

УДК 532.5

## ПЕРЕНОС ВЕЩЕСТВА ПАДАЮЩЕЙ КАПЛИ В ТОЛЩУ ЖИДКОСТИ В НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ПРОЦЕССА СЛИЯНИЯ

© 2023 г. А. Ю. Ильиных<sup>а,\*</sup>, Ю. Д. Чашечкин<sup>а,\*\*</sup>

<sup>а</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*E-mail:ilynykh@ipmnet.ru

\*\*E-mail:chakin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 27.05.2022 г.

После доработки 29.07.2022 г.

Принята к публикации 10.09.2022 г.

Методами высокоскоростной видеорегистрации впервые прослежена эволюция тонкой структуры картины распространения вещества свободно падающей капли под деформированной поверхностью первоначально покоящейся жидкости. Изучалось слияние капли воды с раствором роданида аммония, капли раствора поваренной соли, соды или чернил – с водой. В начальной стадии процесса слияния в ударном режиме с быстрым формированием каверны капля теряет сплошность. Впервые визуализированы короткие тонкие струйки, пронизывающие дно каверны. Подтвержден ранее зарегистрированный распад капли на тонкие волокна, образующие линейчатые и сетчатые структуры на поверхности каверны и венца. Постепенно струйки, содержащие вещество капли, сливаются и образуют охватывающий каверну промежуточный волокнистый слой с четкой внешней границей. По мере увеличения каверны промежуточный слой гомогенизируется и истончается. Далее, в процессе схлопывания каверны, в принимающей жидкости формируются новые группы волокон, которые пронизывают границу каверны под узлами сетки. В проведенных опытах волокнистый слой, охватывающий первичную каверну, наблюдался при вторжении жидкости большей плотности (капли раствора чернил, соды или поваренной соли) в менее плотную среду (воду), и жидкости меньшей плотности (капли воды) в более тяжелую (раствор роданида аммония). Толщина волокнистой оболочки первичной каверны увеличивается с ростом скорости капли.

*Ключевые слова:* капля, слияние, волокна первичного контакта, перенос вещества

**DOI:** 10.31857/S056852812260031X, **EDN:** AIAZGN

Изучение переноса вещества в течениях жидкостей и газов – одна из фундаментальных задач механики жидкостей, имеющая большое прикладное значение. Особый интерес представляют результаты исследований тонкой структуры течений, позволяющие не только идентифицировать вид процесса, но и определить его количественные характеристики в широком диапазоне условий.

Эксперименты с каплями позволяют изучать в компактных лабораторных установках свойства сложных явлений, в частности, вихревых течений, что было замечено еще в первых опытах в середине XIX века [1]. Последующие исследования эволюции картины течений [2], процессов формирования каскадов вихревых структур [3] оказали большое влияние на развитие многих разделов гидродинамики, биологии и физики в целом [4]. Эволюция вихревых течений – образование, движение, распад колец на каскад более мелких вихрей, в дальнейшем неоднократно изучалась в покоящейся жидкости [5], в составном вихре [6], в поле поверхностных гравитационно-капиллярных волн [7].

В силу научной содержательности и практической востребованности результатов, в последние годы особое внимание уделяется изучению течений, порождаемых свободно падающей каплей в покоящейся жидкости. В дополнение к медленным вихревым кольцам здесь были визуализированы последовательно вылетающие группы брызг, скорость которых заметно превышает скорость падающей капли [8], каверна, венец, всплеск [9, 10], семейства капиллярных волн и звуковые пакеты [11, 12].

Распространение микро- и нанотехнологий в фармацевтической, био- и нефтехимической промышленности активизировало изучение процессов переноса вещества на начальных этапах эволюции капельных течений. Развитие видео- и вычислительной техники, программ обработки данных позволило визуализировать тонкую структуру быстрых течений в окрестности контактной линии сливающихся жидкостей [13], полосчатые картины распределения вещества капли на стенках каверны и венца [14].

В численных расчетах распределение вещества капли по стенкам каверны предполагается однородным при любых скоростях капли [15]. Однако систематические исследования показали, что характер распространения вещества капли в покоящейся принимающей жидкости существенно зависит от скорости капли в момент первичного контакта.

Свободно падающая капля плавно втекает в жидкость, если число Рейнольдса  $Re = UD/\nu$  меньше критического значения  $Re_{cr} = 4300$  ( $D$  и  $U$  – диаметр и скорость капли,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости). В интрузивном режиме при  $Re < Re_{cr}$  поверхность жидкости с остатком сливающейся капли длительное время остается выпуклой [16]. Далее, с задержкой в несколько миллисекунд, в центре течения начинает формироваться быстро растущая каверна, трансформирующая пятно окрашенной жидкости в погружающийся кольцевой вихрь.

При  $Re > Re_{cr}$ , в ударном режиме слияния, каверна начинает формироваться без задержки с момента первичного контакта капли. Капля теряет сплошность и растекается по стенкам углубляющейся каверны отдельными струйками, окрашенные следы которых – тонкие волокна – образуют полосчатые и сетчатые структуры [17].

В стадии прекращения роста размеров и последующем схлопывании каверны окрашенная жидкость перетекает вдоль волокон и скапливается в узлах сетки. Здесь жидкость капли продавливается сквозь стенку каверны и образует в принимающей жидкости вихревые колечки на коротких ножках. Тонкие течения у стенки каверны вытягивают вихорьки в тонкие петли в толще принимающей жидкости в следе за схлопывающейся первичной каверной [18]. Волокнистая структура картины распределения вещества капли в принимающей жидкости сохраняется в процессе дальнейшей перестройки картины течения вплоть до полного затухания возмущений [1, 2, 17].

Теоретическое описание капельных течений проводится в приближении “сплошной среды”. На практике используются различные модели на основе уравнений Эйлера или Навье–Стокса для однородной жидкости [15], а также полная система фундаментальных уравнений [19] с замыкающими уравнениями для потенциала Гиббса [20] и плотности [21]. В реальных жидкостях существуют различные надмолекулярные структуры физико-химической природы – ассоциаты, кластеры [22], клатраты, войды с изолированными атомами и др. [23], которые характеризуются собственными значениями термодинамических потенциалов. Наиболее отчетливо надмолекулярные образования выражены в подповерхностном слое, в котором анизотропия атомно-молекулярной структуры вещества проявляется в формировании дополнительной поверхностной энергии [20] и в еще более тонком поверхностном слое, в котором регистрируются большие пространственные вариации термодинамических и физических величин [24, 25].

Перестройка картины распределения внутренней энергии на малых масштабах, связанная с процессами образования и распада структур, сопровождается неравномерным освобождением или накоплением внутренней энергии и формированием больших градиентов потенциала Гиббса, плотности, давления, температуры – производных термодинамических потенциалов [20, 21], – проявляющихся в виде тонкой структуры среды, наблюдаемой при высокоразрешающей визуализации течений [3, 13, 17, 24, 25].

Процессы трансформации внутренней энергии в течениях импакта капли входят в число влияющих механизмов передачи энергии, которые включают крупномасштабный перенос со скоростью  $u$  или с волнами с групповой скоростью  $c_g$ , и микроскопический – медленный диссипативно-диффузионный, и быстрый перенос, обусловленный конверсией внутренней энергии, включающей доступную потенциальную поверхностную энергию, в другие формы [12, 17, 18].

В силу методических трудностей, тонкая волокнистая структура течений импакта капли вначале визуализировалась только на поздних стадиях медленно эволюционирующего течения – при образовании кольцевого вихря и его трансформации в многоярусный каскад [1, 5]. Применение высокоскоростных видеорегистраторов позволило проследить формирование петель и перестройку картины волокон в стадии роста и спадании всплеска [13]. В недавних работах во-

локна и наклонные петли визуализированы в жидкости под схлопывающейся каверной при слиянии химически нейтральных и реагирующих веществ [16].

Тонкая структура картины переноса вещества падающей капли в принимающую жидкость в начальной стадии слияния при формировании первичной каверны ранее не изучалась. Учитывая научную содержательность задачи, распространенность капельных технологий, представляет интерес детальное изучение картины переноса вещества свободно падающей капли в толщу принимающей жидкости в начальной стадии процесса слияния в режиме формирования всплеска при  $Re > Re_{cr}$ . В данной работе впервые визуализированы тонкие струйки вещества капли, проникающие в принимающую жидкость в процессе формирования каверны при первичном контакте жидкостей.

## 1. ПАРАМЕТРЫ КАПЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В число определяющих параметров задачи входят плотности контактирующих сред – капли  $\rho_d$ , воздуха  $\rho_a$  и принимающей жидкости  $\rho_t$  (далее  $\rho_{d,a,t}$ ); кинематическая  $\nu_{d,a,t}$  и динамическая  $\mu_{d,a,t}$  вязкости; полные  $\sigma_d^a$ ,  $\sigma_t^a$  и нормированные на плотность жидкости коэффициенты поверхностного натяжения  $\gamma_d^a = \sigma_d^a / \rho_d$ ,  $\gamma_t^a = \sigma_t^a / \rho_t$ ,  $\text{см}^3/\text{с}^2$ ; коэффициент диффузии окрашивающей каплю примеси в принимающей жидкости  $k$ ; эквивалентный диаметр  $D$ , площадь поверхности  $S_d$ , объем  $V$ , масса  $M$ , высота свободного падения  $H$  и скорость капли  $U$  в момент первичного контакта; доступная потенциальная поверхностная энергия (ДППЭ)  $E_\sigma = \sigma S_d$ , кинетическая энергия  $E_k = MU^2/2$ , потенциальная энергия в гравитационном поле с ускорением свободного падения  $g$  [17].

Полная энергия капли  $E_d = E_k + E_\sigma$  включает кинетическую энергию с дифференциалом  $dE_k = 0.5\rho U^2 dV$ , и ДППЭ, распределенную в приповерхностном шаровом слое толщиной порядка размера молекулярного кластера  $\delta_\sigma$  и массой  $M_\sigma$ . Доля поверхностной энергии  $E_{\sigma k}^\sigma = E_\sigma / E_k$  в условиях данных опытов невелика и составляет около  $E_{\sigma k}^\sigma = 1 - 20\%$  кинетической энергии капли  $E_k$ . В то же время плотность поверхностной энергии  $W_\sigma = E_\sigma / M_\sigma$  большая ( $M_\sigma$  – объем приповерхностного шарового слоя толщиной  $\delta_\sigma \sim 10^{-6}$  см). Отношение плотностей компонентов энергии составляет  $W_{\sigma k}^\sigma = E_\sigma M / E_k M_\sigma \sim 1000$ . Время передачи кинетической энергии  $E_k$  и импульса  $P_k = Mv$  капли  $\Delta t = D/U$ , которое определяется ее диаметром  $D$  и контактной скоростью  $U$ , составляет несколько миллисекунд и на много порядков превышает время уничтожения свободной поверхности сливающихся жидкостей  $\Delta t = \delta_\sigma / U \sim 10^{-8}$  с. Быстрые процессы преобразования ДППЭ в другие формы на кольцевой границе области слияния жидкостей играют определяющую роль в формировании тонкой структуры течений, генерации акустических и капиллярных волн [11–13].

Отношения физических величин определяют собственные временные и пространственные масштабы, задающие требования к методике измерений в части выбора размера области наблюдения течений, пространственного и временного разрешения инструментов. Традиционный набор безразмерных параметров задачи, характеризующих капельные течения [8, 14, 16], включает числа Рейнольдса  $Re_d = UD/\nu_d$ , Фруда  $Fr_d = U^2/gD$ , Вебера  $We_d = U^2 D / \gamma_d$ , Бонда  $Bo = gD^2 / \gamma_d^a$ , Онезорге  $Oh_d = \nu_d / \sqrt{\gamma_d^a D}$ , Шмидта  $Sc = \nu_t / \kappa_t^m$ .

Различия физических свойств контактирующих сред характеризуются безразмерными отношениями, составленными по аналогии с числом Атвуда – относительной разностью плотностей –, коэффициентов поверхностного натяжения и динамических вязкостей

$$R_\rho = \frac{\rho_t - \rho_d}{\rho_t + \rho_d}, \quad R_\sigma = \frac{\sigma_t - \sigma_d}{\sigma_t + \sigma_d}, \quad R_\mu = \frac{\mu_t - \mu_d}{\mu_t + \mu_d}$$

Относительное влияние быстрых атомно-молекулярных процессов преобразования ДППЭ и передачи кинетической энергии капли характеризуют отношения компонентов энергии

$E_{r_k}^\sigma = E_\sigma/E_k$  и их плотностей  $W_{r_k}^\sigma = E_\sigma M/E_k M_\sigma$ . Обилие безразмерных параметров задачи отражает сложность пространственно-временной картины течений, эволюционирующей под действием нескольких одновременно протекающих процессов различного масштаба.

## 2. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Опыты выполнены на стенде “Визуализации тонкоструктурных компонентов быстротекающих процессов в жидкости (ТБП)”, входящем в комплекс Уникальных исследовательских установок “Гидрофизический комплекс для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере” (УИУ “ГФК ИПМех РАН”), с бассейнами размерами  $30 \times 30 \times 5 \text{ см}^3$ ,  $10 \times 10 \times 7 \text{ см}^3$ , которые заполнялись водопроводной водой или водными растворами других веществ [26]. Картина течения импакта капли, освещенная прожекторами ReyLab Xenos RH-1000, несколькими светодиодными источниками Optronis MultiLED, световодными осветителями Schott KL2500LCD, регистрировалась видеокамерой Optronis CR 300x2 или фотоаппаратом. Регистраторы запускались фотоприемником, отмечающим пролет капли. Число и расположение осветителей подбирались из условия четкости наблюдаемой тонкой структуры (методика приведена в [7, 14, 17]).

Одиночные капли воды (коэффициент преломления  $n_w = 1.33$ ), водных растворов ализариновых чернил, пищевой соды ( $\text{NaHCO}_3$  – гидрокарбонат натрия,  $\rho_s = 1.041 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ ,  $\gamma_s^a = 62 \text{ см}^3 \text{ с}^{-2}$ ,  $\nu_s = 0.012 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$ ,  $n_s = 1.34$ ) или поваренной соли ( $\text{NaCl}$ ,  $\rho_n = 1.197 \text{ см}^{-3}$ ,  $\gamma_n^a = 75 \text{ см}^3 \text{ с}^{-2}$ ,  $\nu_n = 0.009 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$ ,  $n_n = 1.517$ ) создавались с помощью дозатора на основе медицинской капельницы [10]. Капли падали в стеклянный бассейн, заполненный частично дегазированной водопроводной водой или водным раствором роданида аммония ( $\text{NH}_4\text{SCN}$ ,  $\rho_r = 1.043 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ ,  $\gamma_r^a = 50.8 \text{ см}^3 \text{ с}^{-2}$ ,  $\nu_r = 0.009 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$ ,  $n_r = 1.36$ ). Различия коэффициентов преломления контактирующих сред обеспечивают возможность визуализации контактных границ и определения местоположения структурных компонентов прямым теневым методом [12]. Пары жидкостей подбирались для определения влияния инерциальных эффектов – зависимости структуры течения от знака числа  $R_p$  – относительной разности плотностей. В случае падения капли воды в раствор роданида аммония число  $R_p > 0$ . Когда капля жидкости большей плотности – раствора чернил, соды или поваренной соли, падает в воду, число  $R_p < 0$ .

Описания опытов, проведенных в диапазоне ударного образования каверны, венца и последующего всплеска – центральной кумулятивной струйки, приводятся в [14, 15, 17]. В ударном режиме из центра течения к линии контакта радиально подтекают тонкие быстрые струйки [13], следы которых образуют волокнистую или сетчатую структуру на поверхности каверны и венца [16]. Для краткости ниже не приводятся данные опытов по визуализации структуры течений в интрузивном режиме при  $Re < Re_{cr} = 4300$ ,  $We < 60$ ,  $E_{r_k}^\sigma > 0.2$ ,  $W_{r_k}^\sigma > 5.8 \times 10^3$ ,  $U < 1 \text{ м/с}$ , когда капля втекает в принимающую жидкость с сохранением выпуклости свободной поверхности и образует в толще принимающей жидкости компактный объем, а каверна появляется с некоторой задержкой [16].

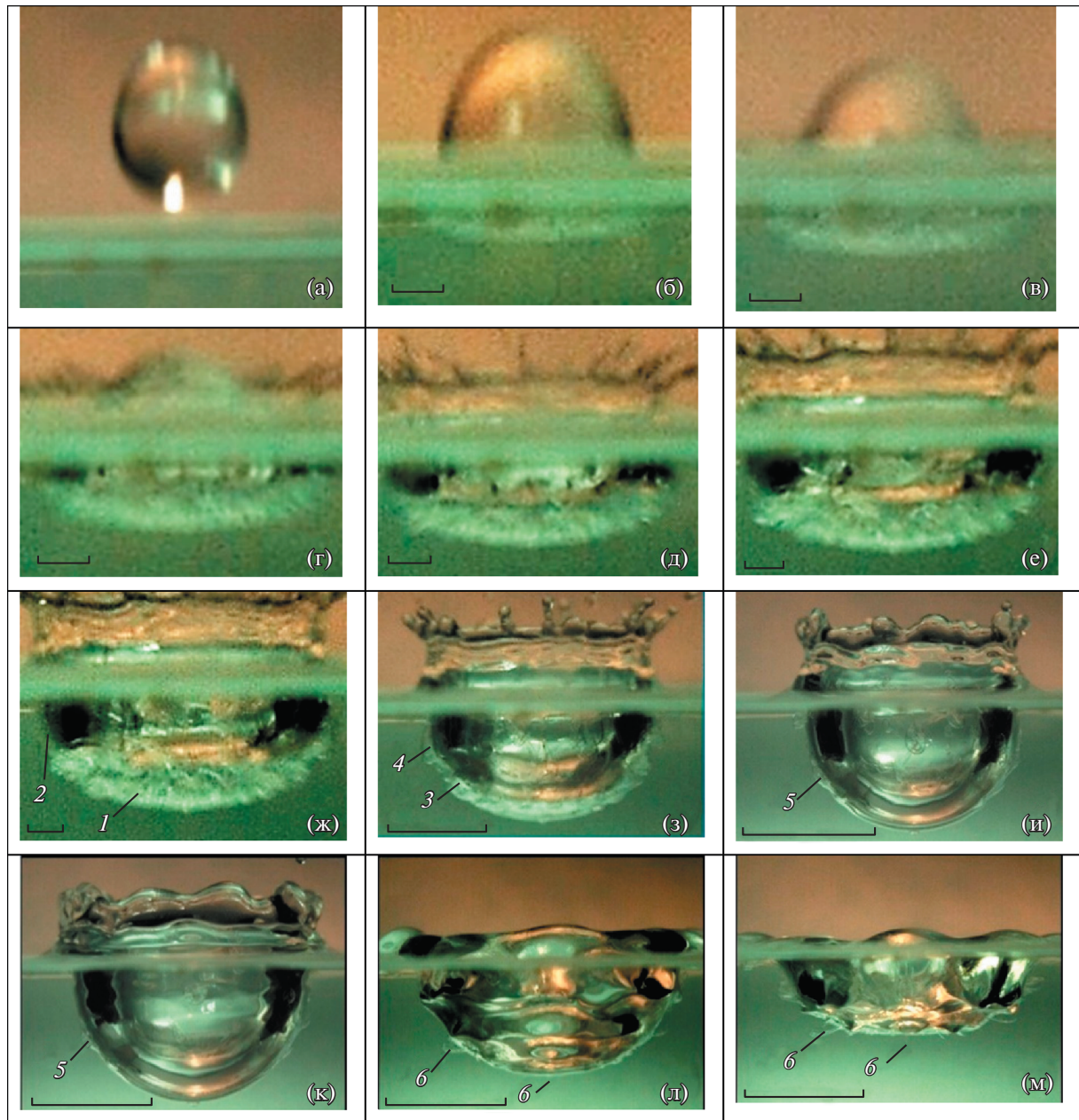
## 3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Касание свободно падающей капли поверхности принимающей жидкости (далее в описании  $t = 0$ ) запускает последовательность физических, акустических и гидродинамических процессов [1, 5, 13, 16, 17]. В опытах на всех этапах эволюции наблюдается тонкая структура распределения вещества капли, визуализирующая вихревую природу течений. В данной работе визуализированы струйки, пронизывающие границу первичной каверны в начальной стадии процесса растекания капли. Для оценки влияния инерциальных эффектов прослежена эволюция структуры при различных отношениях плотностей контактирующих жидкостей.

### 3.1. Слияние капли воды с раствором роданида аммония

Выборка кадров из видеофильма картины течения, формирующегося при слиянии свободно падающей капли водопроводной воды с 20% раствором роданида аммония приведена на рис. 1





**Рис. 1.** Эволюция картины течения при слиянии свободно падающей капли воды с 20% раствором роданида аммония ( $D = 4.2$  мм,  $U = 3.1$  м/с,  $Re_d = 13000$ ,  $Fr_d = 234$ ,  $We_d = 572$ ,  $Bo = 2.45$ ,  $Oh_d = 0.0018$ ,  $R_p = 0.023$ ,  $R_\sigma = -0.14$ ,  $E\Gamma_k^\sigma = 0.02$ ,  $W\Gamma_k^\sigma = 600$ ): а–м:  $-t = -0.3, 0.25, 0.5, 0.75, 1.25, 1.75, 2.25, 4, 10, 20, 36, 41, 47, 53, 55, 65$  мс. Для визуализации тонких деталей масштаб перестраивается: длина маркера на кадрах (а–ж – 1 мм, (з) – 5 мм, (и–м) – 10 мм).

(для визуализации тонких деталей растущего течения, масштаб изображений перестраивается). Оторвавшаяся капля осциллирует, на рис. 1а большая ось вытянутой капли диаметром  $D = 3.6$  мм и высотой  $h = 4.7$  мм наклонена под углом  $\theta = 4^\circ$  к вертикали. Нечеткость кромки капли также обусловлена ее смещением, которое за время экспозиции  $\Delta T_e = 0.25$  мс составляет  $\Delta h = U \Delta T_e = 0.75$  мм.

В начале растекания капли в принимающей жидкости формируется тонко структурированная полоска высотой  $h_b = 0.63$  мм и диаметром  $d_b = 4$  мм, сравнимым по ширине с диаметром капли

**Таблица 1.** Геометрия каверны и волокнистой оболочки

$l$ , мм	$t$ , мс	0.25	0.5	0.75	1.25
Диаметр каверны $d_c$		4.06	5.23	6.2	6.65
Глубина каверны $h_c$			0.45	1	1.54
Высота структуры $h_i$ ( $h_b$ оболочки)		0.63	0.8 (0.57)	0.96 (0.38)	1.05 (0.37)
Радиус кривизны дна $R_m$		9.46	8.6	6.54	6.2

$D = 4.2$  мм, хотя успела погрузиться только ее вершина высотой  $h_d = 0.6$  мм (рис. 1б). Условия регистрации не позволяют выделить отдельные элементы быстро эволюционирующей структуры, но сравнение многочисленных изображений картин первичного слияния в независимых опытах позволяет считать, что ее составляют отдельные волокна, состоящие из вещества капли (воды), разделенные прослойками принимающей жидкости (роданида аммония). Различия коэффициентов преломления сред в данной технике эксперимента (на просвет с боковой подсветкой) обеспечивают контрастность изображения, как и в прямом теневом методе [12].

В течение  $\Delta t = 0.25$  мс верхняя кромка капли опускается на  $\Delta h_d = 0.6$  мм (рис. 1в), при этом нижняя кромка полосчатой структуры успевает продвинуться на расстояние  $\Delta h_m = 0.32$  мм (скорость продвижения границы  $u_f = 1.3$  м/с). Появившиеся прозрачные неоднородности оптического изображения под основанием капли толщиной  $h_c = 0.45$  мм здесь отображают растущую каверну. На следующем кадре (г) верхнюю часть погружающейся капли над поверхностью раздела окружает облако шипов с вылетающими брызгами. Под свободной поверхностью высвечивается каверна, нижняя часть которой окружена волокнистой оболочкой высотой  $h_i = 0.96$  мм. Сравнение кадров *в* и *г* показывает, что в толщу жидкости продвигается вся группа возмущений, включающая и каверну, и волокнистую оболочку, высота которой монотонно растёт.

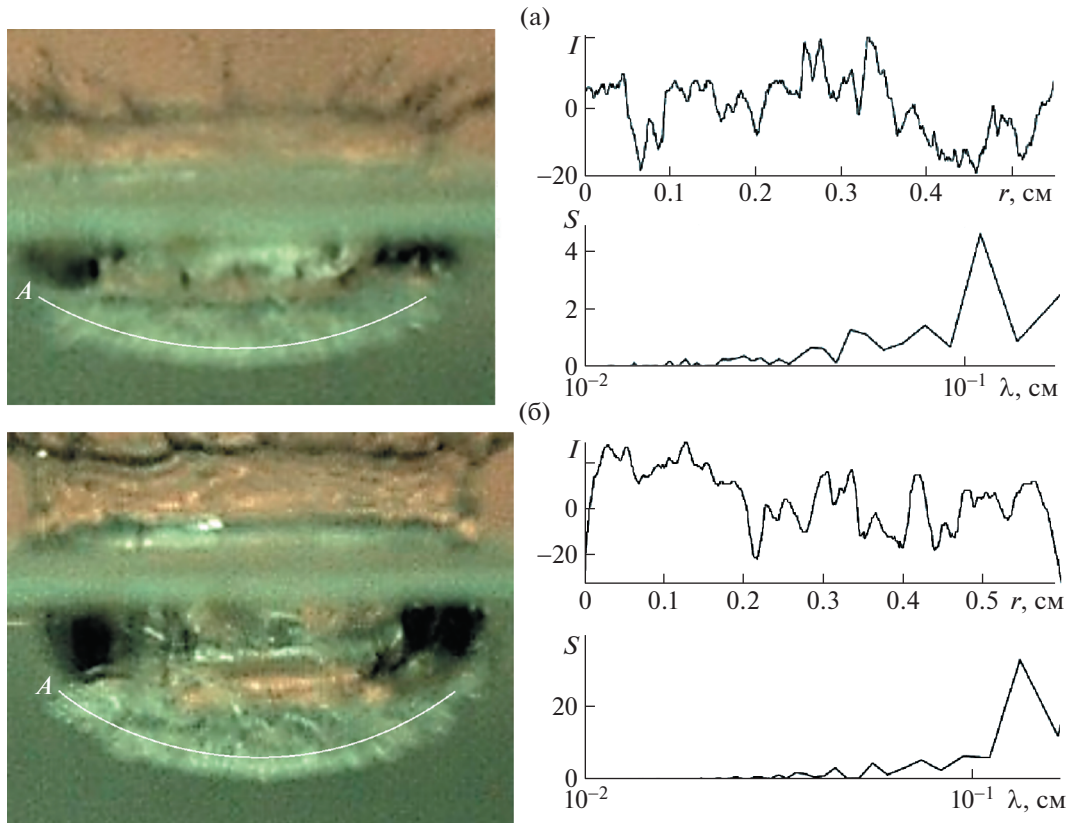
В данной фазе процесса слияния глубина каверны непрерывно увеличивается (скорость продвижения дна составляет  $u_c \approx 1.2$  м/с). Длина волокон в центре картины составляет  $l_f \sim 1$  мм и постепенно уменьшается по мере углубления каверны. Над свободной поверхностью картина течения жидкости традиционная. В толще жидкости (рис. 1д), где продолжается формирование каверны, идет реструктуризация прилегающего волокнистого слоя, который на приводимой фотографии выглядит как структурированная серая полоска высотой  $h_b = 1.05$  мм, диаметром  $d_b = 6.3$  мм, радиусом кривизны  $R_m = 6.2$  мм. Высота каверны составляет 1.54 мм.

Геометрические параметры течения около растущей каверны приведены в табл. 1. Диаметр и глубина каверны со временем монотонно растут.

Радиус кривизны дна  $R_m$  прогрессивно убывает по мере трансформации формы каверны в сферическую. По мере развития каверны скорость перемещения волокон падает, их изображения становятся более четкими, особенно на боковых участках изображения. Волокнистая структура покрывает всю поверхность каверны при  $t = 1.75$  мс (рис. 1е) вплоть до свободной поверхности, и наиболее четко выражена в секторе  $\Delta\varphi = 68^\circ$  в центре течения.

С прекращением поступления нового вещества по окончании растекания капли удлинение волокон прекращается, структурированность течений становится более выраженной. В центральной части кадра (рис. 1ж) выражен волокнистый слой 1. Под дном каверны наблюдается утолщение волокон. В верхней части около стенки каверны волокна воды размываются. Вся каверна оказывается покрытой слоем жидкости промежуточной плотности 2 – результатом разбавления раствора роданида аммония просочившейся с волокнами водой.

Диффузионные процессы на малых масштабах (толщина волокон  $\delta \sim 0.1$  мм) протекают достаточно быстро, и практически всю поверхность каверны покрывает промежуточный слой 3, отделенный резкой границей от базового раствора роданида аммония. Контуры регулярно расположенных неоднородностей с шагом до  $\Delta h = 1.9$  мм у боковой стенки каверны 4 в промежуточном слое на рис. 1з аналогичны оголовкам вихревых структур, визуализированных в [17].



**Рис. 2.** Тонкая структура оболочки каверны при слиянии капли воды ( $D = 4.2$  мм,  $U = 3.1$  м/с) с 20% раствором роданида аммония: а, б –  $t = 1.25$  и  $2.25$  мс (кадры д, ж на рис. 1). Фотометрирование проведено вдоль линии А:  $I$  – интенсивность света,  $S$  – пространственный спектр,  $r$  – расстояние вдоль линии,  $\lambda$  – масштаб микро-структуры.

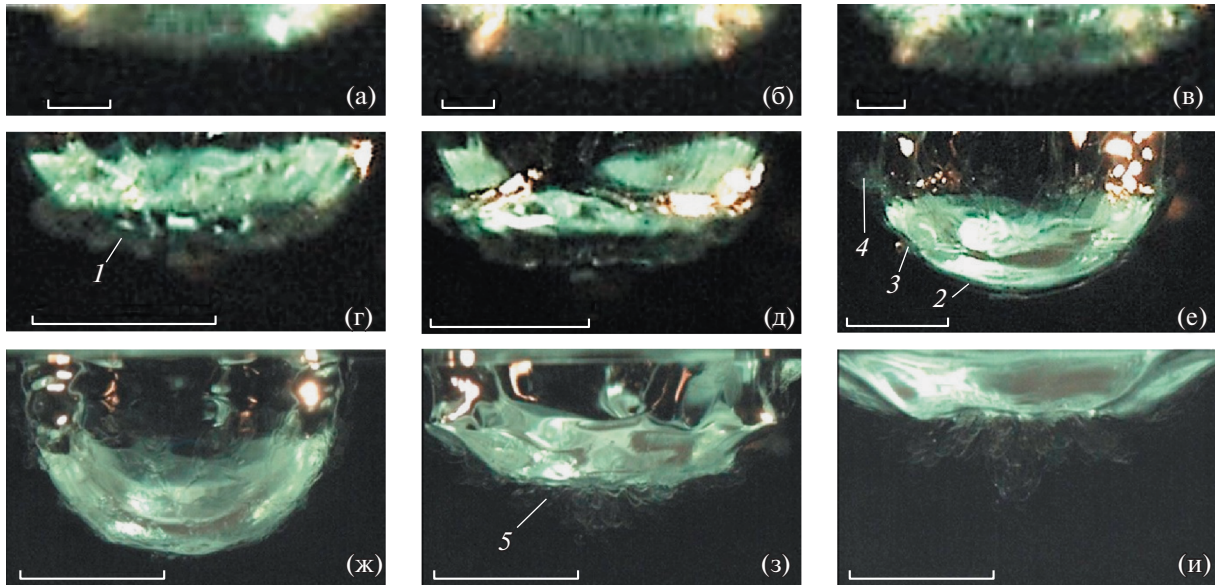
Продолжающая рост каверна растягивает примыкающий слой промежуточной плотности, толщина которого прогрессивно уменьшается, причем наиболее быстро в центре дна каверны, где она не превышает  $h_b = 0.35$  мм. Под свободной поверхностью образуется промежуточный слой 5 толщиной до  $h_b = 0.7$  мм справа и  $h_b = 0.67$  мм слева от каверны. Верхний край венца сгладился, по его поверхности бегут волны значительной амплитуды (рис. 1и).

На внутренней стороне стенки каверны вода распределена неравномерно и образует сетчатый рисунок. Струйки воды движутся по линиям сетки, собираются в ее узлах, частично просачиваются в принимающую жидкость и формируют мелкие вихорьки на коротких ножках, как и в [18]. В фазе максимального заглубления каверны (рис. 1к) толщина оболочки не превышает  $h_b = 0.3$  мм, на боковых поверхностях ее толщина переменная (максимальное значение составляет  $h_b = 1.22$  мм в областях просачивания воды, образующей вторгающийся вихорек 5 [17]).

Вихорьки, которые становятся более выраженным в стадии коллапса каверны (рис. 1л), постепенно вытягиваются приповерхностным течением и трансформируются в вытянутые петли б (рис. 1м). По мере схлопывания каверны число петель увеличивается, и к началу роста всплеска петли достигают максимальной длины.

Фотометрия увеличенного изображения волокнистой структуры у дна каверны на рис. 1д, 1л ж и пространственные спектры полученных сигналов приведены на рис. 2. На графике представлена зависимость интенсивности света  $I$  от расстояния  $r$  вдоль центральной линии, эквидистантной основанию (светлая полоска) и пространственный спектр возмущений  $S$  как функция масштаба  $\lambda$ . В картине возмущений выделены масштабы  $l = 0.5, 0.8$  и  $1.1$  мм при  $t = 1.25$  мс и  $l = 0.7, 0.9$  и  $1.3$  мм при  $t = 2.25$  мс. Естественное утолщение волокон обусловлено действием процессов





**Рис. 3.** Эволюция картины течения при слиянии капли рапы с водой ( $D = 4.6$  мм,  $U = 3.1$  м/с,  $Re_d = 9700$ ,  $Fr_d = 280$ ,  $We_d = 920$ ,  $Bo = 3.25$ ,  $Oh_d = 0.0031$ , Шмидта  $Sc_t = \nu_t / \kappa_t^m = 701$ ,  $R_p = -0.083$ ,  $R_\sigma = -0.014$ ,  $Ei_k^\sigma = 0.013$ ,  $Wt_k^\sigma = 400$ ): а–и –  $t = 0.5, 0.75, 1, 2, 3, 6.75, 23, 42, 52$  мс; длина маркера на кадрах а–в – 1 мм, е–е – 5 мм, ж–и – 10 мм.

диффузии в промежуточном слое, в котором волокна воды разделены оболочками из раствора роданида.

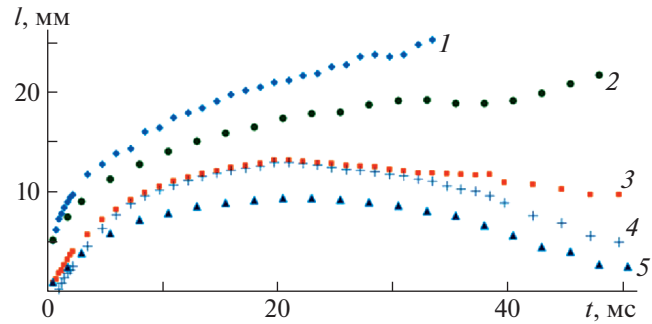
### 3.2. Слияние капли раствора поваренной соли с водой

Практический интерес представляет исследование процессов слияния и легкой жидкости с более тяжелой, и наоборот – более высокоплотной жидкости с более легкой. В опытах была использована рапа – насыщенный раствор поваренной соли в воде ( $\rho_s = 1.18$  г · см<sup>-3</sup>,  $\gamma_s^a = 63.6$  см<sup>3</sup> с<sup>-2</sup>,  $\nu_s = 0.02$  см<sup>2</sup> с<sup>-1</sup>). Коэффициент преломления водного раствора соли составляет  $n_s = 1.49$ . Большая разность коэффициентов преломления воды и солевого раствора позволяет провести визуализацию картины течения прямым теневым методом.

Общая волокнистая структура течения в толще принимающей жидкости сохраняется при слиянии капли большей плотности с принимающей жидкостью меньшей плотности. В данном эксперименте для регистрации оптически малоcontrastных элементов картины течения выбран метод “темного поля”. Выдержки из видеопленки эволюции течений при слиянии капли насыщенного раствора поваренной соли (рапы) с водой представлены на рис. 3. Здесь, как и в предыдущем опыте (рис. 1) стенку каверны пронизывают тонкие волокна раствора поваренной соли, формирующие область овальной формы высотой  $h_b = 0.88$  мм в центре и шириной  $d_b = 5.13$  мм (рис. 3а).

На изображении выделено волокнистое пятно из малоcontrastных элементов в центре течения и облако пятен на правом и левом краях. Толщина отдельных волокон оценивается в  $\delta_f = 0.1–0.18$  мм. Размеры области постепенно увеличиваются, и при  $t = 0.75$  мс (рис. 3б) глубина структуры достигает  $h_t = 1.27$  мм. Следы наклонных волокон прослеживаются по всему сечению. Со временем контрастность отдельных оптических элементов падает (рис. 3в), однако нижнюю кромку волокнистой структуры удается выделить довольно четко (глубина  $h_t = 1.88$  мм и ширина  $d_b = 7.3$  мм). Темным пятнам в центре верхней части рисунка соответствует нижняя кромка каверны.

По мере углубления (рис. 3г) форма нижней части каверны приближается к сферической, радиус кривизны, составляющий при  $t = 1$  мс  $R_m = 6$  мм, здесь равен  $R_m = 5.6$  мм. Высота волокни-



**Рис. 4.** Эволюция геометрии течений: 1, 2 — диаметры каверн капли рапы в воде и чистой воды в роданиде аммония; 3 — полная глубина возмущений при погружении капли рапы; 4, 5 — глубина каверны капли рапы в воде и капли воды в роданиде аммония (условия опытов на рис. 1, 3). Нулевой отметке на оси времени соответствует момент касания капель поверхности принимающей жидкости.

стого участка 1, составляющего при  $t = 2$  мс  $h_b = 1.45$  мм, далее начинает убывать и не превышает  $h_b = 1.16$  мм при  $t = 3$  мс (рис. 3д). При этом общая глубина каверны равна  $h_c = 5.7$  мм, а диаметр  $d_c = 11.7$  мм.

Четко очерченная каверна при  $t = 6.75$  мс (рис. 3е) глубиной  $h_c = 9.15$  мм и диаметром  $d_c = 14$  мм оконтурена тонкой однородной оболочкой 2, как и на рис. 1, толщина которой не превышает 0.5 мм. Выступ на боковой стенке каверны 3 и растущий вихорек 4 постепенно трансформируются в наклонные петли [18].

Форма каверны, достигающей максимальной глубины  $h_c = 12.9$  мм при  $t = 23$  мс (рис. 3ж), близка к сферической, искаженной бегущими капиллярными волнами. Оболочка вокруг дна каверны разрывается на отдельные волокна толщиной до  $\delta_f = 0.15$  мм, прилегающие к оболочке. В контуре коллапсирующей каверны выражены угловатые выступы, ребра и более гладкие впадины (рис. 3з). Под плоским дном каверны остаются системы тонких волокон 5, занимающие область шириной  $\delta_s = 0.28$  мм.

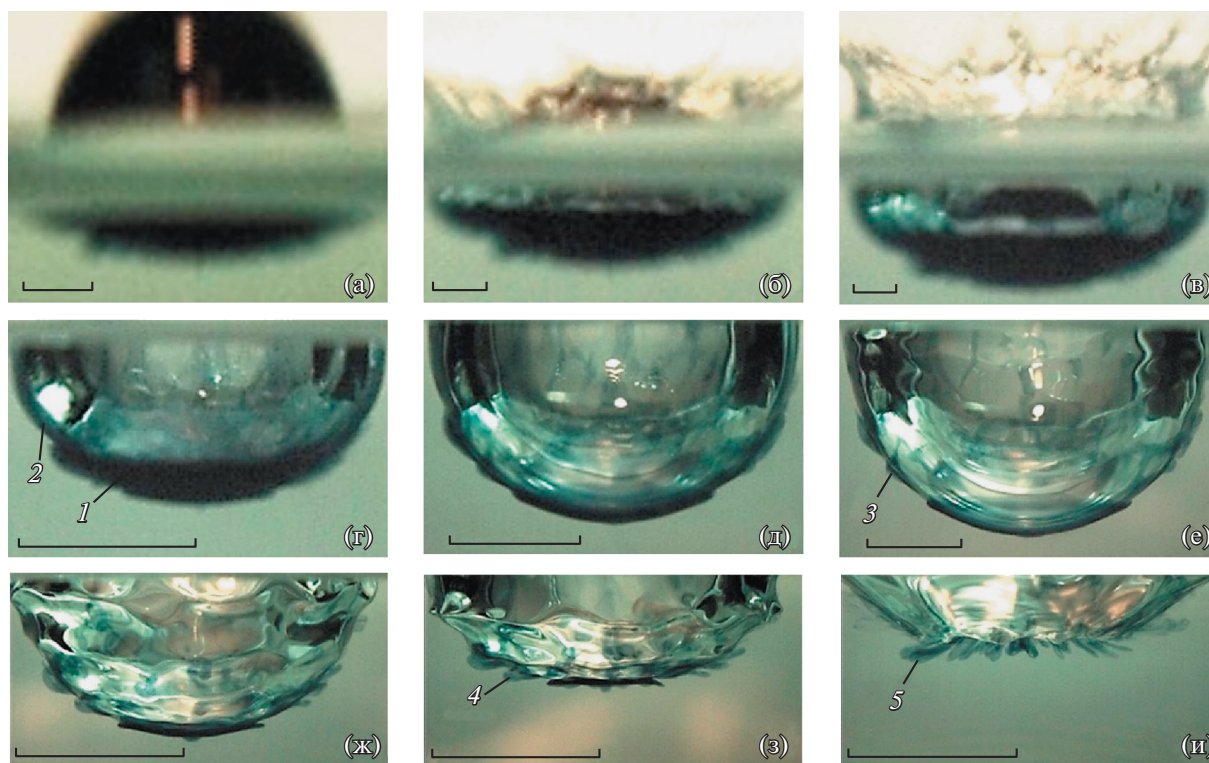
Постепенно контур дна каверны (рис. 3и), под которой остается область высотой  $h_b = 5.65$  мм, заполненная отдельными волокнами и наклонными петлями, как и в [18], сглаживается.

Изменение параметров геометрии структурных компонентов по мере эволюции течений приведено на рис. 4. Наибольшие размеры имеет каверна, формируемая растекающейся каплей раствора соли в воде (кривая 1). Гладкая часть кривой на участке  $0 < t < 33.5$  мс достаточно точно аппроксимируется функцией  $l(t) = 7.8 \times t^{1/3}$ . Последующие вариации размеров вызваны прохождением трехмерных капиллярных волн по стенкам венца и каверны.

Меньшие размеры имеет геометрически подобная каверна  $l(t) = 6.4 \times t^{1/3}$ ,  $0 < t < 33$  мс, образующаяся при слиянии капли воды с раствором роданида (кривая 2). Зависимости полной глубины области возмущения, включающей волокна погружающейся жидкости,  $h_f$  и каверны в центре области  $h_c$  (кривые 3, 4), совпадают на начальном участке и аппроксимируются  $h(t) = 4.2 \times t^{0.5} - 2$ ,  $0 < t < 10$  мс,  $[h] = \text{мм}$ ,  $[t] = \text{мс}$ .

Общая глубина области возмущения при погружении капли воды в раствор роданида аммония на участке  $0 < t < 8$  мс, которая аппроксимируется кривой 5  $h(t) = 1.8 \times t^{2/3}$ , меньше, чем у такой же капли раствора соли, что является следствием меньшей плотности чистой воды. Более высокий темп роста глубины каверны воды в роданиде аммония объясняется дополнительным вкладом ДППЭ, значение которой в последнем случае наибольшее.

Видеограммы картины слияния насыщенного раствора пищевой соды  $\text{NaHCO}_3$  с водой, практически совпадающей с приведенными на рис. 3, для краткости не приводятся.



**Рис. 5.** Эволюция картины течения при слиянии капли раствора чернил с водой ( $D = 4.3$  мм,  $U = 3.1$  м/с,  $Re_d = 13\,300$ ,  $Fr_d = 228$ ,  $We_d = 570$ ,  $Bo = 2.5$ ,  $Oh_d = 0.0018$ ,  $E\Gamma_k^\sigma = 0.02$ ,  $W\Gamma_k^\sigma = 600$ ): а–и –  $t = 0.5, 1, 1.75, 3.5, 8, 20.5, 33, 38, 45.5$  мс; длина маркера на кадрах (а–в) – 1 мм, (г–е) – 5 мм, (ж–и) – 10 мм.

### 3.3. Слияние капли раствора чернил с водой

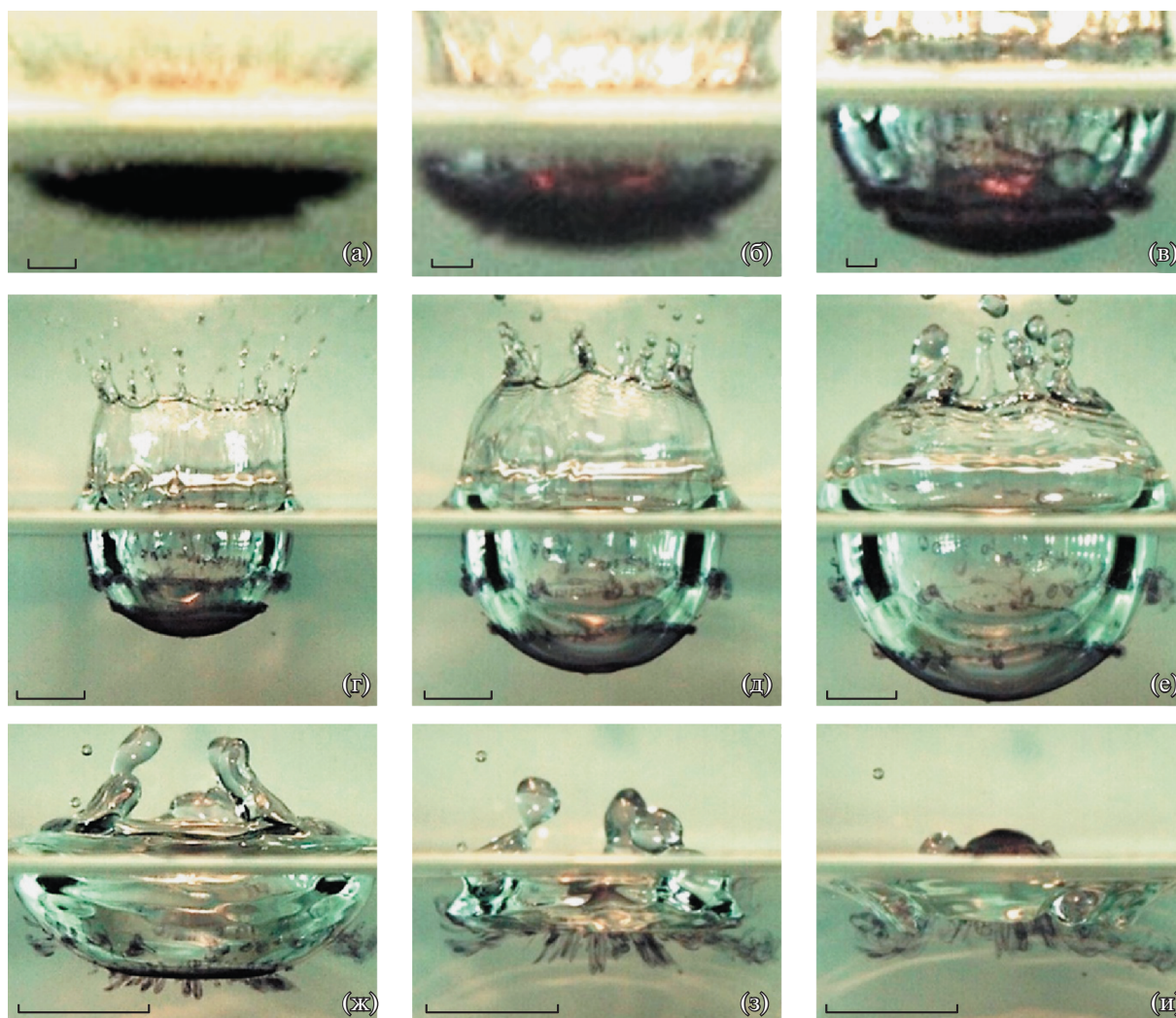
Общие элементы картин течений, представленных на рис. 1 и 3, сохраняются и в случае падения каплей воды, окрашенных чернилами, в воду, однако отдельные детали не визуализируются в силу непрозрачности вещества – рис. 5. Под сливающейся каплей в толще жидкости возникает выпуклый окрашенный круговой сектор (угол при вершине  $\Delta\phi = 52^\circ$ , высота 0.74 мм), горизонтальный размер которого  $d_c = 5.06$  мм (оболочка каверны), превышает диаметр падающей капли  $D = 4.3$  мм (рис. 5а). Нижний край области вторжения неровный, в нем прослеживаются отдельные выступы шириной 0.1 мм и более гладкие впадины 0.2 мм.

При 1 мс (рис. 5б) в картине течений появляется плоское дно каверны (глубина составляет  $h_c = 0.8$  мм), к которому примыкает сектор (угол при вершине  $\Delta\phi = 68^\circ$ , высота  $h = 1.44$  мм, диаметр  $d_f = 6.7$  мм), заполненный окрашенными волокнами. В каверне при  $t = 1$  мс прослеживаются отдельные ребра и темные пятна – следы струек, выносящих краску в шипы на кромке венца и в вылетающие с их вершин капельки.

По мере углубления дно каверны становится более четко выраженным, толщина волокнистого слоя продолжает увеличиваться, при этом его нижняя кромка сглаживается (рис. 5в). Длина волокон перестает расти после полного погружения капли, толщина окрашенного слоя 1 (рис. 5г) начинает уменьшаться, на нижней кромке прослеживаются только крупные неоднородности с шагом  $\Delta l = 0.9$  и 1.5 мм. Отдельные тонкие волокна 2 визуализируются на стенке в верхней части каверны (рис. 5г).

Промежуточный окрашенный слой охватывает всю поверхность каверны при  $t = 8$  мс (рис. 5д). В нем чернила распределены неравномерно, наибольшая часть сосредотачивается в нижнем секторе, над которым располагаются два кольца шириной  $d_r = 10.3$  и 13 мм и высотой  $h_r = 1.18$  и





**Рис. 6.** Эволюция картины течения при слиянии капли раствора чернил с водой ( $D = 4.3$  мм,  $U = 5.2$  м/с,  $Re_d = 22300$ ,  $Fr_d = 640$ ,  $We_d = 1600$ ,  $Bo = 2.5$ ,  $Oh_d = 0.0018$ ,  $E_{rk}^{\sigma} = 0.007$ ,  $W_{rk}^{\sigma} = 215$ ): кадры (а–и) –  $t = 0.5, 1, 2.5, 5.25, 10.75, 23, 44, 54, 62$  мс, длина маркера на кадрах (а–в) составляет 1 мм, (г–е) – 5 мм, далее – 10 мм.

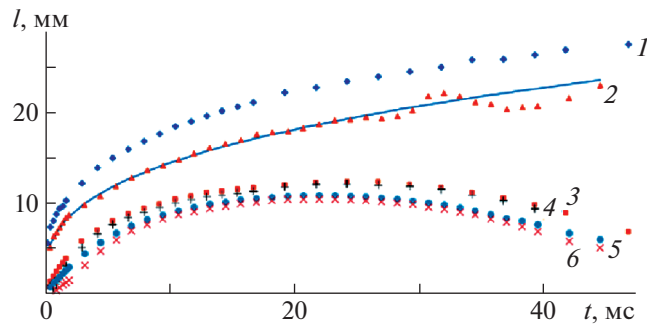
1.95 мм. При обработке данных измерялись глубина каверны и размер всей области подводного возмущения, включающий каверну и примыкающий волокнистый (промежуточный) слой.

В фазе максимального углубления каверны ( $t = 20.5$  мс рис. 5е) окрашенный промежуточный слой истончается до  $\delta_s = 0.33$  мм в центре и разбивается на отдельные кольцевые слои 3. Отдельные волокна прослеживаются внутри каверны.

Стенки каверны теряют гладкость при  $t = 33$  мс (рис. 5ж), на них располагаются кольцевые возмущения высотой  $h_r = 2.3$  мм, в центре которых находятся окрашенные полосы промежуточного слоя.

В стадии активного схлопывания каверны стенки покрываются волокнами и петлями 4 (рис. 5з), длина которых растет по мере уменьшения ее глубины. Со временем число и длина наклонных петель 5 растут.

Основные особенности структуры течения сохраняются при увеличении скорости контакта капли, когда ДППЭ не превышает 0.7% кинетической энергии капли. Здесь на ранней стадии эволюции быстро формируется волокнистая структура (рис. 6а), которая проталкивается вниз



**Рис. 7.** Эволюция геометрии течений: кривая 1, 2 – диаметры каверн капли раствора чернил в воде при  $U = 3.1$  и  $5.2$  м/с, 3, 4 – полный размер возмущения и глубина каверны ( $U = 5.2$  м/с), 5, 6 – полный размер возмущения и глубина каверны ( $U = 3.1$  м/с) (условия опытов приведены на рис. 5, 6). Нулевой отметке на оси времени соответствует момент касания капель поверхности принимающей жидкости.

растущей каверной (диаметром  $d_c = 7.3$  мм и глубиной  $h_c = 1.34$  мм, радиус кривизны дна  $R_m = 7.7$  мм). Одновременно над свободной поверхностью образуется разлетающаяся пелена с системой шипов и последовательностями брызг на их вершинах.

Плоское основание – дно формирующейся каверны высотой  $h_c = 1.46$  мм, стенки которой окрашены неравномерно (рис. 6б). Увеличение размеров каверны сопровождается стеканием окрашенной жидкости в нижнюю часть, где она собирается в угловом секторе  $\Delta\varphi = 70^\circ$  диаметром  $d_f = 7.5$  мм (рис. 6в). На боковых стенках толщина промежуточного окрашенного слоя достигает  $\delta_s = 0.44$  мм. В картине распределения краски выражена циркулярная структура.

С дальнейшим погружением растет высота венца (рис. 6г). Выделена шапочка высотой  $h_f = 2$  мм, покрывающая основание каверны, и окрашенный кольцевой слой на расстоянии 2.3 мм от нее, к которому примыкают ярко окрашенные вертикальные ребра. По мере эволюции течения окраска просветляется. Выраженными остаются только границы, которые теряют сплошность и распадаются на отдельные кольцевые вихри (рис. 6д).

В фазе максимального заглубления каверны (рис. 6е) краска из отдельных компактных областей выдавливается в принимающую жидкость в форме отдельных вихорьков на коротких ножках. С началом схлопывания каверны вихорьки вытягиваются в петли, следующие за уплощающимся дном каверны (рис. 6з). В фазе растущего всплеска окрашенная жидкость втягивается в приповерхностный слой и сосредотачивается на его вершине (рис. 6и).

Изменение размеров структурных компонентов по мере эволюции течений приведено на рис. 7. В экспериментах диаметры каверн увеличиваются со временем пропорционально кубическому корню, глубина каверны на начальном этапе растет быстрее, чем ширина. Все размеры растут с увеличением скорости контакта капли. Наибольшие размеры имеет каверна, формируемая растекающейся каплей раствора чернил при скорости контакта  $U = 5.2$  м/с (кривая 1). Гладкая часть кривой на участке  $0 < t < 45$  мс достаточно точно аппроксимируется функцией  $l(t) = 8.9 \times t^{1/3}$ . Последующие вариации размеров вызваны прохождением трехмерных капиллярных волн по стенкам венца и каверны.

Меньшие размеры  $l(t) = 6.7 \times t^{1/3}$ ,  $0 < t < 45$  мс имеет каверна, образующаяся при падении капли с контактной скоростью  $U = 3.1$  м/с. Зависимости полной глубины области возмущения, включающей волокна погружающейся жидкости,  $h_f$  и каверны в центре области  $h_c$  (кривые 3, 4 для  $U = 5.2$  м/с и кривые 5, 6 для  $U = 3.1$  м/с) совпадают на начальном участке и аппроксимируются функциями  $l(t) = 2.5 \times t^{2/3}$  и  $l(t) = 2 \times t^{2/3}$  на участке  $0 < t < 10$  мс.

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Безразмерные параметры проведенных опытов, в которых регистрировались картины слияния с водой капель различных жидкостей, представлены в табл. 2. В столбце I приведены условия



Таблица 2. Параметры экспериментов

	I		II		III	
	Iint	Ish	IIint	IIsh	IIIint	IIIsh
$U, \text{ м/с}$	0.34–1	1.4–5.2	0.34–1	1.4–5.2	0.34–1	1.4–5.2
$R_p$		–		–0.02		–0.083
$R_\sigma$				0.06		–0.014
$Bo$		2.5		2.8		3.1
$Oh_d$		0.0018		0.0023		0.0032
$Re_d$	1500–4300	6000–22000	1200–3700	5100–19000	900–2700	3700–14000
$Fr_d$	2.7–23.7	47–640	2.8–24.3	48–657	2.6–22.7	44–613
$We_d$	7–60	116–1600	8–67	132–1800	8–70	139–1900
$Et_k^\sigma$	0.2–1.75	0.0075–0.1	0.17–1.54	0.0066–0.09	0.18–1.47	0.0063–0.09
$Wt_k^\sigma$	$6 \times 10^3 - 5 \times 10^4$	$2 \times 10^2 - 30 \times 10^2$	$5 \times 10^3 - 4 \times 10^4$	$180 - 26 \times 10^2$	$5 \times 10^3 - 4 \times 10^4$	$180 - 26 \times 10^2$

опытов по растеканию капли раствора ализариновых чернил (разбавленного в отношении 1: 200, плотности жидкостей практически совпадают), в столбцах II и III – для капель насыщенных растворов соды и поваренной соли.

При малых скоростях капли наблюдается интрузивный режим слияния, в котором втекающая жидкость образует компактный объем в принимающей жидкости [16]. При больших скоростях падения, когда каверна начинает формироваться с момента первичного контакта, прямым теневым методом и по регистрации картины распределения окрашенной жидкости капли по поверхности каверны и венца впервые визуализированы тонкие струйки вещества капли, пронизывающие дно каверны и вторгающиеся в принимающую жидкость. Тонкие волокна образуют сплошную оболочку, покрывающую дно и стенки каверны – “мшаник”.

В колонках Iint, IIint, IIIint приведены значения параметров, при которых наблюдался интрузивный режим слияния, в колонках Ish, IIsh, IIIsh – ударный режим с образованием каверны, венца и всплеска. В опытах, проведенных с каплями одинакового диаметра значения чисел  $R_p$ ,  $R_\sigma$ ,  $Bo$ ,  $Oh_d$  оставались неизменными во всех опытах с выбранными веществами.

Уменьшение скорости удлинения волокон по мере слияния капли сопровождается изменением структуры и выравниванием градиентов плотности в оболочке. По окончании слияния капли дно каверны покрывает промежуточный слой, содержащий вещество и капли, и принимающей жидкости, градиенты концентрации в котором выравнивают процессы молекулярной диффузии. Слой утончается по мере роста каверны.

Факт формирования прилегающего волокнистого слоя наблюдался во всех проведенных опытах и при вторжении более плотной жидкости в менее плотную: раствор чернил  $R_p = -0.007$  или поваренной соли  $R_p = -0.083$  в воду, и менее плотной – капель воды в раствор роданида аммония  $R_p = 0.023$ , что указывает на определяющую роль процессов высвобождения доступной потенциальной энергии и малое влияние инерциальных эффектов на процесс образования волокон, протыкающих оболочку каверны. По мере углубления каверны вещество капли перераспределяется по ее поверхности и образует сложную трехмерную структуру.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана методика высокоразрешающей визуализации тонкой структуры картины течения импакта капли на поверхности и в толще принимающей жидкости. Методами высокоскоростной видеорегистрации впервые прослежена эволюция тонкой структуры картины переноса вещества капли под деформированной поверхностью жидкости. В выполненных опытах капля воды свободно падала в раствор роданида аммония, а капли раствора поваренной соли, соды или чернил – в воду.

Во всех опытах на начальном этапе слияния капли с покоящейся принимающей жидкостью в ударном режиме стенки каверны пронизывают тонкие волокна, содержащие вещество капли. Волокна, разделенные оболочками принимающей жидкости, образуют промежуточный слой, покрывающий дно и стенки каверны. Длительность фазы существования волокнистой оболочки не превышает 10 мс в условиях проведенных опытов.

При умеренных скоростях капли в распределении краски по поверхности растущей каверны выражена пятнистая структура, при больших – кольцевая. Неоднородное распределение жидкости капли по дну каверны обеспечивает действие инерционного механизма формирования тонковолокнистых петель при схлопывании каверны, как показано в [18]. Управление процессом формирования и геометрией тонковолокнистых течений может быть использовано для повышения эффективности тонких химических, нефте- и биохимических технологий.

Эксперименты проведены на стендах УИУ “ГФК ИПМех РАН”. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П “Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью”, <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rogers V.B.* On the formation of rotating rings by air and liquids under certain condition of discharge // *Am. J. Sci. Arts. Second Ser.* 1858. V. 26. P. 246–258.
2. *Worthington A.M.* On impact with a liquid surface // *Proc. R. Soc. London.* 1882. V. 34. Is. 2. P. 217–230.
3. *Thomson J.J., Newall H.F.* On the formation of vortex rings by drops falling into liquids, and some allied phenomena // *Proc. R. Soc. London.* 1885. V. 29. P. 417–436.
4. *Thompson D.W.* On Growth and Form. 1992. Dover reprint of 1942 / 2nd ed. (1st ed., 1917).
5. *Степанова Е.В., Чашечкин Ю.Д.* Перенос маркера в составном вихре // *Изв. РАН. МЖГ.* 2010. № 6. P. 12–29.
6. *Степанова Е.В., Чаплина Т.О., Трофимова М.В., Чашечкин Ю.Д.* Структурная устойчивость процесса переноса вещества из компактного пятна в составном вихре // *Изв. РАН. ФАО.* 2012. Т. 48. № 5. С. 578–590.
7. *Чашечкин Ю.Д.* Перенос вещества окрашенной капли в слое жидкости с бегущими плоскими гравитационно-капиллярными волнами // *Изв. РАН. ФАО.* 2022. Т. 58. № 2. С. 218–229.
8. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* Множественные выбросы брызг при ударе капли // *Доклады РАН.* 2020. Т. 494. С. 42–46.
9. *Michon G.J., Josserand C., Séon T.* Jet dynamics post drop impact on a deep pool // *Phys. Rev. Fluids.* 2017. V. 2 (2). P. 023601.
10. *Чашечкин Ю.Д.* Визуализация тонкой структуры возмущений поверхности жидкости течениями, вызванными упавшей каплей // *ПММ.* 2019. Т. 83. № 3. С. 403–412.
11. *Zhu G.-Z., Li Z.-H., Fu D.-Y.* Experiments on ring wave packet generated by water drop // *Chinese Sci. Bull.* 2008. V. 53. № 11. P. 1634–1638.
12. *Чашечкин Ю.Д.* Пакеты капиллярных и акустических волн импакта капли // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки.* 2021. № 1 (94). С. 73–92.
13. *Li E.Q., Thoraval M.-J., Marston J.O., Thoroddsen S.T.* Early azimuthal instability during drop impact // *J. Fluid Mech.* 2018. V. 848. P. 821–835.
14. *Ильиных А.Ю., Чашечкин Ю.Д.* Тонкая структура картины растекания свободно падающей капли в покоящейся жидкости // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 4. С. 3–8.
15. *Berberović E., van Hinsberg N.P., Jakirlić S., Roisman I.V., Tropea C.* Drop impact onto a liquid layer of finite thickness: Dynamics of the cavity evolution // *Phys. Rev. E.* 2009. V. 79, 036306.
16. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* Задержка формирования каверны в интрузивном режиме слияния свободно падающей капли с принимающей жидкостью // *Докл. РАН.* 2021. Т. 496. С. 34–39.

17. *Чашечкин Ю.Д.* Эволюция тонкоструктурного распределения вещества свободно падающей капли в смешивающихся жидкостях // Изв. РАН. ФАО. 2019. Т. 55. № 3. С. 67–77.
18. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* Формирование системы наклонных петель в течениях импакта капли // Докл. РАН. 2021. Т. 499. С. 39–48.
19. *Chashechkin Y.D.* Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V. 10. Iss. 4. 286.
20. *Гиббс Дж. В.* О равновесии гетерогенных веществ. Термодинамические работы. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
21. *Feistel R.* Thermodynamic properties of seawater, ice and humid air: TEOS-10, before and beyond // Ocean. Sci. 2018. V.14. P. 471–502.
22. *Эйзенберг Д., Кауцман В.* Структура и свойства воды. Л-д: ГИМИЗ, 1975. 280 с.
23. *Маленков Г.Г.* Структура и динамика жидкой воды // ЖСХ. 2006. Т. 47, Приложение. С. S5–S35.
24. *Teschke O., de Souza E.F.* Water molecule clusters measured at water/air interfaces using atomic force microscopy // Phys. Chem. Chem. Phys. 2005. V. 7 (22). P. 3856–3865.
25. *Бункин Н.Ф., Индукаев К.В., Игнатьев П.С.* Спонтанная самоорганизация газовых микропузырей в жидкости // ЖЭТФ. 2007. Т. 131 (3). С. 539–555.
26. УИУ “ГФК ИПМех РАН”: <http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#equip>.