

УДК 533:517.95

## ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ БЕЗ ГРАДИЕНТНОЙ КАТАСТРОФЫ

© 2023 г. А. В. Аксенов<sup>a,b,\*</sup>, К. П. Дружков<sup>a,c,\*\*</sup>

<sup>a</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>b</sup>Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия

<sup>c</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия

\*E-mail: aksenov@mech.math.msu.su

\*\*E-mail: konstantin.druzhkov@gmail.com

Поступила в редакцию 10.10.2022 г.

После доработки 12.10.2022 г.

Принята к публикации 12.10.2022 г.

Рассмотрена система уравнений, описывающая одномерные политропные движения газа. Получена классификация инвариантов характеристик вплоть до второго порядка рассматриваемой системы уравнений. Предложен метод сведения задач Коши к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью инвариантов характеристик, дополнительных к инвариантам Римана, построены примеры решений без градиентной катастрофы.

*Ключевые слова:* газовая динамика, инварианты Римана, инварианты характеристик, градиентная катастрофа, точные решения

DOI: 10.31857/S0568528122600734, EDN: AJZXYK

Хорошо известные в газовой динамике инварианты Римана [1] представляют собой функции, постоянные на характеристиках одномерной системы уравнений, описывающей движения газа при баротропных процессах. При этом инварианты Римана зависят только от скорости и плотности газа. Понятие инварианта характеристик было естественным образом обобщено Дарбу [2] при исследовании промежуточных интегралов скалярных гиперболических уравнений. Инварианты характеристик представляют собой функции, постоянные на характеристиках систем дифференциальных уравнений. Вообще говоря, они могут зависеть от производных сколь угодно высоких порядков и тесно связаны с понятием интегрируемости уравнений в частных производных по Дарбу [2–5].

С помощью дополнительных инвариантов характеристик можно строить общее решение системы уравнений одномерной газовой динамики. Примеры построения общих решений без использования инвариантов характеристик приведены в работе [6].

Основной целью этой работы является построение решений, в которых невозможно наступление градиентной катастрофы. Известно, что в случае одномерных политропных движений газа по начальным условиям можно однозначно сказать, наступит ли градиентная катастрофа в соответствующем решении [7]. В нашей работе проводится исследование решений задач Коши на всей пространственной оси, в которых наступление градиентной катастрофы невозможно. С помощью инвариантов характеристик, дополнительных к инвариантам Римана, построение таких решений сводится к исследованию систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматриваемые решения обладают конечными массой, импульсом и энергией. Другие примеры решений без градиентной катастрофы, в том числе записанные в неявной аналитической форме, приведены в работе [8].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В безразмерных переменных система уравнений одномерной газовой динамики для политропных движений газа (давление задается соотношением  $p = \gamma^{-1} \rho^\gamma$ ,  $\gamma = \text{const}$ ) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \rho^{\gamma-2} \rho_x &= 0 \\ \rho_t + u\rho_x + u_x \rho &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь безразмерные величины  $t$ ,  $x$ ,  $u$ ,  $\rho$ ,  $c$ ,  $p$  связаны с размерными временем  $t^*$ , пространственной координатой  $x^*$ , компонентой скорости  $u^*$ , плотностью  $\rho^* > 0$ , скоростью звука  $c^*(\rho^*) > 0$  и давлением  $p^*$  с помощью соотношений

$$t = \frac{c_c t^*}{l_c}, \quad x = \frac{x^*}{l_c}, \quad u = \frac{u^*}{c_c}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_c}, \quad c = \frac{c^*}{c_c}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_c c_c^2}$$

Характерные длина  $l_c$  и плотность  $\rho_c$  могут быть определены для конкретных задач. Характерная скорость звука  $c_c$  соответствует характерной плотности.

Законы сохранения массы, импульса и энергии для системы уравнений (1.1) при  $\gamma \neq 1$  могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \rho dx &= -(u\rho) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u\rho dx &= -(u^2 \rho + \gamma^{-1} \rho^\gamma) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{u^2 \rho}{2} + \frac{\rho^\gamma}{\gamma(\gamma-1)} \right) dx &= - \left( \frac{u^3 \rho}{2} + \frac{u\rho^\gamma}{\gamma-1} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Система уравнений (1.1) обладает на характеристиках  $C_+$  и  $C_-$  инвариантами Римана:

$$\begin{aligned} r &= u + \frac{2}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad C_+ : dx = \left( u + \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) dt \\ l &= u - \frac{2}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad C_- : dx = \left( u - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) dt \end{aligned}$$

которые представляют собой примеры инвариантов характеристик, т.е. функций, постоянных вдоль характеристик.

Далее инварианты характеристик системы уравнений (1.1) будут использованы при построении ее точных решений.

## 2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для определения инвариантов характеристик системы уравнений (1.1) удобно использовать операторы полных производных

$$\begin{aligned} D_x &= \partial_x + u_x \partial_u + \rho_x \partial_\rho + \dots \\ D_t &= \partial_t + u_t \partial_u + \rho_t \partial_\rho + \dots \end{aligned}$$

Здесь мы предполагаем, что эти операторы продолжены на производные всех порядков. Введем в рассмотрение операторы полных производных в силу системы уравнений (1.1)

$$\begin{aligned} \bar{D}_x &= \partial_x + u_x \partial_u + \rho_x \partial_\rho + \dots \\ \bar{D}_t &= \partial_t - (uu_x + \rho^{\gamma-2} \rho_x) \partial_u - (u\rho_x + u_x \rho) \partial_\rho + \dots \end{aligned}$$

Теперь характеристики  $C_\pm$  могут быть описаны в терминах полных производных вдоль характеристических направлений

$$X_\pm = \bar{D}_t + \left( u \pm \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) \bar{D}_x$$

Назовем функцию  $f$  инвариантом характеристики  $C_+$ , если она удовлетворяет условию  $X_+(f) = 0$ . Здесь  $f$  может зависеть от переменных  $t, x, u, \rho$  и производных по  $x$  вплоть до некоторого конечного порядка. Аналогично определяются инварианты характеристики  $C_-$ .

### 3. КЛАССИФИКАЦИЯ ИНВАРИАНТОВ ХАРАКТЕРИСТИК

Будем искать инварианты второго порядка характеристики  $C_+$ , т.е. функции вида  $f = f(t, x, u, \rho, u_x, \rho_x, u_{xx}, \rho_{xx})$ , удовлетворяющие условию

$$X_+(f) = 0$$

Прямыми вычислениями получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & u_{xxx} \left( \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} f_{u_{xx}} - \rho f_{\rho_{xx}} \right) - \rho_{xxx} \left( \rho^{\gamma-2} f_{u_{xx}} - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} f_{\rho_{xx}} \right) + f_t + \left( u + \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) f_x + \left( \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} u_x - \rho^{\gamma-2} \rho_x \right) f_u - \\ & - \left( \rho u_x - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \rho_x \right) f_\rho + \left( \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} u_{xx} - \rho^{\gamma-2} \rho_{xx} - u_x^2 - (\gamma-2) \rho^{\gamma-3} \rho_x^2 \right) f_{u_x} - \left( \rho u_{xx} - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \rho_{xx} + 2u_x \rho_x \right) f_{\rho_x} - \\ & - (3u_x u_{xx} + 3(\gamma-2) \rho^{\gamma-3} \rho_x \rho_{xx} + (\gamma^2 - 5\gamma + 6) \rho^{\gamma-4} \rho_x^3) f_{u_{xx}} - 3(\rho_x u_{xx} + u_x \rho_{xx}) f_{\rho_{xx}} = 0 \end{aligned}$$

Поскольку искомая функция  $f$  не зависит от производных третьего порядка, коэффициенты при  $u_{xxx}$  и  $\rho_{xxx}$  должны быть нулевыми и рассматриваемое уравнение расщепляется на систему из трех уравнений, из которых только два уравнения независимы. Независимые уравнения имеют следующий вид:

$$\rho^{\frac{\gamma-3}{2}} f_{u_{xx}} - f_{\rho_{xx}} = 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & f_t + \left( u + \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) f_x + \left( \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} u_x - \rho^{\gamma-2} \rho_x \right) f_u - \left( \rho u_x - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \rho_x \right) f_\rho + \\ & + \left( \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} u_{xx} - \rho^{\gamma-2} \rho_{xx} - u_x^2 - (\gamma-2) \rho^{\gamma-3} \rho_x^2 \right) f_{u_x} - \left( \rho u_{xx} - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \rho_{xx} + 2u_x \rho_x \right) f_{\rho_x} - \\ & - (3u_x u_{xx} + 3(\gamma-2) \rho^{\gamma-3} \rho_x \rho_{xx} + (\gamma^2 - 5\gamma + 6) \rho^{\gamma-4} \rho_x^3) f_{u_{xx}} - 3(\rho_x u_{xx} + u_x \rho_{xx}) f_{\rho_{xx}} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

В дальнейшем вместо аргумента  $u$  искомой функции  $f$  удобно использовать инвариант Римана  $r$ .

Из уравнения (3.1) следует, что искомая функция имеет вид  $f = f(t, x, r, \rho, u_x, \rho_x, q)$ , где  $q = \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} \left( u_{xx} + \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} \rho_{xx} \right)$ . Подставляя искомую функцию  $f$  в уравнение (3.2) и исключая переменную  $u_{xx}$  с помощью написанного выше выражения для  $q$ , получаем линейное по переменной  $\rho_{xx}$  соотношение. Тогда, расщепляя найденное соотношение по  $\rho_{xx}$ , получаем два уравнения на искомую функцию  $f$ :

$$4\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} f_{u_x} - 4\rho f_{\rho_x} + (\gamma-3) \left( u_x + 5\rho^{\frac{\gamma-3}{2}} \rho_x \right) \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} f_q = 0 \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & f_t + \left( r + \frac{\gamma-3}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) f_x - \left( \rho u_x - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \rho_x \right) f_\rho - (u_x^2 + (\gamma-2) \rho^{\gamma-3} \rho_x^2 - \rho q) f_{u_x} - \\ & - \left( 2u_x \rho_x + \rho^{\frac{5-\gamma}{2}} q \right) f_{\rho_x} - \left( \frac{\gamma+3}{2} q u_x + (\gamma^2 - 5\gamma + 6) \rho^{\frac{3\gamma-11}{2}} \rho_x^3 - \frac{\gamma-9}{2} \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} q \rho_x \right) f_q = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из уравнения (3.3) следует, что искомая функция имеет вид  $f = f(t, x, r, \rho, a, b)$ , где

$$a = \rho^{\frac{\gamma-3}{4}} \left( u_x + \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} \rho_x \right) \quad (3.5)$$

$$b = \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 3}{16(\gamma-1)\rho} u_x^2 + \frac{3\gamma^2 - 10\gamma + 3}{8(\gamma-1)} \rho^{\frac{\gamma-5}{2}} u_x \rho_x + \frac{13\gamma^2 - 50\gamma + 33}{16(\gamma-1)} \rho^{\gamma-4} \rho_x^2 + q$$

Подставляя искомую функцию  $f$  в уравнение (3.4) и исключая переменные  $\rho_x$  и  $q$  с помощью соотношений (3.5), получаем соотношение, линейное по переменной  $u_x$  и тождественно равное нулю по этой переменной. Расщепляя его по переменной  $u_x$ , получаем два уравнения на искомую функцию  $f$ . Первое уравнение имеет простой вид  $f_\rho = 0$ . Второе уравнение является классифицирующим уравнением и имеет следующий вид:

$$f_t + r f_x + \frac{\gamma-3}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} f_x - \frac{\gamma+1}{4} \rho^{\frac{3-\gamma}{4}} a (a f_a + 3b f_b) + \frac{3\gamma^3 - 7\gamma^2 - 7\gamma + 3}{64(\gamma-1)} \rho^{\frac{5-3\gamma}{4}} a^3 f_b = 0 \quad (3.6)$$

Здесь  $\gamma \neq 1$  и  $f = f(t, x, r, a, b)$ .

**Замечание 1.** Случай  $\gamma = 1$  выделяется отдельно. Прямыми вычислениями можно показать, что в этом случае нет дополнительных инвариантов второго порядка.

Используя отсутствие явной зависимости функции  $f$  от переменной  $\rho$ , из классифицирующего уравнения (3.6) находим только пять случаев существования дополнительных инвариантов.

**Случай 1.**  $\gamma = -1$ . В этом случае дополнительным инвариантом является

$$I = \frac{\rho^3}{\rho_x + \rho^2 u_x}$$

**Случай 2.**  $\gamma = 1/3$ . В этом случае дополнительным инвариантом является

$$I = \frac{b}{a^3}$$

**Случай 3.**  $\gamma = 5/3$ . В этом случае дополнительным инвариантом является

$$I = x - \left( u + 3\rho^{\frac{1}{3}} \right) t + \frac{3\rho}{\rho_x + \rho^{\frac{2}{3}} u_x}$$

**Случай 4.**  $\gamma = 7/5$ . В этом случае дополнительным инвариантом является

$$I = x - \left( u + 5\rho^{\frac{1}{5}} \right) t - \frac{25b}{3a^3}$$

**Случай 5.**  $\gamma = 3$ . В этом случае дополнительным инвариантом является

$$I = x - (u + \rho)t$$

Кроме того, в случаях 1, 3, 5 имеются дополнительные инварианты порядка не выше второго. Они могут быть получены из найденных инвариантов с помощью действия оператора инвариантного дифференцирования

$$\frac{1}{r_x} \overline{D}_x$$

#### 4. СВЕДЕНИЕ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ К ОДУ

Запишем исходную систему уравнений (1.1) в терминах инвариантов Римана (при  $\gamma \neq 1$ )

$$r_t + \frac{(1+\gamma)r + (3-\gamma)l}{4} r_x = 0$$

$$l_t + \frac{(1+\gamma)l + (3-\gamma)r}{4} l_x = 0 \quad (4.1)$$

Дополнительные инварианты характеристик позволяют свести большинство задач Коши для соответствующих систем уравнений к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для этого к системе (4.1) добавим соотношение:

$$I_- = h(l) \quad (4.2)$$

между инвариантом Римана  $l$  на характеристике  $C_-$  и ее дополнительным инвариантом  $I_-$ . Возникающие при этом условия совместности оказываются выполненными автоматически. Если используемый инвариант  $I_-$  корректно определен на начальных данных рассматриваемой задачи Коши, то соотношение (4.2) позволяет определить соответствующую функцию  $h(l)$ . Интегрирование характеристического поля  $X_+$ , рассматриваемого в силу переопределенной системы уравнений (4.1), (4.2), сводится к замкнутой конечной системе ОДУ.

**Замечание 2.** Порядок инварианта  $I_-$  накладывает ограничения на порядок гладкости подходящих начальных условий.

Ниже при разных значениях параметра  $\gamma$  приведены соотношения между инвариантами характеристики  $C_-$  и соответствующие им системы ОДУ.

**Случай 1.**  $\gamma = -1$ . В этом случае, используя соотношение между инвариантами

$$(r - l)l_x = h(l)$$

получаем следующую систему ОДУ:

$$\dot{x} = l, \quad \dot{l} = -h(l)$$

**Случай 2.**  $\gamma = 1/3$ . В этом случае, используя соотношение между инвариантами

$$\frac{l_{xx}(r - l) + 2r_x l_x}{(r - l)^3 l_x^3} = h(l)$$

получаем следующую систему ОДУ:

$$\dot{x} = \frac{r + 2l}{3}, \quad \dot{r} = 0, \quad \dot{l} = \frac{l - r}{3} l_x, \quad \dot{l}_x = -\frac{l_x^2 + (r - l)^3 h(l)}{3}$$

**Случай 3.**  $\gamma = 5/3$ . В этом случае, используя соотношение между инвариантами

$$x - tl + \frac{l - r}{2l_x} = h(l)$$

получаем следующую систему ОДУ:

$$\dot{x} = \frac{2r + l}{3}, \quad \dot{r} = 0, \quad \dot{l} = \frac{(r - l)^2}{6(x - tl - h(l))} \quad (4.3)$$

**Случай 4.**  $\gamma = 7/5$ . В этом случае, используя соотношение между инвариантами

$$x - tl + (l - r) \frac{2l_x(4l_x - r_x) - (l - r)l_{xx}}{12l_x^3} = h(l)$$

получаем следующую систему ОДУ:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{3r + 2l}{5}, \quad \dot{r} = 0, \quad \dot{l} = -\frac{l - r}{5} l_x \\ \dot{l}_x &= -\left( \frac{12(x - tl - h(l))l_x^3}{5(l - r)} + \frac{11}{5} l_x^2 \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

**Случай 5.**  $\gamma = 3$ . В этом случае, используя соотношение между инвариантами

$$x - tl = h(l)$$

получаем следующую систему ОДУ:

$$\dot{x} = r, \quad \dot{r} = 0$$

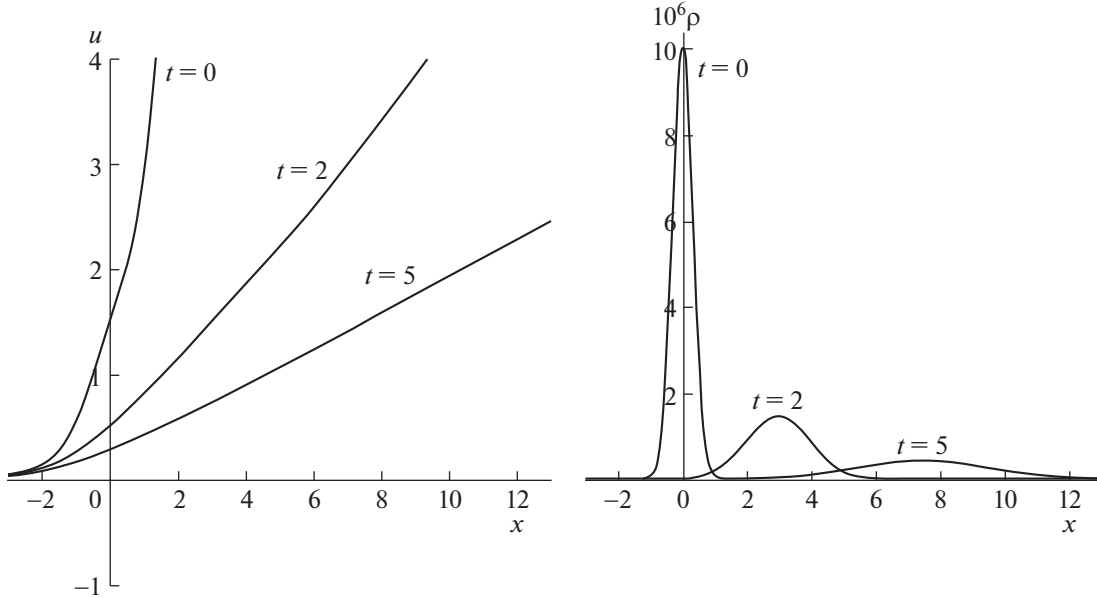


Рис. 1. Задача Коши (а) для  $\gamma = 5/3$  в моменты  $t = 0, 2, 5$ .

5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЙ БЕЗ ГРАДИЕНТНОЙ КАТАСТРОФЫ

В монографии [7] приводится следующий критерий невозможности наступления градиентной катастрофы в решении гладкой задачи Коши для системы уравнений (4.1) при  $-1 < \gamma \leq 3$ :

$$r'_0(x) \geq 0, \quad l'_0(x) \geq 0$$

Далее рассмотрим две задачи Коши на всей пространственной оси для различных  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} (a) : r_0(x) &= \exp(x) + \exp(-x^2), & l_0(x) &= \exp(x) \\ (b) : r_0(x) &= 2\arctg(x) + \exp(-x^2), & l_0(x) &= 2\arctg(x) \end{aligned} \tag{5.1}$$

В соответствующих решениях невозможно наступление градиентной катастрофы.

5.1. Случай  $\gamma = 5/3$

В этом случае начальным условиям (5.1) соответствуют начальные скорость и плотность

$$\begin{aligned} (a) : u_0 &= \exp(x) + \frac{1}{2}\exp(-x^2), & \rho_0 &= \frac{1}{216}\exp(-3x^2) \\ (b) : u_0 &= 2\arctg(x) + \frac{1}{2}\exp(-x^2), & \rho_0 &= \frac{1}{216}\exp(-3x^2) \end{aligned}$$

При этом начальные масса, импульс и энергия в законах сохранения (1.2) конечны, а начальная скорость в задаче (b) ограничена. Соотношение между инвариантами при  $t = 0$

$$x + \frac{l_0 - r_0}{2l'_0} = h(l_0)$$

позволяет определить соответствующие функции  $h(l)$ :

$$\begin{aligned} (a) : h(l) &= \ln l - \frac{1}{2l^{\ln l + 1}} \\ (b) : h(l) &= \tg\left(\frac{l}{2}\right) - \frac{1}{4}\exp\left(-\tg^2\left(\frac{l}{2}\right)\right)\left(\tg^2\left(\frac{l}{2}\right) + 1\right) \end{aligned}$$

Результаты численного исследования решений рассматриваемых задач Коши с помощью системы уравнений (4.3) представлены на рис. 1, 2.

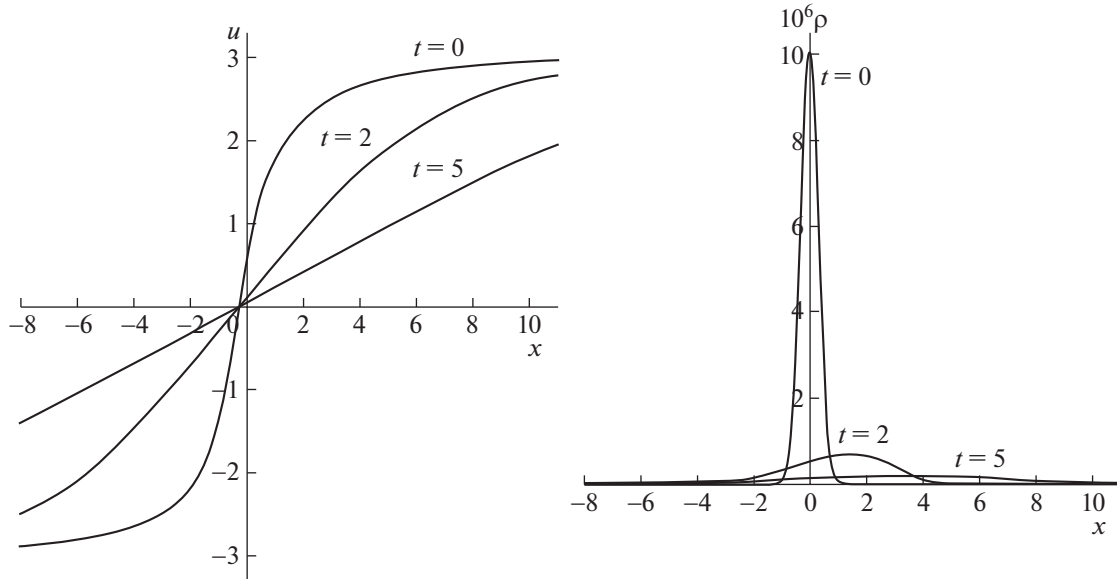


Рис. 2. Задача Коши (b) для  $\gamma = 5/3$  в моменты  $t = 0, 2, 5$ .

5.2. Случай  $\gamma = 7/5$

В этом случае начальным условиям (5.1) соответствуют начальная скорость и плотность

$$(a) : u_0 = \exp(x) + \frac{1}{2} \exp(-x^2), \quad \rho_0 = 10^{-5} \exp(-5x^2)$$

$$(b) : u_0 = 2 \operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{2} \exp(-x^2), \quad \rho_0 = 10^{-5} \exp(-5x^2)$$

При этом начальная масса, импульс и энергия в законах сохранения (1.2) также конечны, а начальная скорость в задаче (b) ограничена. Соотношение между инвариантами при  $t = 0$

$$x + (l_0 - r_0) \frac{2l_0'(4l_0' - r_0') - (l_0 - r_0)l_0'''}{12l_0'} = h(l_0)$$

позволяет определить соответствующие функции  $h(l)$ :

$$(a) : h(l) = \ln l - \frac{1}{3} l^{-2(\ln l + 1)} \ln l - \frac{1}{2} l^{-(\ln l + 1)} - \frac{1}{12} l^{-2(\ln l + 1)}$$

$$(b) : h(l) = \operatorname{tg}\left(\frac{l}{2}\right) - \exp\left(-2\operatorname{tg}^2\left(\frac{l}{2}\right)\right) \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg}^5\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^3\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{1}{24} \operatorname{tg}\left(\frac{l}{2}\right)\right) - \frac{1}{4} \exp\left(-\operatorname{tg}^2\left(\frac{l}{2}\right)\right) \left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{l}{2}\right) + 1\right)$$

Результаты численного исследования решений рассматриваемых задач Коши с помощью системы уравнений (4.4) представлены на рис. 3, 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для некоторых уравнений состояния найдены инварианты характеристик порядка два, дополнительные к инвариантам Римана. Дополнительные инварианты характеристик позволяют свести решения задач Коши к решению систем ОДУ и построить решения без градиентной ка-

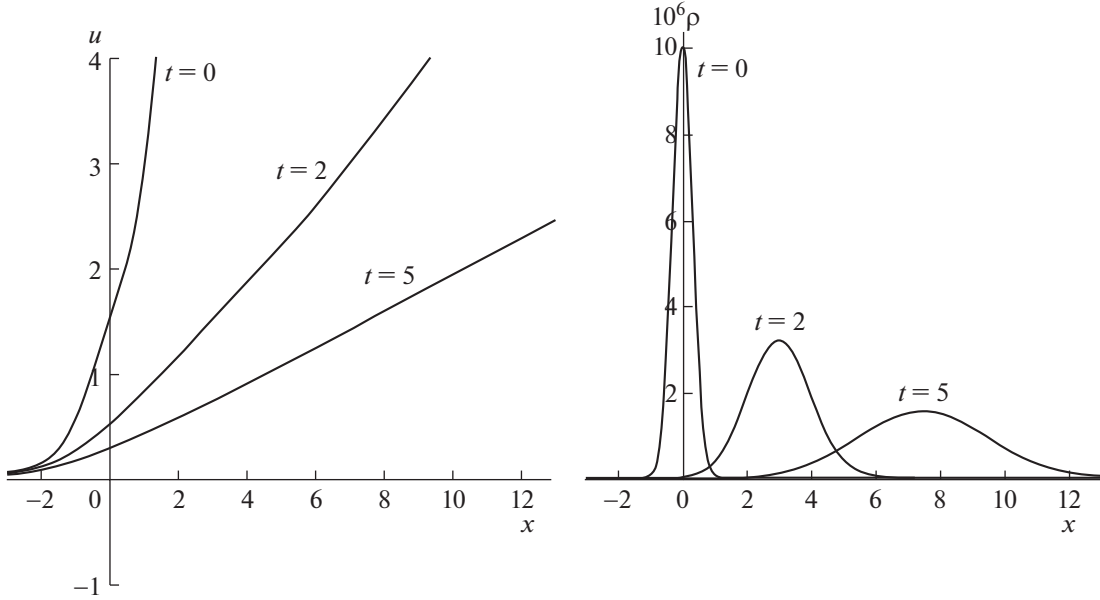


Рис. 3. Задача Коши (а) для  $\gamma = 7/5$  в моменты  $t = 0, 2, 5$ .

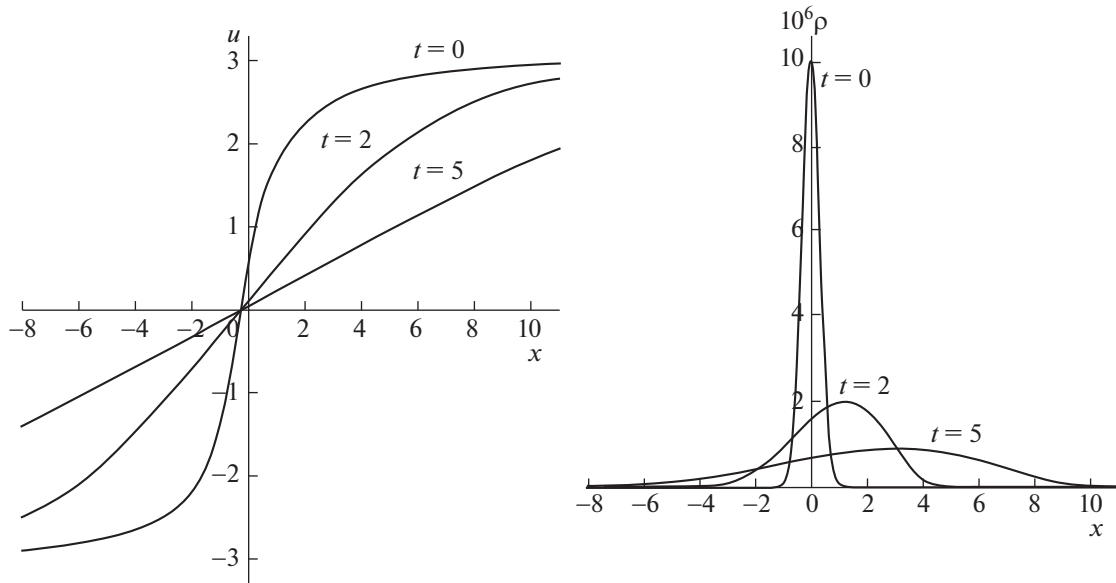


Рис. 4. Задача Коши (б) для  $\gamma = 7/5$  в моменты  $t = 0, 2, 5$ .

гастрофы. Результаты исследования могут быть использованы при апробации численных методов решения уравнений газовой динамики.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Riemann B.* Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungswerte // Aus dem achten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematischphysikalische Klasse. 1860. Band 8. Nr. 43. S. 43–66. [Retrieved from <https://eudml.org/doc/135717>]



2. *Darboux M.G.* Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences Paris. 1870. V. 70. P. 675–678.
3. *Darboux M.G.* Sur la théorie des équations aux dérivées partielles // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences Paris. 1870. V. 70. P. 746–749.
4. *Goursat M.E.* Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre a deux variables indépendantes. Tome II. Paris. 1898. 174 p. (Librairie scientifique A. Hermann)
5. *Капцов О.В.* Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 184 с.
6. *Аксенов А.В.* Нелинейные периодические волны в газе // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 5. С. 88–98.
7. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. 687 с.
8. *Aksenov A.V., Druzhkov K.P., Kapsov O.V.* Application of invariants of characteristics to construction of solutions without gradient catastrophe // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2022. V. 147. № 104249. P. 1–8.