

УДК 532.546

## ФИЛЬТРАЦИЯ ФЛЮИДА К СКВАЖИНЕ ЧЕРЕЗ РАДИАЛЬНУЮ ТРЕЩИНУ ГРП ПРИ ПОСТОЯННОМ РАСХОДЕ

© 2023 г. Е. П. Аносова<sup>a,\*</sup>, З. М. Нагаева<sup>a,b,\*\*</sup>, В. Ш. Шагапов<sup>b,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия

<sup>b</sup>Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия

\*E-mail: ae0809@mail.ru

\*\*E-mail: Nagaeva\_Zilya@mail.ru

\*\*\*E-mail: Shagapov@rambler.ru

Поступила в редакцию 28.09.2022 г.

После доработки 31.10.2022 г.

Принята к публикации 10.11.2022 г.

Рассматривается задача об отборе жидкости из пласта в скважину или закачке жидкости из скважины в пласт при наличии трещины ГРП, перпендикулярной стволу скважины, в режиме постоянного расхода. Получены аналитические решения, описывающие эволюцию давления в трещине при постоянном расходе флюида из пласта в скважину. Построены приближенные решения с использованием метода последовательной смены стационарных состояний (ПССС). Сравнение численных результатов точного и приближенного решений показывает, что они практически совпадают. Проанализировано влияние коллекторских характеристик пласта и трещины на эволюцию давления в трещине и в скважине.

*Ключевые слова:* трещина гидроразрыва пласта (ГРП), постоянный расход, распределение давления, интегродифференциальное уравнение, аналитическое решение

**DOI:** 10.31857/S0568528122600692, **EDN:** NTEWPR

В настоящее время в связи с тем, что значительная часть запасов нефти является трудноизвлекаемой в силу низкой проницаемости пластов или высокой вязкости самой нефти, представляют большой интерес задачи, описывающие фильтрацию флюида в призабойной зоне, подверженной различным физико-химическим и механическим воздействиям. Существенная часть работ [1–5] посвящена задачам фильтрации вокруг скважины при наличии трещин, полученных путем гидроразрыва пласта (ГРП).

В работах [6–9] приведена модель, описывающая фильтрацию флюида в трещине ГРП и в окружающем трещину пласте. В [6] приводится решение, описывающее изменение давления жидкости на скважине при поддержании постоянного дебита. В статьях [7–9] описывается распределение давления в трещине ГРП при режиме поддержания постоянного давления на скважине и при поддержании постоянного расхода жидкости. Во всех упомянутых выше работах рассматривались наиболее распространенные в настоящее время вертикальные скважины с вертикальной трещиной ГРП, симметричной относительно оси скважины.

В данной работе рассматривается процесс нестационарной фильтрации флюида в трещине ГРП, перпендикулярной оси скважины, при поддержании постоянного расхода жидкости на скважине. Для решения поставленной задачи предложена математическая модель в виде интегродифференциального уравнения. Найдены точное аналитическое решение через функции Бесселя и приближенное решение, полученное с помощью метода последовательной смены стационарных состояний (ПССС), удобное для практического применения и хорошо согласующееся с точным решением.

### 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматривается трещина ширины  $d_f$ , образованная гидроразрывом пласта и представляющая собой область пористой и проницаемой среды между двумя параллельными вертикальными

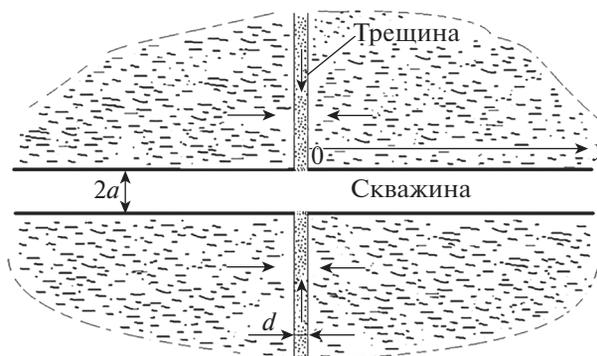


Рис. 1. Схема системы “скважина–трещина ГРП”.

плоскостями, расположенная перпендикулярно к горизонтальной цилиндрической скважине (рис. 1). Течение жидкости в трещине – радиально симметричное. Запишем уравнение неразрывности для флюида в трещине

$$\frac{\partial(m_f \rho_f)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho_f v_f)}{\partial r} = -2 \left. \frac{(\rho_p v_p)}{d_f} \right|_{y=0} \quad (a < r) \tag{1.1}$$

где  $m_i$  и  $\rho_i$  – пористость и плотность флюида (здесь и в дальнейшем нижние индексы  $f$  и  $p$  соответствуют значениям параметров в трещине и окружающей ее пористой среде),  $v_i$  – скорость фильтрации жидкости,  $a$  – радиус скважины. Величина в правой части уравнения (1.1) выражает приток флюида из пласта в трещину. Для ее определения решим сопряженную фильтрационную задачу в пласте вне трещины. Для этого запишем уравнение неразрывности в пористой среде

$$\frac{\partial(m_p \rho_p)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_p v_p)}{\partial y} = 0 \quad (0 < y < \infty) \tag{1.2}$$

Ось  $Oy$  отсчитывается от стенки трещины.

Для описания процесса фильтрации в трещине и в пласте примем закон Дарси

$$v_f = -\frac{k_f}{\mu} \frac{\partial P_f}{\partial r} \quad (a < r < \infty), \quad v_p = -\frac{k_p}{\mu} \frac{\partial P_p}{\partial y} \quad (a < r < \infty, \quad 0 < y < \infty) \tag{1.3}$$

где  $k_i$  ( $i = f, p$ ) – коэффициент проницаемости,  $\mu$  – динамическая вязкость флюида. Сжимаемость жидкости учитывается в акустическом приближении

$$P_i - P_0 = C^2 (\rho_i - \rho_0) \quad (i = f, p) \tag{1.4}$$

где  $C$  – скорость звука для жидкости, индекс (0) внизу для давления и плотности соответствует их невозмущенным значениям. Флюид считаем слабо сжимаемым ( $|\rho_i - \rho_0| \ll \rho_i \approx \rho_0$ ). Тогда уравнения (1.1) и (1.2) с учетом (1.3) и (1.4) можно привести к виду

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \frac{\varkappa_f}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P_f}{\partial r} \right) + 2 \left. \frac{m_p \varkappa_p}{m_f d_f} \left( \frac{\partial P_p}{\partial y} \right) \right|_{y=0} \quad (a < r < \infty) \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \varkappa_p \frac{\partial^2 P_p}{\partial y^2} \quad (a < r < \infty, \quad 0 < y < \infty) \tag{1.6}$$

где  $\varkappa_i = \frac{k_i \rho_0 C^2}{m_i \mu}$  ( $i = f, p$ ).

Отметим, что  $P_f$  – функция переменных  $t$  и  $r$ , а  $P_p$  – функция переменных,  $t$ ,  $r$  и  $y$ . В результате система (1.5) и (1.6) может быть сведена к одному интегро-дифференциальному уравнению

для  $P_f$ . Действительно, величина давления  $P_p$  на поверхности стенки трещины ( $y = 0$ ) должна быть равна  $P_f$ . Это условие запишется как

$$P_p = P_f \quad (a < r < \infty, \quad y = 0)$$

Будем считать, что в пористой среде вдали от трещины давление однородное и равно  $P_0$ , т.е.

$$P_p = P_0 \quad (a < r < \infty, \quad y = \infty)$$

Согласно уравнению (1.6) линии тока для фильтрационного течения в пласте полагаются прямыми, направленными перпендикулярно к границе трещин ГРП. Это допущение основано на том, что, во-первых, забойный участок скважины обсажен (поступление флюида в скважину происходит только из трещины). Во-вторых, проницаемость пласта  $k_p$  на несколько порядков ниже, чем проницаемость в трещине ГРП  $k_f$  ( $k_p \ll k_f$ ). Вследствие этого составляющая скорости фильтрации  $v_{p(r)}$  в пласте вблизи трещины вдоль нее значительно меньше, чем скорость фильтрации  $v_f$  в трещине ( $|v_{p(r)}| < |v_f|$ ). Ниже, в п. 3 будет представлен более детальный анализ для диапазона расстояния  $r$  и времени  $t$ , когда линии тока в пласте вблизи трещины ГРП почти прямые. Отметим также, что это допущение о прямолинейности линий тока сильно упрощает решение задачи.

Согласно принципу Дюамеля [10] решение уравнения (1.6), удовлетворяющее начальному и граничному условиям

$$P_p = P_0 \quad (t \leq t_0, \quad 0 < y < \infty), \quad P_p = P_f \quad (t > t_0, \quad y = 0) \quad (1.7)$$

может быть записано как

$$P_p - P_0 = \int_{t_0}^t \frac{\partial u(y, t - \tau)}{\partial t} (P_f(\tau, r) - P_0) d\tau \quad (1.8)$$

где

$$u(y, t - \tau) = 1 - \Phi(y / (2\sqrt{\alpha_p(t - \tau)})) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y/(2\sqrt{\alpha_p(t - \tau)}}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha$$

После несложных преобразований с учетом условий (1.7) решение (1.8) можно привести к виду

$$P_p - P_0 = \int_{t_0}^t \frac{\partial (P_f(\tau, r) - P_0)}{\partial \tau} u(y, t - \tau) d\tau \quad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в уравнение (1.5) и полагая  $t_0 = -\infty$ , получим следующее линейное интегро-дифференциальное уравнение для  $P_f$ , как

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \frac{\alpha_f}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P_f}{\partial r} \right) - 2 \frac{m_p \alpha_p}{m_f d_f} \int_{-\infty}^t \frac{\partial (P_f(\tau, r) - P_0)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \alpha_p(t - \tau)}} \quad (1.10)$$

Левая часть этого уравнения связана с упругостью трещины. Как показано в [7], для рассматриваемых задач это слагаемое не существенное, и в дальнейшем им пренебрегаем.

## 2. ФИЛЬТРАЦИЯ ФЛЮИДА В СКВАЖИНУ ЧЕРЕЗ ТРЕЩИНУ В РЕЖИМЕ ПОСТОЯННОГО РАСХОДА

На основе уравнения (1.10), пренебрегая эффектом упругости флюида в трещине (полагая равной нулю левую часть этого уравнения), рассмотрим радиальный режим фильтрации в трещине.

Пусть в исходном состоянии ( $t \leq 0$ ) жидкость в трещине и в пласте находится в покое, и, следовательно, давление однородно. В момент времени  $t = 0$  начинается с постоянным расходом отбор ( $q > 0$ ) или нагнетание ( $q < 0$ ) жидкости из скважины в трещину. Требуется определить поле давления  $P_f$  в трещине и закон изменения давления  $P_{f(w)}$  в скважине. Рассмотрим случай,

когда  $q > 0$ . В рамках отмеченных допущений уравнение (1.10) и его система начальных и граничных условий запишутся как

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta P_f}{\partial r} \right) = \chi_f \int_0^t \frac{\partial \Delta P_f}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \quad (a < r < \infty) \quad \left( \chi_f = \frac{2}{d_f} \frac{m_p \sqrt{\alpha_p}}{m_f \alpha_f} \right) \quad (2.1)$$

$$\Delta P_f = 0 \quad (\Delta P_f = P_f - P_0) \quad (t \leq 0, r > a) \quad (2.2)$$

$$q = - \frac{2\pi a d_f k_f}{\mu} \left( \frac{\partial \Delta P_f}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = \text{const} \quad (2.3)$$

Из условия (2.3) следует

$$\frac{\partial \Delta P_f}{\partial r} \Big|_{r=a} = - \frac{q\mu}{2\pi a d_f k_f} \quad (2.4)$$

Далее будем использовать преобразование Лапласа [11]

$$\Delta \overline{P}_f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Delta P_f dt$$

Из уравнения (2.1) с учетом (2.2) получаем для  $\Delta \overline{P}_f$  следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d \Delta \overline{P}_f}{dr} \right) = \chi_f \sqrt{\lambda} \Delta \overline{P}_f \quad (2.5)$$

Решение уравнения (2.5) имеет вид

$$\Delta \overline{P}_f(\lambda; r) = C_1 I_0(\sqrt{\chi_f \sqrt{\lambda} r}) + C_2 K_0(\sqrt{\chi_f \sqrt{\lambda} r}) \quad (2.6)$$

где  $I_0(z)$  и  $K_0(z)$  – модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го рода нулевого порядка соответственно [12]. Учитывая ограниченность  $\Delta P_f$  на бесконечности, имеем  $C_1 = 0$ . Следовательно,

$$\Delta \overline{P}_f(\lambda; r) = C_2 K_0(\sqrt{\chi_f \sqrt{\lambda} r}) \quad (2.7)$$

Продифференцируем обе части уравнения (2.7) по переменной  $r$ , тогда

$$\frac{\partial}{\partial r} (\Delta \overline{P}_f(\lambda; r)) = C_2 K_0'(\sqrt{\chi_f \sqrt{\lambda} r}) \sqrt{\chi_f \sqrt{\lambda}} \quad (2.8)$$

Учитывая, что производная  $K_0'(z) = -K_1(z)$ , ( $K_1(z)$  – модифицированная функция Бесселя второго рода первого порядка [10, 12]) из (2.8) при  $r = a$  получим

$$C_2 = \frac{q\mu}{2\pi a d_f k_f \lambda^{\frac{5}{4}} \sqrt{\chi_f} K_1(\sqrt{\chi_f \sqrt{\lambda} a})} \quad (2.9)$$

Тогда решение (2.6) с учетом выражения для  $C_2$  из (2.9) будет иметь вид

$$\Delta \overline{P}_f(\lambda; r) = \frac{q\mu K_0(\sqrt{\chi_f \sqrt{\lambda} r})}{2\pi a d_f k_f \lambda^{\frac{5}{4}} \sqrt{\chi_f} K_1(\sqrt{\chi_f \sqrt{\lambda} a})} \quad (a < r < \infty)$$

Найдем производную  $\frac{\partial}{\partial t} (\Delta P_f(t; r))$  функции  $\Delta P_f(t; r)$ , используя формулу Меллина (формулу обратного преобразования Лапласа)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta P_f(t; r)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-\infty}^{\gamma+\infty} \lambda \overline{P}_f(\lambda; r) e^{\lambda t} d\lambda$$

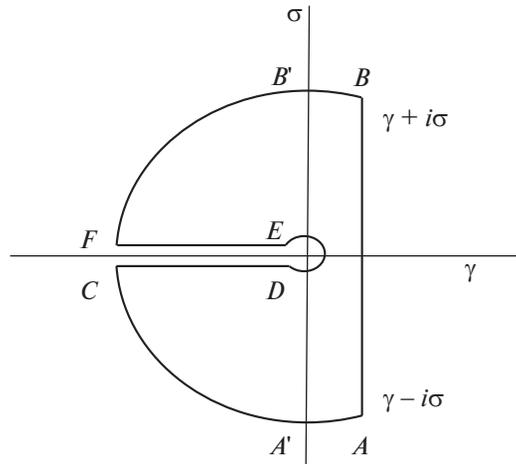


Рис. 2. Контур интегрирования.

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta P_f(t; r)) = \frac{q\mu}{4\pi^2 i a d_f k_f \sqrt{\chi_f}} \int_{\gamma-i\sigma}^{\gamma+i\sigma} \frac{K_0(\sqrt{\chi_f} \sqrt{\lambda r})}{\lambda^{\frac{1}{4}} K_1(\sqrt{\chi_f} \sqrt{\lambda a})} e^{\lambda t} d\lambda \tag{2.10}$$

где  $\gamma$  – положительное вещественное число.

Подынтегральная функция в (2.10) аналитична при всех комплексных значениях переменной  $\lambda$  за исключением нуля. Для вычисления этого интеграла воспользуемся контуром, изображенным на рис. 2. Согласно теореме Коши имеем

$$\int_{\gamma-i\sigma}^{\gamma+i\sigma} = \int_{AC} + \int_{CD} + \int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FB}$$

Интегралы вдоль дуг  $AC$ ,  $FB$  при  $R \rightarrow \infty$  стремятся к нулю. Интеграл по дуге  $DE$  при  $\xi \rightarrow 0$  тоже стремится к нулю. Интеграл по отрезку  $CD$  равен

$$\int_{CD} \frac{K_0(\sqrt{\chi_f} \sqrt{\lambda r})}{\lambda^{\frac{1}{4}} K_1(\sqrt{\chi_f} \sqrt{\lambda a})} e^{\lambda t} d\lambda = \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{K_0\left(\sqrt{\chi_f} u e^{-\frac{i\pi}{4}} r\right) e^{-u^4 t} 4u^2 du}{K_1\left(\sqrt{\chi_f} u e^{-\frac{i\pi}{4}} a\right) e^{-\frac{i\pi}{4}}}$$

Интеграл по отрезку  $EF$  равен

$$\int_{EF} \frac{K_0(\sqrt{\chi_f} \sqrt{\lambda r})}{\lambda^{\frac{1}{4}} K_1(\chi_f \sqrt{\lambda a})} e^{\lambda t} d\lambda = - \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{K_0\left(\sqrt{\chi_f} u e^{\frac{i\pi}{4}} r\right) e^{-u^4 t} 4u^2 du}{K_1\left(\sqrt{\chi_f} u e^{\frac{i\pi}{4}} a\right) e^{\frac{i\pi}{4}}}$$

Следовательно, выражение для производной  $\frac{\partial}{\partial t}(\Delta P_f(t; r))$  можем записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta P_f(t; r)) = \frac{q\mu}{\pi^2 i a d_f k_f \sqrt{\chi_f}} \int_0^{+\infty} \left( \frac{K_0\left(\sqrt{\chi_f} u e^{-\frac{i\pi}{4}} r\right)}{K_1\left(\sqrt{\chi_f} u e^{-\frac{i\pi}{4}} a\right) e^{-\frac{i\pi}{4}}} - \frac{K_0\left(\sqrt{\chi_f} u e^{\frac{i\pi}{4}} r\right)}{K_1\left(\sqrt{\chi_f} u e^{\frac{i\pi}{4}} a\right) e^{\frac{i\pi}{4}}} \right) e^{-u^4 t} u^2 du \tag{2.11}$$

Интегрируя выражение для производной (2.11) по переменной  $t$ , находим искомую функцию  $\Delta P_f(r; t)$

$$\Delta P_f(t; r) = \frac{q\mu}{\pi^2 i a d_f k_f \sqrt{\chi_f}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} \left( \frac{K_0\left(\sqrt{\chi_f} u e^{-\frac{\pi}{4} r}\right)}{K_1\left(\sqrt{\chi_f} u e^{-\frac{\pi}{4} a}\right) e^{-\frac{\pi}{4} r}} - \frac{K_0\left(\sqrt{\chi_f} u e^{\frac{\pi}{4} r}\right)}{K_1\left(\sqrt{\chi_f} u e^{\frac{\pi}{4} a}\right) e^{\frac{\pi}{4} r}} \right) (1 - e^{-u^4 t}) du \quad (2.12)$$

Из решения (2.12), полагая  $r = a$ , получим закон изменения давления в скважине как

$$P_{f(w)} = P_0 + \Delta P_{f(w)} \\ \Delta P_{f(w)}(t) = \frac{q\mu}{\pi^2 i a d_f k_f \sqrt{\chi_f}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} \left( \frac{K_0\left(\sqrt{\chi_f} u e^{-\frac{\pi}{4} a}\right)}{K_1\left(\sqrt{\chi_f} u e^{-\frac{\pi}{4} a}\right) e^{-\frac{\pi}{4} a}} - \frac{K_0\left(\sqrt{\chi_f} u e^{\frac{\pi}{4} a}\right)}{K_1\left(\sqrt{\chi_f} u e^{\frac{\pi}{4} a}\right) e^{\frac{\pi}{4} a}} \right) (1 - e^{-u^4 t}) du \quad (2.13)$$

Отметим, что полученные решения при граничных условиях  $P_p = P_0$  при  $y \rightarrow \infty$  и  $P_f = P_0$  при  $r \rightarrow \infty$  соответствуют начальному этапу функционирования скважины, когда влияние границы пласта, влияние фильтрационных полей соседних трещин (в случае системы радиальных трещин), а также радиальной границы трещины слабые.

### 3. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ПССС ЗАДАЧИ О ФИЛЬТРАЦИИ К СКВАЖИНЕ ЧЕРЕЗ ТРЕЩИНУ В РЕЖИМЕ ПОСТОЯННОГО РАСХОДА

Одним из наиболее широко используемых приближенных методов решения задач теории упругого режима фильтрации является метод последовательной смены стационарных состояний (ПССС). Он основан на предположении, что давление в пласте меняется во времени значительно медленнее, чем по координатам [13].

Рассмотрим функционирование скважины в режиме постоянного расхода ( $q = \text{const}$ ,  $t > 0$ ), исходные состояния в пласте и в трещине примем, как в п. 2. Требуется определить эволюцию распределения давления в трещине  $\Delta P_f$  и закон изменения давления в скважине  $\Delta P_{f(w)}$  при граничном условии, аналогичном (2.3).

Согласно гипотезе, принятой в методе ПССС, для распределения давления в пластах вблизи трещины ГРП имеем

$$P_p = -\Delta P_f \frac{y}{l_p} + P_f, \quad l_p = \sqrt{2\alpha_p t} \quad (0 < y < l_p) \quad (3.1)$$

Из этого выражения следует

$$\frac{\partial P_p}{\partial y} = -\Delta P_f \frac{1}{\sqrt{2\alpha_p t}}. \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (1.5) и учитывая вышеизложенное допущение относительно левой части этого уравнения, получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta P_f}{\partial r} \right) - \frac{\chi_f}{\sqrt{2t}} \Delta P_f = 0 \quad (3.3)$$

Общее решение уравнения (3.3) имеет вид

$$\Delta P_f(t; r) = C_1 I_0(r\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}}) + C_2 K_0(r\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}}) \quad (3.4)$$

Учитывая ограниченность  $\Delta P_f$  на бесконечности, из (3.4) получим

$$\Delta P_f(t; r) = C_2 K_0(r\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}}) \quad (3.5)$$

Продифференцируем выражение (3.5) по переменной  $r$

$$\frac{\partial \Delta P_f(t; r)}{\partial r} = C_2 K_0'(r\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}})\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}}$$

Учитывая условие (2.4), при  $r = a$  получим

$$C_2 = -\frac{q\mu}{d_f k_f} \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{\chi_f} K_1(a\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}})}$$

Тогда общее решение запишется как

$$\Delta P_f(t; r) = -\frac{q\mu}{2\pi a d_f k_f} \frac{\sqrt{2t} K_0(r\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}})}{\sqrt{\chi_f} K_1(a\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}})} \quad (3.6)$$

Отсюда, для закона изменения давления в скважине ( $r = a$ ) имеем

$$\Delta P_{f(w)}(t) = -\frac{q\mu}{2\pi a d_f k_f} \frac{\sqrt{2t} K_0(a\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}})}{\sqrt{\chi_f} K_1(a\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}})} \quad (3.7)$$

Проведем анализ решения (3.7) для больших времен, когда  $\xi_* = 1$  ( $\xi_* = a\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}}$ ). Из этого условия получим следующее неравенство для времени

$$t^{1/4} \geq t_*^{1/4}, \quad t_* = \chi_f^2 a^4$$

Примем некоторые типичные характерные величины для системы “скважина, пласт и радиальная трещина ГРП”:  $m_p = m_f = 10^{-1}$ ,  $k_p = 10^{-15}$  м<sup>2</sup>,  $k_f = 10^{-10}$  м<sup>2</sup>,  $\rho_0 = 860$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 10^{-2}$  Па · с,  $a = 10^{-1}$  м,  $d_f = 3 \times 10^{-3}$  м. Тогда, согласно выражению для  $\chi_f$  из (2.5), имеем следующую оценку  $\chi_f \approx 0.15 \sqrt{\text{с/м}^2}$  и для вышеприведенных характерных величин рассматриваемой системы получим  $t_* = 2.25 \times 10^{-6}$  с. Следовательно, в рассматриваемой задаче всегда  $t \geq t_*$ , и поэтому можно считать  $\xi \ll 1$ . Для функций  $K_0(\xi)$  и  $K_1(\xi)$  справедливы при малых значениях параметра  $\xi$  асимптотики [10]

$$K_0(\xi) = -\left(\gamma + \ln\left(\frac{\xi}{2}\right)\right) \quad \text{и} \quad K_1(\xi) = \xi^{-1} \quad (3.8)$$

Здесь  $\gamma = 0.5772$  – постоянная Эйлера. Подставляя (3.8) в (3.7), находим

$$\Delta P_{f(w)}(t) = \frac{q\mu}{2\pi k_f d_f} \left(\gamma + \ln\left(\frac{1}{2} a\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}}\right)\right) \approx \frac{q\mu}{2\pi k_f d_f} \ln(0.75 a\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}}) \quad (3.9)$$

Полученное выражение может быть использовано при гидродинамическом исследовании скважины, подверженной ГРП. Действительно, из (3.9) следует

$$\Delta P_{f(w)} = \frac{q\mu}{2\pi k_f d_f} \left(\ln(0.75\sqrt{\chi_f} a) - \frac{1}{4} \ln t\right) \quad (3.10)$$

Это асимптотическое решение можно, в свою очередь, записать как

$$\Delta P_{f(w)} = B - A \ln t, \quad A = \frac{q\mu}{8\pi k_f d_f}, \quad B = 4A \ln(0.75\sqrt{\chi_f} a) \quad (3.11)$$

Выражение (3.11) в координатной плоскости  $(\ln t, \Delta P_{f(w)})$  является уравнением прямой. Причем, как показывают вышеприведенные численные оценки для  $t_*$ , при отборе жидкости с постоянным расходом  $q$ , функционирование скважины почти мгновенно должно выйти на этот асимптотический режим. Поэтому, обрабатывая промысловые данные в координатах  $(\ln t, \Delta P_{f(w)})$ ,

можем определить  $A$  и  $B$ , и тем самым найти проводимость трещины  $k_f d_f$  и величину  $\chi_f$ . Этот метод аналогичен способу, изложенному в [13], по определению проводимости пласта по кривым восстановления давления при больших временах.

Отметим, что формулы (3.10) и (3.11) можно записать для системы из  $n$  радиальных трещин. Если считать, что параметры всех трещин близки, то для этого в этих формулах надо  $q$  заменить на  $nq$ .

Используя выражение для  $K_1(\xi)$ , решение (3.6) можно записать как

$$\Delta P_f = \frac{q\mu}{2\pi k_f d_f} K_0(r\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}}) \quad (3.12)$$

Следовательно, для распределения давления в трещине ГРП имеет место автомоделльное решение. Отсюда, если перепад давления  $\Delta P_f$  принять за постоянное фиксированное значение, то величины  $r$  и  $t$  связаны следующим законом

$$r = \xi\sqrt{\sqrt{2t}/\chi_f} \quad (\xi = \text{const})$$

Таким образом, фиксированное значение давления в трещине для рассматриваемого режима фильтрации распространяется по закону  $r \sim t^{1/4}$ .

Как отмечено в п. 1, приведенные выше точные и приближенные решения получены при допущении, что линии тока в пласте прямые, перпендикулярные к границам (“берегам”) трещины ГРП. Определим зоны в плоскости  $(r, t)$  (радиальная координата – время), где выполняется принятое допущение с некоторой точностью. Для радиальной  $v_{p(r)}$  и нормальной  $v_{p(n)}$  составляющих скоростей фильтрации в пласте вблизи стенок трещины можем записать

$$v_{p(r)} = -\frac{k_p}{\mu} \frac{\partial P_p}{\partial y} \quad \text{и} \quad v_{p(n)} = -\frac{k_p}{\mu} \frac{\partial P_f}{\partial r}$$

поскольку вблизи стенки трещины имеет место

$$\frac{\partial P_p}{\partial r} = \frac{\partial P_f}{\partial r}$$

Тогда, используя решения (3.1) для  $P_p$  и (3.12) для  $P_f$ , для отношения величин радиальной и нормальной составляющих скоростей фильтрации будем иметь

$$\left| \frac{v_{p(r)}}{v_{p(n)}} \right| = \sqrt{\chi_f} \alpha_p \sqrt{2t} \left| \frac{K_1(r\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}})}{K_0(r\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}})} \right| = \varepsilon \quad (3.13)$$

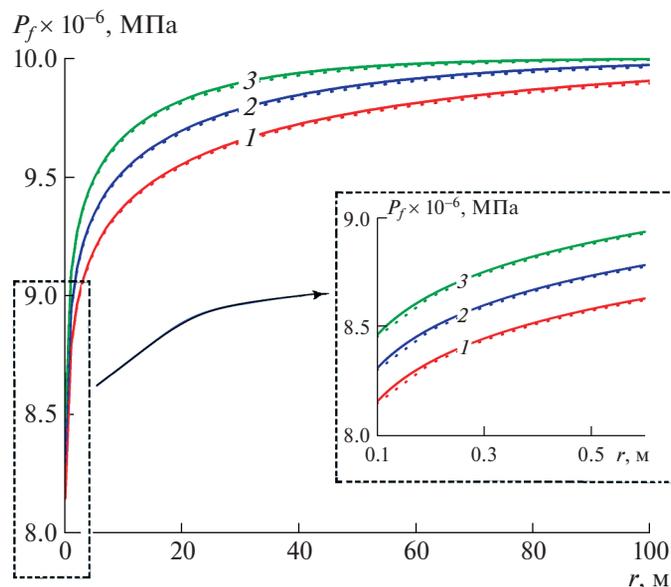
Отсюда следует, для того чтобы линии тока для скоростей фильтрации приближались к трещинам ГРП под углом, близким к прямому углу, должно выполняться условие  $\varepsilon \ll 1$ .

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для параметров, определяющих свойства и состояния пористого пласта, флюида и трещины, приняты величины  $m_p = m_f = 10^{-1}$ ,  $k_f = 10^{-10}$  м<sup>2</sup>,  $\rho_0 = 860$  кг/м<sup>3</sup>,  $C = 1.5 \times 10^3$  м/с,  $\mu = 10^{-2}$  Па · с,  $a = 10^{-1}$  м,  $d_f = 3 \times 10^{-3}$  м,  $P_0 = 10$  МПа. Для величины расхода принято значение  $q = 5 \times 10^{-5}$  м<sup>3</sup>/с.

На рис. 3 показано распределение давления в трещине при различных значениях коэффициента проницаемости пласта для фиксированного момента времени. На этом и в следующих рисунках сплошными и точечными линиями изображены графики, построенные по точным и приближенным решениям соответственно. Кроме того, на рисунках представлены фрагменты графиков вблизи призабойного участка в увеличенных масштабах.

Из характера кривых распределения давления следует, что уменьшение коэффициента проницаемости пласта на один порядок (в десять раз) приводит примерно к двукратному росту перепада давления  $\Delta P_f$  между пластовым значением  $P_0$  ( $P_p = P_0$ ,  $y \rightarrow \infty$ ) и значением в трещине.



**Рис. 3.** Распределение давления в трещине в момент времени  $t = 10^5$  с для различных значений коэффициента проницаемости пласта: 1–3 –  $k_p = 10^{-16}, 10^{-15}, 10^{-14}$  м<sup>2</sup>. Сплошные линии соответствуют точным аналитическим решениям, точечные – приближенным.

Следует также отметить, что в случае более низкопроницаемых пластов давление трещине ГРП приближается к пластовому значению медленнее с ростом радиальной координаты  $r$ . Так, если в случае более низкопроницаемого пласта ( $k_p = 10^{-16}$  м<sup>2</sup>) расстояние от скважины, на котором перепад давления  $\Delta P_f = P_f - P_0 \approx 0.25$  МПа, составляет около 60 м, то при проницаемости  $k_p = 10^{-14}$  м<sup>2</sup> такое значение перепада наблюдается при гораздо более близком к скважине расстоянии (примерно на 20 м).

На рис. 4 изображены графики, иллюстрирующие эволюцию давления в трещине для различных моментов времени. Здесь также видно, что точные и приближенные решения практически совпадают.

На рис. 5 представлены графики для распределения давления в трещине для различных значений дебита.

На рис. 6 показаны законы снижения давления в скважине для различных значений коэффициента проницаемости пласта (а) и проводимости трещины  $C_f = k_f d_f$  (б). Для времени принята логарифмическая шкала. Сплошные линии получены на основе общего решения (2.13), точечные линии построены согласно решению (3.9).

Таким образом, из представленных результатов расчетов также видно, что решения, полученные с использованием метода ПССС, практически совпадают с точными аналитическими решениями.

На рис. 7 зона, расположенная ниже линии 1, определяемой уравнением (3.13) при  $\varepsilon = 1$ , соответствует множеству значений  $(r, t)$ , для которых в пласте величина нормальной скорости фильтрации  $v_{p(n)}$  больше величины радиальной скорости  $v_{p(r)}$ . Зона, расположенная ниже линии 2, определяемой тем же уравнением при  $\varepsilon = 0.1$ , соответствует области переменных  $(r, t)$ , где величина нормальной скорости фильтрации  $v_{p(n)}$  в 10 раз больше величины радиальной скорости  $v_{p(r)}$ . Для параметров скважины, пласта и трещины ГРП приняты вышеприведенные значения.

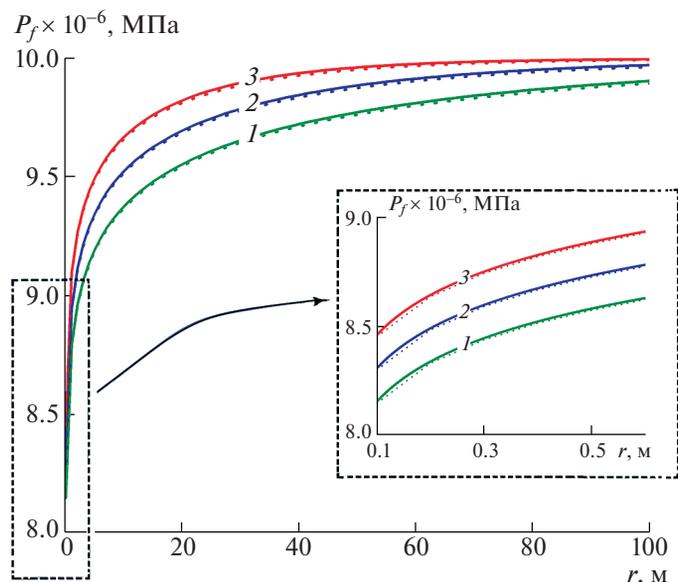


Рис. 4. Эволюция давления в трещине для различных моментов времени: 1–3 –  $t = 10^4, 10^5, 10^6$  с при  $k_p = 10^{-15} \text{ м}^2$ .

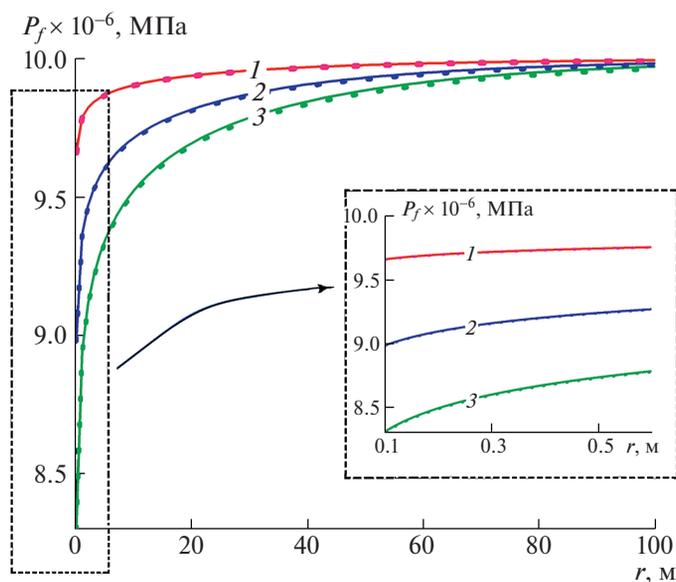
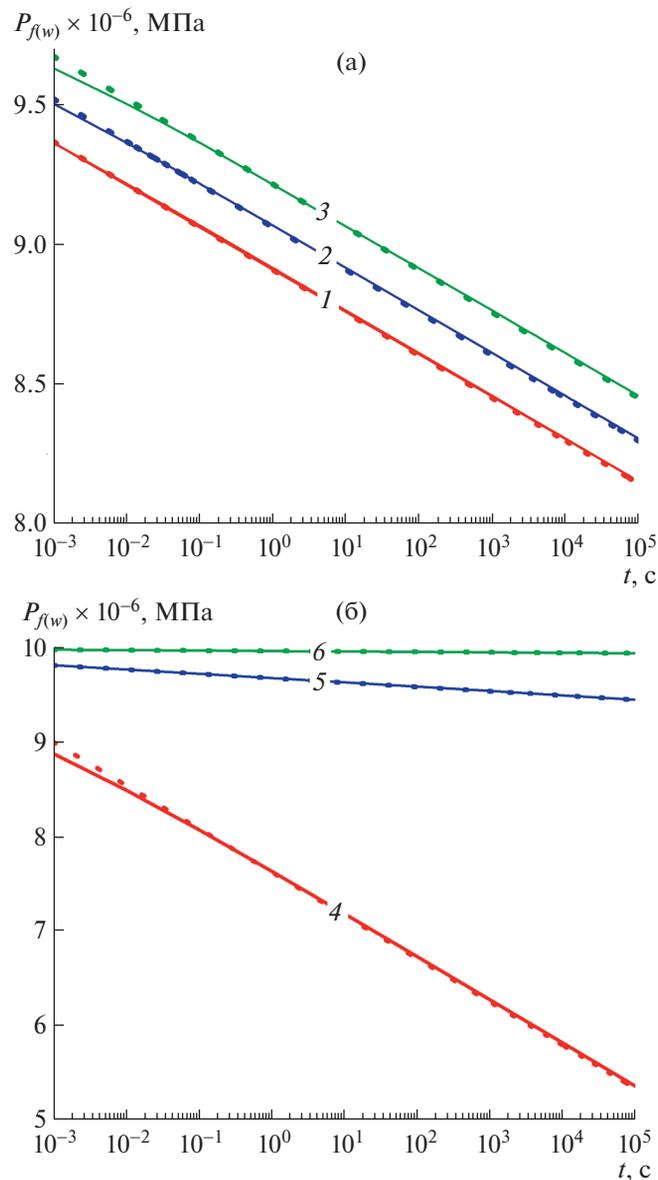


Рис. 5. Распределение давления в трещине для различных значений дебита: 1–3 –  $q = 10^{-5}, 3 \times 10^{-5}, 5 \times 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$  при  $k_p = 10^{-15} \text{ м}^2$  в момент времени  $t = 10^5$  с.

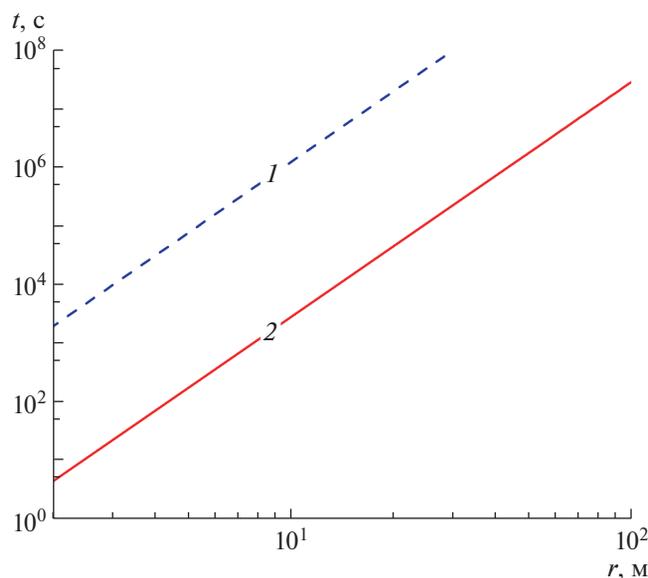
Отметим, что в представленных картинах зона  $(r, t)$ , где радиальная скорость фильтрации меньше, чем нормальная скорость, несколько занижена, поскольку в приведенных оценках не учтено торможение радиальной скорости фильтрации вблизи обсаженной скважины. Кроме того, как нам представляется, в плане определения расхода флюида из пласта в трещину, некоторое отклонение линий тока от прямых, перпендикулярных по отношению к трещине ГРП, несущественно.



**Рис. 6.** Динамика снижения давления в скважине при дебите  $q = 5 \times 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$  для (а) различных значений коэффициента проницаемости пласта и (б) для различных значений проводимости трещины при проницаемости пласта  $k_p = 10^{-15} \text{ м}^2$ : 1–3 –  $k_p = 10^{-16}, 10^{-15}, 10^{-14} \text{ м}^2$ ; 4–6 –  $C_f = 10^{-13}, 10^{-12}, 10^{-11} \text{ м}^3$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные точные и приближенные решения, описывающие эволюцию давления в трещине ГРП и, в том числе, на забое скважины при задании постоянного значения расхода флюида, позволяют определять параметры трещины ГРП по кривым изменения давления в призабойной зоне, сопоставляя их с промысловыми данными, получаемыми на скважине при прочих известных значениях параметров пласта и флюида. Показано хорошее согласование результатов, полученных с помощью метода последовательной смены стационарных состояний (ПССС) с точными, но значительно более сложными решениями. Это обстоятельство может быть полезным при разработке численных алгоритмов, учитывающих в наиболее полном объеме особенности реальных систем “скважина–пласт, подверженный ГРП”, такие как многомерные эффекты, реаль-



**Рис. 7.** Зоны фильтрации на плоскости: 1–2 – значения = 1, 0.1 в (3.13). В зоне, расположенной ниже линии 1, нормальная скорость больше радиальной скорости фильтрации, а в зоне, ниже линии 2, нормальная скорость превышает радиальную скорость фильтрации в пласте вблизи стенки трещины ГРП более чем в 10 раз.

ные условия на границах пласта и трещины ГРП, а также переходные режимы функционирования скважин.

Предложен метод оценки неизвестных значений коллекторских характеристик призабойной зоны (например, величины проводимости трещины) на основе сравнения дебита скважины и давления в забое с точными теоретическими решениями.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prats M.* Effect of vertical fractures on reservoir behavior – incompressible fluid case // Soc. Petrol. Eng. Journal. 1961. V. 1. № 2. P. 105–118.
2. *Prats M., Hazebroek P., Strickler W.R.* Effect of vertical fractures on reservoir behavior – compressible fluid case // Soc. Petrol. Eng. Journal. 1962. V. 2. № 2. P. 87–94.
3. *Каневская Р.Д., Дияшев И.Р., Некипелов Ю.В.* Применение гидравлического разрыва пласта для интенсификации добычи и повышения нефтеотдачи // Нефтяное хозяйство. 2002. № 5. С. 96–101.
4. *Астафьев В.И., Федорченко Г.Д.* Моделирование фильтрации жидкости при наличии трещины гидравлического разрыва пласта // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2007. № 2 (15). С. 128–132.
5. *Экономидес М., Олини Р., Валько П.* Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта: от теории к практике. Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2007. 237 с.
6. *Cinco-Ley H., Samaniego V.F., Dominguez A.N.* Transient pressure behavior for a well with a finite-conductivity vertical fracture // Soc. Pet. Eng. J. 1978. V. 18. № 4. P. 253–264.
7. *Шагапов В.Ш., Нагаева З.М.* К теории фильтрационных волн давления в трещине, находящейся в пористой проницаемой среде // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 5 (345). С. 121–130.
8. *Нагаева З.М., Шагапов В.Ш.* Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // ПММ. 2017. Т. 81. № 3. С. 319–329.
9. *Хабидуллин И.Л., Хисамов А.А.* Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 5. С. 6–14.
10. *Тихонов А.Н., Самарский А.Н.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
11. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Операционное исчисление. 2-е изд., доп. М.: Высшая школа, 1975. 408 с.
12. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
13. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.