ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 6, с. 55–62

УДК 532.517

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В КОАКСИАЛЬНОМ КАНАЛЕ

© 2022 г. Е. И. Борзенко[a,]*, О. А. Дьякова[a], Г. Р. Шрагер[a]

[a] *Томский государственный университет, Томск, Россия*

**E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru*

Поступила в редакцию 20.05.2022 г.
После доработки 21.06.2022 г.
Принята к публикации 21.06.2022 г.

Исследовано неизотермическое течение неньютоновской жидкости в поле силы тяжести с учетом диссипативного разогрева, зависимости эффективной вязкости от температуры и наличия свободной поверхности, реализуемое при заполнении коаксиального канала. Реологическое поведение среды описывается моделью Cross-WLF. Задача решается численно с использованием оригинальной вычислительной технологии на основе метода контрольного объема и метода инвариантов для удовлетворения граничных условий на свободной границе. Продемонстрированы характеристики потока в процессе заполнения при различных значениях определяющих параметров.

Ключевые слова: неизотермическое течение, свободная поверхность, неньютоновская жидкость, коаксиальный канал, численное моделирование

DOI: 10.31857/S056852812260028X

Течения жидкости со свободной поверхностью широко распространены в природе и технических приложениях. В частности, в металлургии при переработке полимерных материалов методом литья реализуется процесс заполнения емкостей жидкой средой, характерной особенностью которого является наличие свободной поверхности. Течения подобного типа во многих случаях осуществляются в неизотермических условиях, а реологическое поведение жидких сред зависит от интенсивности тензора скоростей деформаций и температуры [1]. Плоские и осесимметричные течения вязких сред при заполнении каналов достаточно хорошо изучены. Подробное описание кинематики изотермического течения вязкой жидкости и эволюции свободной поверхности изложено в [2–5]. Влияние вязкой диссипации и зависимости вязкости от температуры на характеристики гидродинамического процесса изложено в [6–9]. Учет неньютоновского поведения жидкости при заполнении плоских каналов и круглых труб реализуется в [10–16]. Следует отметить не достаточно полное представление результатов исследования течений жидкости при заполнении коаксиального канала [1, 17–19]. Особенности технологии литьевого формования изделий описаны в [1]. В [17] представлены исследования эволюции формы свободной границы для неизотермического течения аномально вязкой жидкости. В [18] представлены результаты численного моделирования ползущего изотермического течения нелинейно-вязкопластичной жидкости, описана динамика выделенных макрообъемов. Процесс заполнения круглой трубы с центральным телом ньютоновской жидкостью исследован в [19].

Целью данной работы является исследование процесса заполнения коаксиального канала неньютоновской жидкостью с учетом вязкой диссипации и зависимости реологических свойств от температуры. В настоящей статье впервые представлены результаты исследования эволюции свободной поверхности, кинематических и динамических характеристик потока жидкости, описываемой реологической моделью Cross-WLF, при заполнении коаксиального канала в неизотермических условиях.

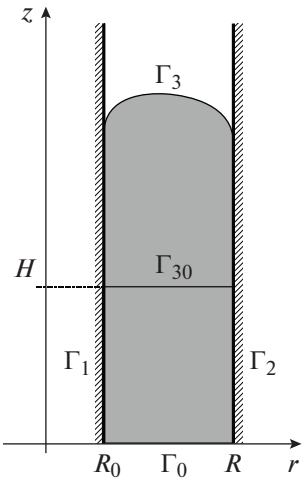

Рис. 1. Область течения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуется неизотермическое осесимметричное течение неньютоновской жидкости в поле силы тяжести с учетом диссипативного разогрева, зависимости эффективной вязкости от температуры и наличия свободной поверхности, реализуемое при заполнении коаксиального канала с внешним радиусом R и внутренним R_0. Математическая постановка задачи включает уравнения движения, неразрывности и энергии. Предполагается, что изменения теплоемкости, плотности и коэффициента теплопроводности в рассматриваемых температурных диапазонах незначительны, и поэтому считаются постоянными. Область течения схематично представлена на рис. 1.

Жидкость подается через входное сечение Γ_0 с заданным постоянным расходом и температурой. На внутренней Γ_1 и внешней Γ_2 стенках заданы значения температуры T_1 и T_2 соответственно и выполняется условие прилипания. На свободной поверхности Γ_3 реализуются условия отсутствия касательных напряжений и равенства нормального – внешнему давлению, которое без ограничения общности принимается равным нулю. Движение свободной границы осуществляется в соответствии с кинематическим условием. В начальный момент времени канал заполнен жидкостью до высоты $H = 2R - R_0$, свободная поверхность имеет плоскую горизонтальную форму Γ_{30}, а температура жидкости равна T_1.

Реологическое поведение среды описывается моделью Cross-WLF (Williams–Landel–Ferry) [20–22], согласно которой формула для определения эффективной вязкости имеет вид

$$\eta(\dot{\gamma}, T) = \eta_0(T)/[1 + (\eta_0(T)\dot{\gamma}/\tau^*)^{1-m}] \tag{1.1}$$

где $\eta_0(T) = \eta_1 \exp\left(\dfrac{A}{T - T^*}\right)$ – предельное значение вязкости при малых величинах интенсивности тензора скоростей деформации $\dot{\gamma}$, T – температура жидкости в потоке, η_1, τ^*, A, m и T^* – параметры модели. Данная модель адекватно описывает реологические свойства аморфных полимеров и часто используется в математических постановках задач о течениях подобных сред [23, 24].

Поставленная задача решается в безразмерных переменных. В качестве масштабов обезразмеривания выбраны следующие величины: длины – внешний радиус канала R, скорости – среднерасходная скорость во входном сечении U_0, времени – R/U_0, вязкости – величина η_1, давления – $\eta_1 U_0/R$. Безразмерная температура определяется формулой $\theta = (T - T^*)/T_1$. Таким образом, урав-

нения движения, неразрывности в векторной форме и уравнение энергии с сохранением обозначения для безразмерных переменных запишутся в виде

$$\mathrm{Re}\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\nabla p + \nabla(2\eta E) + \mathbf{W}$$
$$\nabla \times \mathbf{U} = 0$$
$$\mathrm{Pe}\frac{d\theta}{dt} = \nabla^2\theta + \mathrm{Br}\,\Phi$$

Здесь $\mathbf{U}$ – вектор скорости с компонентами U_r, U_z в цилиндрической системе координат (r, z), t – время, p – давление, E – тензор скоростей деформации, η – безразмерная эффективная вязкость, $\mathbf{W} = (0, -\mathrm{W})$, Φ – диссипативная функция. В постановку задачи вошли следующие безразмерные критерии: $\mathrm{Re} = \rho U_0 R/\eta_1$ – число Рейнольдса; $\mathrm{Pe} = c\rho U_0 R/\lambda$ – число Пекле; $\mathrm{Br} = \eta_1 U_0^2/(T_1\lambda)$ – число Бринкмана; $\mathrm{W} = \rho g R^2/(\eta_1 U_0)$ – число, характеризующее соотношение гравитационных и вязких сил, где ρ – плотность, g – ускорение силы тяжести, λ – коэффициент теплопроводности, c – теплоемкость.

Эффективная вязкость среды в безразмерном виде определяется формулой

$$\eta = \frac{\eta_0(\theta)}{1 + (C_1\eta_0(\theta)\times\dot{\gamma})^{1-m}}, \quad \eta_0(\theta) = \exp\left(\frac{C_2}{\theta}\right)$$

где $C_1 = \eta_1 U_0/\tau^* R$, $C_2 = A/T_1$ – безразмерные числа.

Граничные условия записываются следующим образом

$$\Gamma_0 : U_r = 0, \quad U_z = f_1(r), \quad \theta = f_2(r)$$
$$\Gamma_1 : U_r = 0, \quad U_z = 0, \quad \theta = \theta_1$$
$$\Gamma_2 : U_r = 0, \quad U_z = 0, \quad \theta = \theta_2$$
$$\Gamma_3 : \frac{\partial U_n}{\partial s} + \frac{\partial U_s}{\partial n} = 0, \quad -p + 2\eta\frac{\partial U_n}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial n} = 0$$

Здесь $\theta_1 = (T_1 - T^*)/T_1$ и $\theta_2 = (T_2 - T^*)/T_1$ – значения безразмерных температур на внутренней и внешней стенках канала; U_n и U_s – нормальная и касательная компоненты вектора скорости на свободной поверхности соответственно; $f_1(r), f_2(r)$ – функции скорости и температуры, соответствующие установившемуся течению данной жидкости в коаксиальном зазоре с заданным постоянным расходом, которые определяются численно в результате решения одномерной задачи. Математическая постановка одномерной задачи включает стационарные уравнения движения и энергии относительно координаты r с учетом диссипативного разогрева и формулы для эффективной вязкости (1.1) с условиями прилипания и заданной температурой на твердой стенке. Конечно-разностные аналоги уравнений системы записываются в форме, используемой для реализации метода прогонки. Совместное решение уравнений для получения стационарных полей скорости и температуры обуславливает организацию итерационного процесса.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Сформулированная задача решается численно методом контрольного объема для расчета характеристик потока. Алгоритм SIMPLE [25] применяется для удовлетворения уравнения неразрывности. Для численной реализации граничных условий на свободной поверхности используется метод инвариантов [26]. На линии трехфазного контакта используется условие проскальзывания при динамическом краевом угле, равном π [27].

Тестирование методики расчета проводилось для значений теплофизических характеристик полиэтилена марки PE2042E из экспериментальной работы [23] для случая заполнения коаксиального зазора с внешним радиусом 0.01 м со среднерасходной скоростью 0.02 м/с, что соответствует следующим значениям безразмерных критериев Re = 0.0001, W = 0.0244, Pe = 1252, C_1 = = 0.066, m = 0.3, R_0/R = 0.2. Температура стенок соответствует значениям, которые обеспечивают переработку полиэтилена данной марки методом литья под давлением.

Таблица 1. Значения характеристик свободной поверхности ($\theta_1 = \theta_2 = 0.55$, $C_2 = 1$, Br = 0.0045)

h_r	h_z	r_{max}	z_{max}	U_z
1/12	2/12	0.5028	2.9098	1.0743
1/25	2/25	0.5518	2.8903	1.0203
1/50	2/50	0.5749	2.8972	1.0108

Для проверки аппроксимационной сходимости проведена серия расчетов на последовательности сеток при температуре внутренней и внешней стенок $T_1 = T_2 = 200$°C. Сходимость проверяется по координатам и компоненте скорости U_z точки свободной поверхности с максимальным значением z в момент времени $t = 1$. Данные, представленные в табл. 1, демонстрируют сходимость.

Дальнейшие расчеты проводились на прямоугольной сетке с шагами по пространству $h_r = 1/25$ и $h_z = 2/25$ и шагом по времени $\Delta t = 10^{-4}$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Все представленные ниже результаты параметрических исследований получены для следующих значений безразмерных чисел: Re = 0.0001, W = 0.0244, Pe = 1252, $m = 0.3$, $C_1 = 0.066$, $R_0/R = 0.2$. Значения параметров, относительно которых определяются зависимости характеристик течения, помещены в подписях к рисункам и таблице. В процессе заполнения первоначально плоская свободная поверхность выгибается, принимая выпуклую форму, и перемещается вдоль канала со среднерасходной скоростью, что демонстрирует рис. 2. Как и в случае заполнения круглой трубы или плоского канала [9, 28], для коаксиального зазора наблюдается фонтанирующий характер течения. Отметим, что фонтанирующим течением принято называть движение среды в окрестности поверхности раздела двух несмешивающихся потоков, когда одна жидкость вытесняет другую [29].

На рис. 3а представлены линии тока в неподвижной системе координат, а на рис. 3б – в системе, движущейся со среднерасходной скоростью, в момент времени $t = 5$.

Дополнительную информацию о характере течения дают топограммы массораспределения порций жидкости, которые представляют собой объемы жидкости, последовательно поступающие в канал через входное сечение в течение заданного промежутка времени. На рис. 4 приведе-

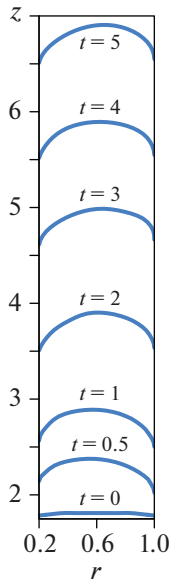

Рис. 2. Эволюция формы свободной поверхности ($\theta_1 = 0.55$, $\theta_2 = 0.66$, $C_2 = 1$, Br = 0.0045).

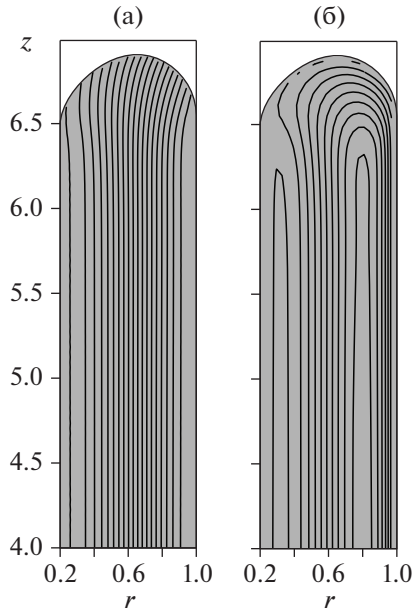

Рис. 3. Линии тока в неподвижной (а) и подвижной (б) системах координат в момент времени $t = 5$ ($\theta_1 = 0.55$, $\theta_2 = 0.66$, $C_2 = 1$, Br = 0.0045).

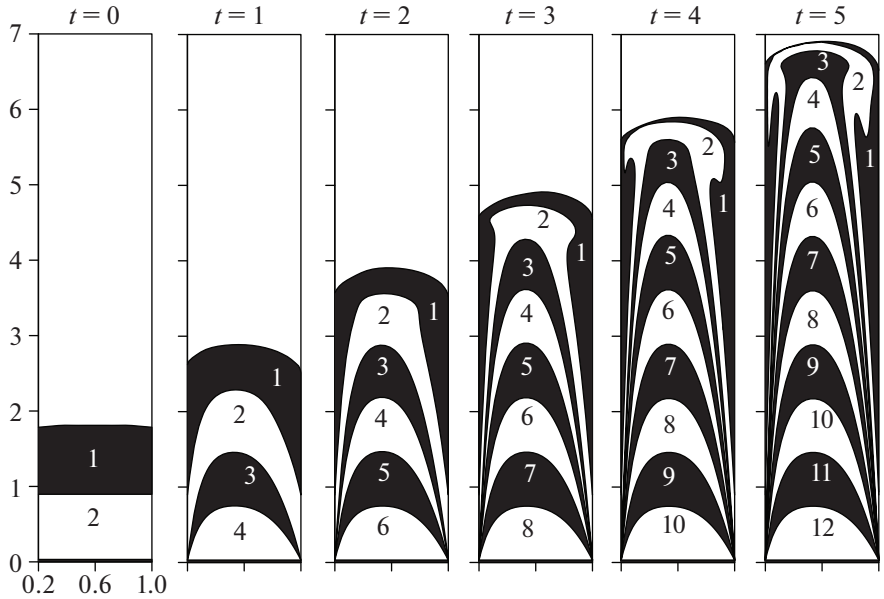

Рис. 4. Топограммы массораспределения в различные моменты времени при $\theta_1 = 0.55$, $\theta_2 = 0.66$, $C_2 = 1$, Br = 0.0045.

ны топограммы, в которых порции отличаются цветами, а цифрами обозначены их порядковые номера. В области одномерного течения порции деформируются в соответствии с профилем аксиальной скорости. В окрестности свободной поверхности порции приобретают характерную грибовидную форму и перераспределяются вдоль стенок канала.

Распределения характеристик потока в момент времени $t = 5$ представлены на рис. 5. Анализ распределений компонент вектора скорости и давления показывает, что в потоке условно можно выделить две области: зона двумерного течения в окрестности свободной поверхности и область одномерного течения в остальной части потока. Распределение вязкости (рис. 5г) также подтверждает описанную кинематику течения. Поле температуры имеет двумерный характер по всей области течения (рис. 5д).

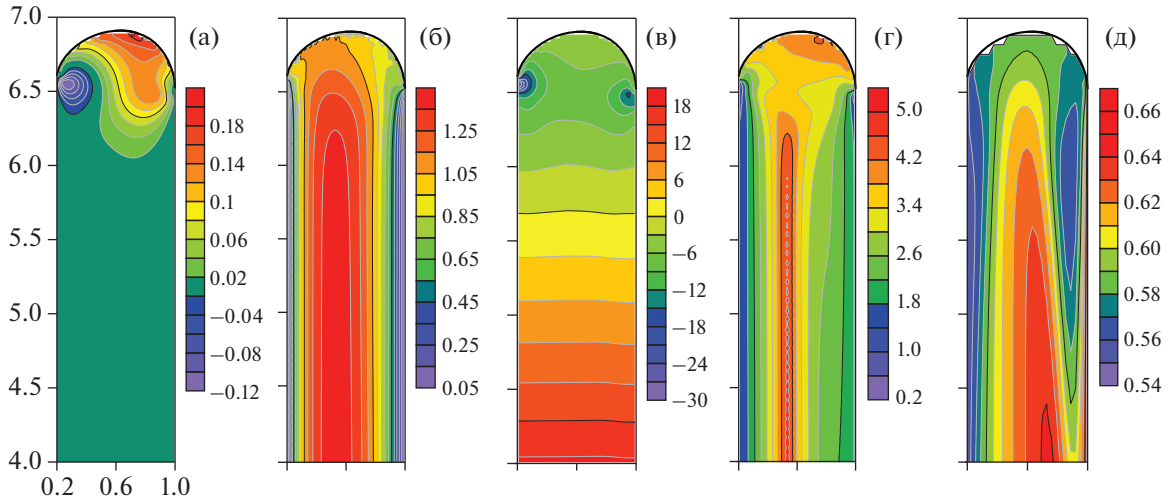

Рис. 5. Распределения характеристик потока в момент времени $t = 5$ при $\theta_1 = 0.55$, $\theta_2 = 0.66$, $C_2 = 1$, Br = 0.0045: а – поле скорости U_r, б – поле скорости U_z, в – поле давления, г – поле эффективной вязкости, д – поле температуры.

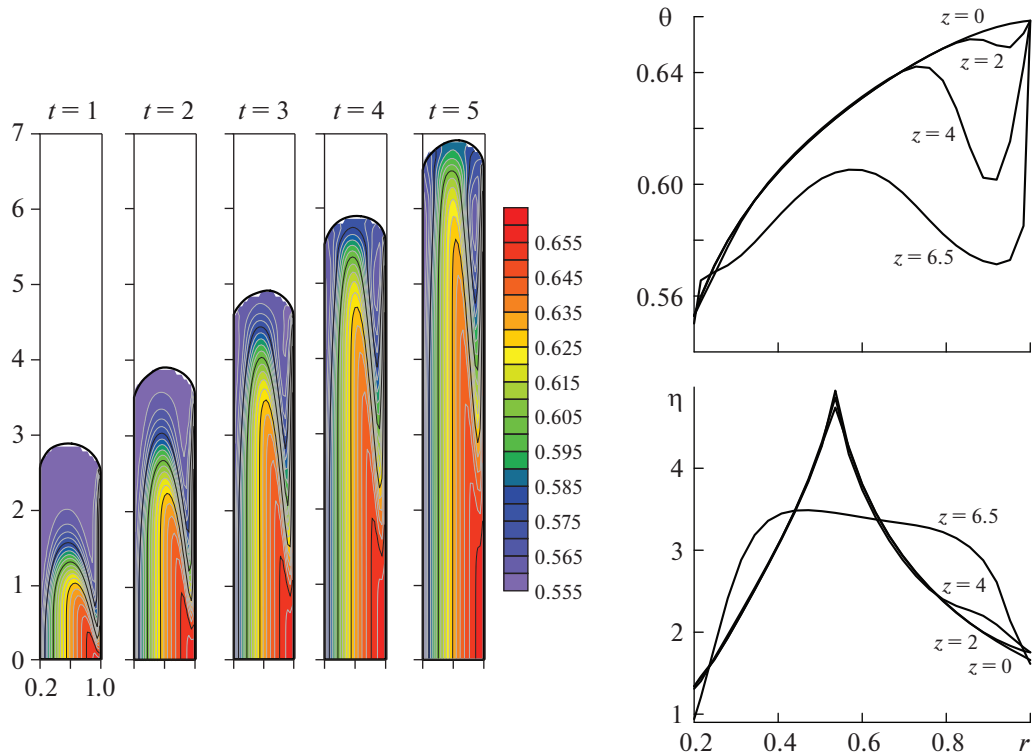

Рис. 6. Эволюция поля температур с течением времени (а) и распределения температуры и эффективной вязкости в поперечных сечениях $z = \text{const}$ в момент времени $t = 5$ (б) при $\theta_1 = 0.55$, $\theta_2 = 0.66$, $C_2 = 1$, Br = 0.0045.

Эволюция поля температуры с течением времени представлена на рис. 6а. Поскольку при Pe = 1252 доминирует конвективный механизм переноса тепла в потоке, то и распределения температуры также подтверждают описанную выше кинематику течения. Диссипативный разогрев жидкости и зависимость эффективной вязкости от температуры формируют наблюдаемый профиль температуры в потоке (рис. 6б). В области одномерного течения профиль аксиальной скорости предполагает наличие экстремума, в окрестности которого интенсивность тензора скоростей деформаций стремится к нулю, что приводит к резкому увеличению эффективной вязкости согласно формуле (1.1). В зоне фонтанирующего течения профиль вязкости сглаживается за счет двумерного характера течения.

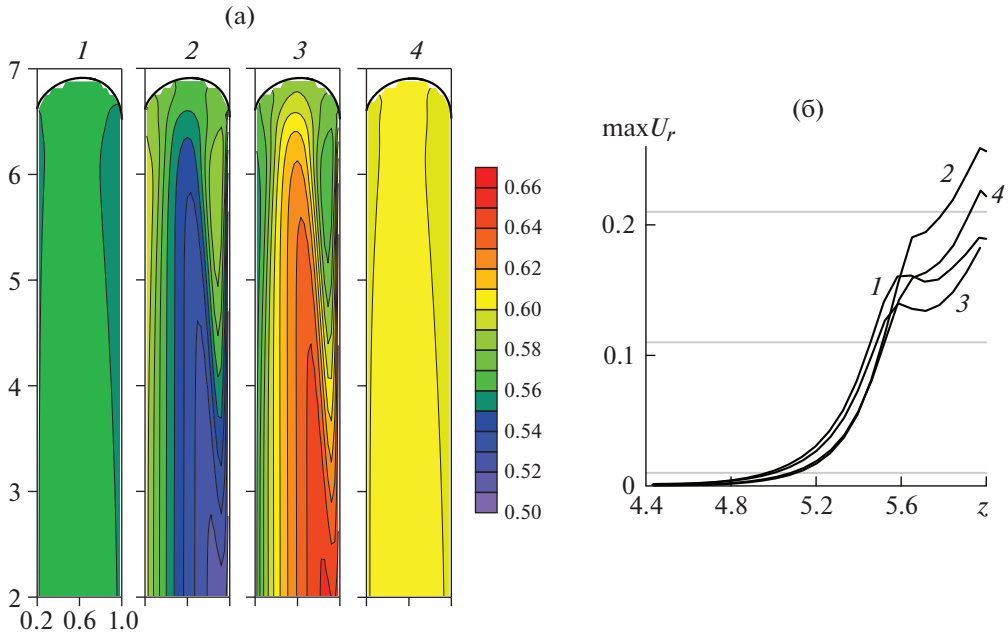

Рис. 7. Поля температур (а) и профили скорости $U_r^{\max}$ (б) при различных значениях граничных условий на твердых стенках: *1* – $\theta_1 = \theta_2 = 0.55$, $C_2 = 1$, Br = 0.0045; *2* – $\theta_1 = 0.6$, $\theta_2 = 0.5$, $C_2 = 0.91$, Br = 0.0041; *3* – $\theta_1 = 0.55$, $\theta_2 = 0.66$, $C_2 = 1$, Br = 0.0045; *4* – $\theta_1 = \theta_2 = 0.6$, $C_2 = 0.91$, Br = 0.0041.

Влияние граничных условий на твердых стенках на распределение температуры демонстрирует рис. 7. В случае совпадения значений температуры на внешней и внутренней стенках канала в потоке наблюдается небольшая неоднородность ее распределения, связанная с диссипативным эффектом. Для варианта задания граничных условий с различными температурами на стенках распределения температуры соответствуют кинематике фонтанирующего течения в окрестности свободной поверхности. Изменение величины радиуса внутреннего цилиндра при прочих равных не приводит к качественным изменениям в распределении теплофизических характеристик потока.

Распределения максимальных значений радиальной компоненты вектора скорости в поперечных сечениях вдоль оси z представлено на рис. 7б в момент времени, когда координата вершины свободной поверхности $z = 6$. Характер распределений подтверждает формирование двух зон: одномерное и фонтанирующее течения. Область, в которой скорость отлична от нуля, соответствует двухмерному течению вблизи свободной поверхности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнено исследование процесса неизотермического заполнения коаксиального канала жидкостью Cross-WLF с учетом диссипативного разогрева и зависимости реологических характеристик от температуры. Теплофизические характеристики среды соответствуют полиэтилену марки PE2042E. Задача решена численно с использованием оригинальной вычислительной технологии на основе метода контрольного объема и метода инвариантов для удовлетворения граничных условий на свободной границе. Продемонстрированы характеристики потока в процессе заполнения при различных значениях определяющих параметров. Выявлены зона двумерного течения в окрестности свободной поверхности и зона одномерного течения вдали от нее. Установлено, что температура стенок в диапазоне 200–250°C оказывает слабое влияние на кинематику потока. В области одномерного течения изотермы параллельны стенкам канала, а в окрестности свободной поверхности они деформируются в соответствии с кинематикой фонтанирующего течения.

Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ (проект № 18-19-00021-П).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глушков И.А., Милехин Ю.М., Меркулов В.М., Банзула Ю.Б.* Моделирование формования изделий из свободно-литьевых композиций. М.: Архитектура-С, 2007. 362 с.
2. *Борзенко Е.И., Якутенок В.А.* Эволюция свободной поверхности при заполнении плоских каналов вязкой жидкостью // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 1. С. 24–30.
3. *Mitsoulis E.* Fountain flow revisited: The effect of various fluid mechanics parameters // AIChE J. 2010. V. 56. № 5. P. 1147–1162.
4. *Mavridis H., Hrymak A.N., Vlachopoulos J.* Mathematical modeling of injection mold filling: A review // Adv. Polym. Technol. 1986. V. 6. № 4. P. 457–466.
5. *Coyle D.J., Blake J.W., Macosko C.W.* The kinematics of fountain flow in mold-filling // AIChE J. 1987. V. 33. № 7. P. 1168–1177.
6. *Nguyen-Chung T., Mennig G.* Non-isothermal transient flow and molecular orientation during injection mold filling // Rheol. Acta. 2001. V. 40. № 1. P. 67–73.
7. *Otmani R.E., Zinet M., Boutaous M., Benhadid H.* Numerical simulation and thermal analysis of the filling stage in the injection molding process: Role of the mold-polymer interface // J. Appl. Polym. Sci. 2011. V. 121. № 3. P. 1579–1592.
8. *Wang W., Li X., Han X.* Numerical simulation and experimental verification of the filling stage in injection molding // Polym. Eng. Sci. 2012. V. 52. № 1. P. 42–51.
9. *Борзенко Е.И., Фролов О.Ю., Шрагер Г.Р.* Фонтанирующее течение вязкой жидкости при заполнении канала с учетом диссипативного разогрева // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 1. С. 45–55.
10. *Otmani E.R., Zinet M., Boutaous M., Chantrenne P., Benhadid H.* Numerical simulation of the filling phase in the polymer injection moulding process with a conservative level set method // Int. J. Mater. Form. 2008. V. 1. № S1. P. 731–734.
11. *Липанов А.М., Альес М.Ю., Константинов Ю.Н.* Численное моделирование ползущих течений неньютоновских жидкостей со свободной поверхностью // Математическое моделирование. 1993. В. 5. № 7. С. 3–9.
12. *Mavridis H., Hrymak A.N., Vlachopoulos J.* Finite element simulation of fountain flow in injection molding // Polym. Eng. Sci. 1986. V. 26. № 7. P. 449–454.
13. *Gogos C.G., Huang C.F., Schmidt L.R.* The process of cavity filling including the fountain flow in injection molding // Polym. Eng. Sci. 1986. V. 26. № 20. P. 1457–1466.
14. *Mitsoulis E.* Fountain flow of pseudoplastic and viscoplastic fluids // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2010. V. 165. № 1–2. P. 45–55.
15. *Borzenko E.I., Ryltseva K.E., Shrager G.R.* Free-surface flow of a viscoplastic fluid during the filling of a planar channel // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2018. V. 254. P. 12–22.
16. *Borzenko E.I., Frolov O.Y., Shrager G.R.* Kinematics of the fountain flow during pipe filling with a power-law fluid // AIChE J. 2019. V. 65. № 2. P. 850–858.
17. *Чехонин К.А., Липанов А.М., Булгаков В.К.* Заполнение области между вертикальными коаксиальными цилиндрами аномально-вязкой жидкостью в неизотермических условиях // ИФЖ. 1989. В. 57. № 4. С. 577–583.
18. *Чехонин К.А., Сухинин П.А.* Движение нелинейно вязкопластичной жидкости со свободной поверхностью при заполнении осесимметричного объема // Математическое моделирование. 2001. В. 13. № 3. С. 89–102.
19. *Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р.* Кинематика течения вязкой жидкости при заполнении трубы с коаксиальным центральным телом // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 3. С. 51–58.
20. *Cross M.M.* Rheology of non-Newtonian fluids: A new flow equation for pseudoplastic systems // J. Colloid Sci. 1965. V. 20. № 5. P. 417–437.
21. *Williams M.L., Landel R.F., Ferry J.D.* The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids // J. Am. Chem. Soc. 1955. V. 77. № 14. P. 3701–3707.
22. *Виноградов Г.В., Малкин А.Я.* Реология полимеров. М: Химия, 1977. 440 с.
23. *Sleiman G.E.H., Petit I., Allanic N., Belhabib S., Madec Y., Launay J., Deterre R.* Study of the rheological behavior of polypropylene/polyethylene extruded mixture using an instrumented die // AIP Conf. Proc. 1914. 2017. P. 040005-1–040005-5.
24. *Sorrentino A., Pantani R.* Determination of the effect of pressure on viscosity of an isotactic polypropylene // Polym. Bull. 2013. V. 70. № 7. P. 2005–2014.
25. *Patankar S.V.* Numerical heat transfer and fluid flow. N.Y.: Hemisphere Pub. Corp., 1980. 197 p.
26. *Васенин И.М., Сидонский О.Б., Шрагер Г.Р.* Численное решение задачи о движении вязкой жидкости со свободной поверхностью // Доклады АН СССР. 1974. В. 217. № 2. С. 295–298.
27. *Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р.* Влияние вида граничных условий на линии трехфазного контакта на характеристики течения при заполнении канала // Прикладная механика и техническая физика. 2015. В. 56. № 2. С. 3–14.
28. *Борзенко Е.И., Фролов О.Ю., Шрагер Г.Р.* Фонтанирующее неизотермическое течение вязкой жидкости при заполнении круглой трубы // Теоретические основы химической технологии. 2014. В. 48. № 6. С. 677–684.
29. *Rose W.* Fluid–Fluid Interfaces in Steady Motion // Nature. 1961. V. 191. P. 242–243.