63–69.
12. Суворов А.М., Черкесов Л.В. Нестационарные вынужденные колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности потока жидкости со сдвигом скорости // Прикладная механика. 1980. № 5. С. 102–106.
13. Букатов А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. Морской гидрофизический институт РАН. Севастополь. 2017. 357 с.
14. Das S., Kar P., Sahoo T., Meylan M.H. Flexural-gravity wave motion in the presence of shear current: Wave blocking and negative energy waves // Phys. Fluids. 2018. V. 30. 106606. <https://doi.org/10.1063/1.5052228>
15. Стурова И.В. Задача Коши–Пуассона для жидкости под ледяным покровом при наличии сдвигового течения (двумерный случай) // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 1. С. 47–56.
16. Суворов А.М., Тананаев А.Н., Черкесов Л.В. Нестационарные пространственные волны в потоке однородной жидкости со сдвигом скорости. Севастополь: МГИ АН УССР. 1979. С. 14–21.
17. Санников В.Ф. Корабельные волны в однородном море с линейным профилем скорости по глубине // Поверхностные и внутренние волны. Севастополь: МГИ АН УССР. 1979. С. 22–31.
18. Суворов А.М., Черкесов Л.В. Волны от поверхностных возмущений в потоке стратифицированной жидкости со сдвигом скорости // Поверхностные и внутренние волны. Севастополь: МГИ АН УССР. 1979. С. 128–138.
19. Ellingsen S.A. Initial surface disturbance on shear current: The Cauchy-Poisson problem with a twist // Phys. Fluids. 2014. V. 26. 082104.
20. Li Y., Ellingsen S.A. Initial Value Problems for Water Waves in the Presence of a Shear Current // Proc. 25-th Intern. Ocean and Polar Engng Conf. 2015. Kona. Big Island. Hawaii. USA. June 21–26 2015. P. 543–549.
21. Ellingsen S.A. Ship waves in the presence of uniform vorticity // J. Fluid Mech. 2014. V. 742. R2. <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.28>
22. Li Y., Ellingsen S.A. Ship waves on uniform shear current at finite depth: wave resistance and critical velocity // J. Fluid Mech. 2016. V. 791. P. 539–567.
23. Ellingsen S.A. Oblique waves on a vertical sheared current are rotational // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2016. V. 56. P. 156–160.
24. Ткачева Л.А. Начально-краевая задача о поведении ледяного покрова под действием нагрузки при наличии сдвигового потока // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 2. С. 66–76.
25. Стурова И.В. Задача Коши–Пуассона для жидкости со сдвиговым течением и неравномерно сжатым ледяным покровом // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 4. С. 69–76.
26. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Изд-во Мир. 1981.