ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 6, с. 3–15

УДК 532.5.01

ИНТЕНСИВНОСТЬ ХАОТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ ГАЗА В КАНАЛАХ С ШЕРОХОВАТЫМИ СТЕНКАМИ

© 2022 г. И. В. Деревич[a,*], А. К. Клочков[a]

[a] *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*

**E-mail: DerevichIgor@bmstu.ru*

Поступила в редакцию 04.03.2022 г.
После доработки 21.06.2022 г.
Принята к публикации 21.06.2022 г.

В рамках градиентной гипотезы получено замкнутое уравнение для функции плотности вероятности (ФПВ) распределения координат и скорости частиц. Найдено приближенное решение уравнения для ФПВ, с помощью которого записана замкнутая система уравнений для первых и вторых моментов флуктуаций скорости частиц. Представлена система граничных условий, полученная на основе приближенного решения уравнения для ФПВ, которая учитывает шероховатость стенки канала и коэффициенты восстановления импульса отраженных частиц. Установлено, что турбулентный перенос импульса дисперсной фазы в пристеночную область канала приводит к значению амплитуды флуктуаций аксиальной компоненты скорости частиц выше, чем у газа. Показано, что столкновение частиц с шероховатой поверхностью приводит к дополнительной генерации случайной нормальной компоненты скорости частиц, кардинально меняющей профиль концентрации примеси по сравнению с гладкими стенками. Результаты расчетов сопоставляются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: функция плотности вероятности, турбулентность, коэффициенты восстановления импульса, шероховатость канала, моменты случайной скорости дисперсной фазы

DOI: 10.31857/S0568528122100085

Турбулентные потоки газовзвеси в каналах широко используются в различных технических приложениях. Устойчивость транспорта дисперсных материалов и степень эрозии стенок каналов определяются частотой столкновения частиц со стенками и распределением концентрации примеси по сечению канала. В настоящее время активно проводятся экспериментальные и теоретические исследования влияния искусственной шероховатости каналов на интенсивность хаотического движения примеси частиц. В зависимости от размера частиц и характерного размера шероховатости можно выделить принципиально различные направления исследования.

В первом направлении, сочетающем экспериментальные и теоретические исследования, изучаются достаточно крупные инерционные частицы, которые слабо вовлекаются в турбулентные флуктуации скорости несущей фазы. В этом случае хаотическое движение частиц обусловлено преобразованием скорости частиц при столкновении с шероховатой стенкой канала [1–3]. Эффективный теоретический метод исследования основан на подходе Лагранжа, в котором рассчитывается большое число случайных траекторий частиц с детальным описанием столкновения частиц с шероховатой поверхностью. Учитываются спин частиц и сила Магнуса. В этом случае влияние неоднородности распределения интенсивности турбулентности газа поперек канала на параметры движения частиц мало. Результаты численного моделирования удовлетворительно согласуются с данными экспериментов авторов (см., например, [2]).

Во втором направлении исследований размеры частиц примеси существенно меньше, чем в первом, частицы приобретают хаотическую скорость в результате вовлечения в турбулентные флуктуации энергоемких вихрей. Столкновение частиц с шероховатой поверхностью приводит к дополнительной генерации турбулентного движения примеси [4–7]. Математическое моделирование также использует подход Лагранжа.

Третье направление посвящено движению мелких частиц, вовлекающихся в турбулентное движение несущей фазе в каналах со случайно искаженной поверхностью стенок. Это искусственное изменение сечения канала приводит к макроскопическому изменению параметров турбулентности несущей фазы (см., например, [8]).

Несмотря на бурное развитие методов математического моделирования, во втором и третьем направлении исследований результатов сопоставления с имеющимися экспериментальными данными практически нет.

Вследствие существенной неоднородности параметров турбулентного течения газа в канале и преобразования скорости отраженных частиц при соударении с шероховатой поверхностью кардинально меняются закономерности турбулентного движения дисперсной примеси по сравнению с безграничным газодисперсным потоком. Современные экспериментальные данные [9] свидетельствуют о двух принципиальных характеристиках распределения параметров частиц при турбулентном течении газовзвеси в каналах. Во-первых, концентрация примеси на шероховатой стенке канала конечна, и не достигает аномально больших значений как в расчетах для гладких поверхностей (см., например, [10, 11]). Во-вторых, дисперсия аксиальной скорости частиц на периферии канала становится даже выше, чем у несущего газа, что противоречит традиционным представлениям о том, что интенсивность турбулентного движения дисперсной примеси всегда меньше, чем у несущей фазы.

В работе представлена математическая модель Эйлера турбулентного движения дисперсной примеси в канале с шероховатыми стенками. В отличие от широко используемых в литературе полуэмпирических методов замыкания турбулентных потоков предлагается единый строгий подход для вывода как уравнений для первых и вторых моментов флуктуаций скорости частиц дисперсной фазы, так и граничных условий для моментов, учитывающих преобразование скорости отраженных частиц после столкновения со стенками. Непротиворечивый переход от уравнений динамики частиц в переменных Лагранжа к уравнениям динамики сплошной среды для дисперсной фазы (переменные Эйлера) возможен только на основе аппарата функции плотности вероятности (ФПВ) распределения параметров частиц. Методика вывода незамкнутого уравнения для ФПВ в настоящее время достаточно хорошо отработана (см., например, [12–15]). Замыкание уравнения для ФПВ, его приближенное решение, позволяющее получить замкнутую систему уравнений для моментов случайных параметров дисперсной фазы и соответствующие граничные условия, возможен только в рамках упрощающей гипотезы. В работе используется "градиентная гипотеза": поток субстанции в случайном поле скорости пропорционален антиградиенту осредненного значения этой субстанции. Поэтому в аналитических выкладках градиенты параметров дисперсной фазы учитываются только в линейном приближении.

В настоящей работе кратко изложена методика вывода уравнения для ФПВ, системы уравнений для моментов и граничных условий. Представлена расчетная система уравнений, граничных условий и замыкающих соотношений для моделирования параметров газодисперсного течения в экспериментальной работе [9]. Результаты численного моделирования удовлетворительно согласуются с опытными данными и позволяют дать теоретическую трактовку новым экспериментальным эффектам.

1. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ЧАСТИЦ

Уравнения для скорости и перемещения одиночной сферической частицы в газе с учетом силы сопротивления и силы тяжести имеют вид

$$\frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_U}\left[\mathbf{U}(\mathbf{X}(t),t) - \mathbf{V}(t)\right] + \mathbf{g}, \quad \mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_0 \tag{1.1}$$

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{V}(t), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{V}(t)$ – скорость частицы, τ_U – время динамической релаксации, $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения, $\mathbf{X}(t)$ – координата частицы, $\mathbf{U}(\mathbf{x},t)$ – скорость газа.

Обозначаем скорость газа на траектории частицы как

$$\tilde{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{X}(t),t)$$

Переписываем уравнения (1.1) и (1.2) в интегральном виде

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_U}\right) + \frac{1}{\tau_U}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_U}\right)\tilde{\mathbf{U}}(s)\,ds + \mathbf{g}\tau_U\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_U}\right)\right]$$

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \mathbf{V}_0\tau_U\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_U}\right)\right] + \int_0^t\left[1-\exp\left(-\frac{t-s}{\tau_U}\right)\right]\tilde{\mathbf{U}}(s)\,ds + \mathbf{g}\tau_U\left\{t-\tau_U\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_U}\right)\right]\right\}$$

Для достаточно больших времен $t \gg \tau_U$ для скорости частицы и ее координаты имеем представление

$$\mathbf{V}(t) = \frac{1}{\tau_U}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_U}\right)\tilde{\mathbf{U}}(s)\,ds + \mathbf{g}\tau_U \tag{1.3}$$

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \mathbf{V}_0\tau_U + \int_0^t\left[1-\exp\left(-\frac{t-s}{\tau_U}\right)\right]\tilde{\mathbf{U}}(s)\,ds + \mathbf{g}\tau_U t \tag{1.4}$$

2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФПВ

Концентрация частиц предполагается достаточно малой, чтобы можно было пренебречь столкновениями частиц и обратным влиянием примеси на параметры турбулентного потока. Для описания случайной динамики частиц в турбулентном потоке адекватным является теория случайных процессов. Вся информация о параметрах дисперсной фазы содержится в ФПВ координаты и скорости частицы. Для получения уравнения для ФПВ первоначально записывается выражение для индикаторной функции, вырезающей случайную траекторию в фазовом пространстве

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{V},t) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\,\delta(\mathbf{V}-\mathbf{V}(t))$$

Здесь $\mathbf{V}$, $\mathbf{x}$ – точки фазового пространства, $\delta(\mathbf{x})$ – дельта функция Дирака, удовлетворяющая условию нормировки

$$\int \delta(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 1$$

где $d\mathbf{x}$ – элемент объема.

Введение индикаторной функции позволяет говорить о сплошной дисперсной фазе даже для одной частицы. С учетом уравнений динамики частицы получается уравнение Лиувилля для индикаторной функции

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{V},t) + \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{V},t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}}\left\{\left[\frac{\mathbf{U}(\mathbf{x},t)-\mathbf{V}}{\tau_U} + \mathbf{g}\right]\varphi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\right\} = 0 \tag{2.1}$$

Осреднение индикаторной функции по ансамблю случайных реализаций турбулентного потока приводит согласно аксиоматическому построению теории случайных процессов А.Н. Колмогорова (см., например, [16]) к ФПВ распределения скорости и координаты частиц

$$\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t) = \langle\varphi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\rangle = \langle\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\,\delta(\mathbf{V}-\mathbf{V}(t))\rangle$$

где угловые скобки обозначают результат осреднения по ансамблю турбулентных реализаций.

На основе ФПВ определяем осредненную концентрацию $\langle N(\mathbf{x},t)\rangle$ и скорость дисперсной фазы $\langle \mathbf{V}(\mathbf{x},t)\rangle$ следующим образом:

$$\langle N(\mathbf{x},t)\rangle = \int \Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\,\mathrm{d}\mathbf{V} = \int\langle\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\,\delta(\mathbf{V}-\mathbf{V}(t))\rangle\,d\mathbf{V} = \langle\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\rangle$$

$$\langle N(\mathbf{x},t)\rangle\langle\mathbf{V}(\mathbf{x},t)\rangle = \int \mathbf{V}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\,\mathrm{d}\mathbf{V} = \int \mathbf{V}\langle\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\,\delta(\mathbf{V}-\mathbf{V}(t))\rangle\,d\mathbf{V} = \langle\mathbf{V}(t)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))\rangle$$

Флуктуации скорости дисперсной фазы равны

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} - \langle\mathbf{V}(\mathbf{x},t)\rangle$$

В этом случае корреляция актуальной концентрации $N(\mathbf{x},t)$ и флуктуаций скорости дисперсной фазы равна:

$$\langle \mathbf{v}N(\mathbf{x},t)\rangle = \int \mathbf{v}\Phi(\mathbf{X},\mathbf{V},t)\,d\mathbf{V} = \int \Phi(\mathbf{X},\mathbf{V},t)(\mathbf{V} - \langle \mathbf{V}(\mathbf{x},t)\rangle)\,d\mathbf{V} = 0$$

Осреднение уравнения для индикаторной функции (2.1) по ансамблю турбулентных реализаций приводит к незамкнутому уравнению для ФПВ

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t) + \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}}\left\{\left[\frac{\langle \mathbf{U}(\mathbf{x},t)\rangle - \mathbf{V}}{\tau_U} + \mathbf{g}\right]\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\right\} = -\frac{1}{\tau_U}\langle \tilde{\mathbf{u}}(t)\,\varphi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\rangle \tag{2.2}$$

где скорость несущей фазы представлена в виде

$$\mathbf{U}(\mathbf{x},t) = \langle \mathbf{U}(\mathbf{x},t)\rangle + \mathbf{u}(\mathbf{x},t), \quad \langle \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\rangle = 0$$

Уравнение (2.2) незамкнуто вследствие наличия корреляции $\langle \tilde{\mathbf{u}}(t)\,\varphi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\rangle$. Данные прямого численного моделирования турбулентных флуктуаций скорости газа на траектории инерционных частиц [17] свидетельствуют о том, что энергоемкие флуктуации скорости газа на траектории частиц являются случайным процессом Гаусса с автокорреляционной функцией, спадающей по экспоненциальному закону

$$\langle \tilde{u}_n(t)\,\tilde{u}_j(\xi)\rangle = \langle u_n u_j\rangle \tilde{\Psi}_L(t-\xi), \quad \tilde{\Psi}_L(t) = \exp\left(-|t|/\tilde{T}_L\right) \tag{2.3}$$

Здесь $\tilde{\Psi}_L(t)$ – автокорреляционная функция энергоемких флуктуаций скорости газа на траектории частицы, $\tilde{T}_L$ – интегральный временной масштаб

$$\tilde{T}_L = \int_0^\infty \tilde{\Psi}_{\mathrm{L}}(s)\,\mathrm{d}s$$

Для случайного процесса Гаусса, описывающего флуктуации скорости газа, которые видит частица, раскрытие корреляции в правой части уравнения (2.2) реализуется по формуле Фурутсу–Новикова [14, 15]

$$\langle \tilde{u}_n(t)\,\varphi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\rangle = \int_0^t d\xi \langle \tilde{u}_n(t)\,\tilde{u}_j(\xi)\rangle \left\langle \frac{\delta\varphi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)}{\delta\tilde{u}_j(\xi)}\right\rangle \tag{2.4}$$

Здесь $\delta\varphi/\delta\tilde{u}_j$ – функциональная производная

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)}{\delta\tilde{u}_j(\xi)} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\frac{\delta X_i(t)}{\delta\tilde{u}_j(\xi)} - \frac{\partial}{\partial V_i}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\frac{\delta V_i(t)}{\delta\tilde{u}_j(\xi)} \tag{2.5}$$

Для расчета функциональных производных скорости и координаты частиц из формул (1.3) и (1.4) следует система интегральных уравнений (см., например, [15])

$$\frac{\delta V_i(t)}{\delta\tilde{u}_j(\xi)} = \frac{\delta_{ij}}{\tau_U}\exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_U}\right) + \frac{1}{\tau_U}\int_\xi^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_U}\right)\frac{\partial\langle U_i(\mathbf{x},s)\rangle}{\partial x_k}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(s)}\frac{\delta X_k(s)}{\delta\tilde{u}_j(\xi)}ds$$

$$\frac{\delta X_i(t)}{\delta\tilde{u}_j(\xi)} = \delta_{ij}\left[1 - \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_U}\right)\right] + \int_\xi^t \left[1 - \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_U}\right)\right]\frac{\partial\langle U_i(\mathbf{x},s)\rangle}{\partial x_k}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(s)}\frac{\delta X_k(s)}{\delta\tilde{u}_j(\xi)}ds$$

Аналитического решения системы интегральных уравнений для функциональных производных нет. Поэтому для замыкания уравнения для ФПВ используется градиентная гипотеза: в приближенном решении учитываются только слагаемые линейные по градиентам осредненных параметров дисперсной фазы. В результате получаем приближенное решение для функциональных производных

$$\frac{\delta V_i(t)}{\delta\tilde{u}_j(\xi)} \approx \frac{\delta_{ij}}{\tau_U}\exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_U}\right) + \Gamma_V(t-\xi)\frac{\partial\langle U_i(\mathbf{x},s)\rangle}{\partial x_j}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t)} \tag{2.6}$$

$$\frac{\delta X_i(t)}{\delta u_j(\xi)} \approx \delta_{ij}\left[1-\exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_U}\right)\right] + \tau_U \Gamma_X(t-\xi)\left.\frac{\partial\langle U_i(\mathbf{x},s)\rangle}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t)} \tag{2.7}$$

Здесь функции $\Gamma_V(t-\xi)$, $\Gamma_X(t-\xi)$ равны

$$\Gamma_V(t-\xi) = 1-\exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_U}\right)\left(1+\frac{t-\xi}{\tau_U}\right)$$

$$\Gamma_X(t-\xi) = \frac{t-\xi}{\tau_U}\left[1+\exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_U}\right)\right] - 2\left[1-\exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_U}\right)\right]$$

Последовательная подстановка выражений (2.6), (2.7) в (2.5) и (2.4) приводит к замкнутому уравнению для ФПВ

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t) + V_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t) + \frac{\partial}{\partial V_i}\left\{\left(\frac{\langle U_i\rangle + \tau_U g_i - V_i}{\tau_U}\right)\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)\right\} = \\ = \frac{1}{\tau_U} f_U\langle u_i u_j\rangle\frac{\partial^2\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)}{\partial V_i\partial V_j} + q_U\langle u_i u_j\rangle\frac{\partial^2\Phi(\mathbf{x},\mathbf{V},t)}{\partial V_i\partial x_j}\end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь функции отклика равны

$$f_U\langle u_i u_j\rangle = f_U^{(0)}\langle u_i u_j\rangle + f_U^{(1)}\tau_U\frac{1}{2}\left[\langle u_i u_k\rangle\frac{\partial\langle U_j\rangle}{\partial x_k} + \langle u_j u_k\rangle\frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial x_k}\right]$$

$$q_U\langle u_i u_j\rangle = q_U^{(0)}\langle u_i u_j\rangle + q_U^{(1)}\tau_U\frac{1}{2}\left[\langle u_j u_k\rangle\frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial x_k} + \langle u_i u_k\rangle\frac{\partial\langle U_j\rangle}{\partial x_k}\right]$$

Коэффициенты в этих выражениях рассчитываются по автокорреляционной функции флуктуации скорости газа на траектории частицы

$$f_U^{(0)} = \frac{1}{\tau_U}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{s}{\tau_U}\right)\tilde{\Psi}_L(s)\,ds, \quad f_U^{(1)} = \frac{1}{\tau_U}\int_0^\infty\left[1-\exp\left(-\frac{s}{\tau_U}\right)\left(1+\frac{s}{\tau_U}\right)\right]\tilde{\Psi}_L(s)\,ds$$

$$q_U^{(0)} = \frac{1}{\tau_U}\int_0^\infty\left[1-\exp\left(-\frac{s}{\tau_U}\right)\right]\tilde{\Psi}_L(s)\,ds = \frac{\tilde{T}_\mathrm{L}}{\tau_U} - f_U^{(0)}$$

$$q_U^{(1)} = \frac{1}{\tau_U}\int_0^\infty\left\{\frac{s}{\tau_U}\left[1+\exp\left(-\frac{s}{\tau_U}\right)\right] - 2\left[1-\exp\left(-\frac{s}{\tau_U}\right)\right]\right\}\tilde{\Psi}_L(s)\,ds$$

Корреляцию скорости газа на траектории частицы в формуле (2.4) представляем как

$$\int_0^t \psi(t-\xi)\langle\tilde{u}_n(t)\tilde{u}_j(\xi)\rangle\mathrm{d}\xi = \int_0^t \psi(t-\xi)\langle u_n(\mathbf{X}(t),t)u_j(\mathbf{X}(\xi),\xi)\rangle\mathrm{d}\xi$$

где $\psi(t)$ – произвольная функция времени.

Используем представление через функцию плотности вероятности перехода (см., например, [18])

$$\int_0^t \psi(t-\xi)\langle\tilde{u}_n(t)\tilde{u}_j(\xi)\rangle d\xi \approx \langle u_n u_j\rangle\int d\mathbf{y}\int_0^t dt'\,\psi(t-\xi)\Psi_\mathrm{E}(\mathbf{y},t-\xi)G(\mathbf{y},t-\xi)$$

Здесь $\Psi_\mathrm{E}(t)$ – автокорреляционная функция Эйлера; $G(\mathbf{y},t-\xi)$ – плотность вероятности перехода частиц в случайном поле скорости газа

$$G(\mathbf{y},t-t') = \langle\delta(\mathbf{y}-[\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}(\xi)])\rangle = \left\langle\delta\left(\mathbf{y}-\int_\xi^t \mathbf{V}(s)\,ds\right)\right\rangle$$

Функция плотности вероятности перехода позволяет учесть эффект “пересечения траекторий”, вызванный осредненным скольжением фаз. При течении газовзвеси в канале с шероховатыми стенками потеря импульса отраженных частиц может приводить к скоростному скольжению фаз, существенно большему скорости витания.

3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОМЕНТОВ

Уравнение для ФПВ (2.8) содержит всю необходимую информацию для получения замкнутой системы уравнений для моментов и вывода граничных условий. Приближенное решение уравнения (2.8) с учетом слагаемых пропорциональных первой степени градиентов осредненных параметров дисперсной фазы имеет вид [15]

$$\Phi \approx \langle N\rangle \Phi^{(0)}\left\{1+\frac{1}{2}(1-\delta_{ij})\sigma_{ij}^{(0)}\frac{v_iv_j}{\langle v_j^2\rangle\langle v_i^2\rangle}-\frac{\tau_U}{2\langle v_i^2\rangle}(v_jv_i-\delta_{ij}v_i^2)\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_j}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3}\frac{v_j}{\langle v_i^2\rangle\langle v_j^2\rangle}\left[\frac{1}{2}\frac{v_i^2}{\langle v_i^2\rangle}-\left(\delta_{ij}+\frac{1}{2}\right)\right]D_{jk}\frac{\partial\langle v_i^2\rangle}{\partial x_k}\right\} \tag{3.1}$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера, $D_{jk}=\tau_U(\langle v_jv_k\rangle+q_U^{(0)}\langle u_ju_k\rangle)$ – коэффициент турбулентного переноса; $\Phi^{(0)}$ – равновесная ФПВ

$$\Phi^{(0)}=\prod_{i=1}^{3}\frac{1}{(2\pi\langle v_i^2\rangle)^{1/2}}\exp\left(-\frac{v_i^2}{2\langle v_i^2\rangle}\right)$$

Вторые моменты флуктуаций скорости дисперсной фазы в формуле (3.1) равны

$$\langle v_iv_k\rangle\langle N\rangle=\int\Phi(\mathbf{x},\mathbf{v},t)v_iv_kd\mathbf{v}$$

Предполагается, что в ФПВ (3.1) осредненные параметры дисперсной фазы зависят от времени и пространственной переменной. Коэффициент $\sigma_{ij}^{(0)}$ в (3.1) равен

$$\sigma_{ij}^{(0)}=f_U\langle u_iu_j\rangle-\frac{1}{2}\tau_Uq_U^{(0)}\left(\langle u_ku_j\rangle\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}+\langle u_ku_i\rangle\frac{\partial\langle V_j\rangle}{\partial x_k}\right)$$

Замкнутая система уравнений для первых и вторых моментов флуктуаций скорости дисперсной фазы имеет следующий вид.

Уравнение для осредненной концентрации дисперсной фазы

$$\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial t}+\frac{\partial\langle V_i\rangle\langle N\rangle}{\partial x_i}=0$$

Уравнение для осредненной скорости дисперсной фазы

$$\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial t}+\langle V_k\rangle\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}+\frac{\partial\langle v_iv_k\rangle}{\partial x_k}=\frac{\langle U_i\rangle+\tau_Ug_i-\langle V_i\rangle}{\tau_U}-\frac{1}{\tau_U}D_{ik}\frac{\partial\ln\langle N\rangle}{\partial x_k}$$

Уравнение для вторых моментов флуктуаций скорости дисперсной фазы

$$\frac{\partial\langle v_iv_j\rangle}{\partial t}+\langle V_k\rangle\frac{\partial\langle v_iv_j\rangle}{\partial x_k}+\frac{1}{\tau_U}\left(D_{jk}\frac{\partial\langle V_i\rangle}{\partial x_k}+D_{ik}\frac{\partial\langle V_j\rangle}{\partial x_k}\right)+\frac{1}{\langle N\rangle}\frac{\partial\langle v_iv_jv_k\rangle\langle N\rangle}{\partial x_k}=\frac{2}{\tau_U}(f_U\langle u_iu_j\rangle-\langle v_iv_j\rangle)$$

Здесь третьи моменты равны

$$\langle N\rangle\langle v_i^2v_j\rangle=\int v_i^2v_j\Phi(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\,d\mathbf{v}=-\langle N\rangle\frac{2\delta_{ij}+1}{3}D_{jk}\frac{\partial\langle v_j^2\rangle}{\partial x_k}$$

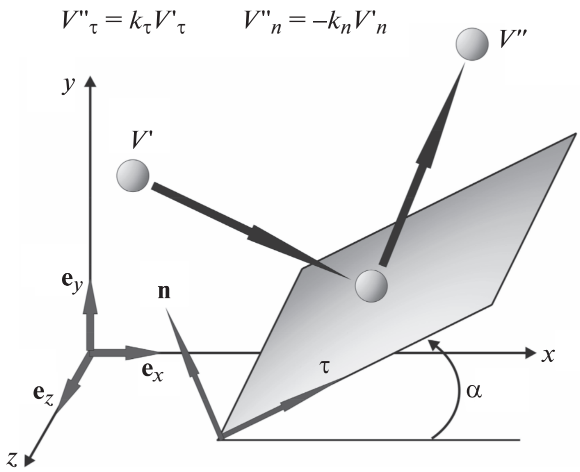

Рис. 1. Схема столкновения частиц с плоскостью, моделирующей шероховатость стенки.

4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Как будет видно из результатов расчетов для интерпретации экспериментальных данных [9], можно задать небольшую степень шероховатости стенки канала. Поэтому не учитывается спин частиц. При столкновении с поверхностью импульс отраженных частиц связан с импульсом падающих частиц следующим образом:

$$\mathbf{V}''_\tau = k_\tau \mathbf{V}'_\tau, \quad \mathbf{V}''_n = -k_n \mathbf{V}'_n$$

где $0 < k_n, k_\tau \le 1$ – коэффициенты восстановления импульса, $\mathbf{V}_\tau$, $\mathbf{V}_n$ – касательная и нормальная компоненты скорости частиц; одним штрихом обозначены скорости падающих частиц, двумя штрихами – отраженных.

Шероховатость стенок плоского канала моделируем как плоскости, случайно наклоненные к оси канала (см., например, [2]) (рис. 1). Случайный угол наклона плоскости $0 \le \alpha \le \alpha_{\max}$ имеет равномерное распределение.

При столкновении частиц с шероховатой поверхностью аксиальная компонента скорости дает существенный вклад в компоненту отраженной скорости, нормальную к оси канала. Это приводит к существенной генерации интенсивности хаотического движения частиц поперек канала по сравнению с каналом, имеющим гладкие стенки. В результате осреднения по углу наклона случайных плоскостей получаются формулы для расчета аксиальной и нормальной к оси канала компонент скорости дисперсной фазы [15]

$$V''_x = \langle k^*_\tau \rangle V'_x, \quad V''_y = -\langle k^*_n \rangle V'_y$$

Здесь эффективные коэффициенты восстановления импульса частиц в шероховатом канале имеют вид

$$\langle k'_n \rangle = \frac{1}{4\alpha_{\max}} \left\{ (k_n + k_\tau) \left[-2\frac{\langle V'_x \rangle}{\langle V'_y \rangle}(1 - \cos^2 \alpha_{\max}) + \sin(2\alpha_{\max}) \right] + 2(k_n - k_\tau)\alpha_{\max} \right\}$$

$$\langle k'_\tau \rangle = \frac{1}{4\alpha_{\max}} \left\{ (k_n + k_\tau) \left(\sin(2\alpha_{\max}) + 2\sin^2(\alpha_{\max})\frac{\langle V'_y \rangle}{\langle V'_x \rangle} \right) - 2\alpha_{\max}(k_n - k_\tau) \right\}$$

где $\alpha_{\max}$ – максимальный угол наклона шероховатости, $\langle V'_y \rangle < 0$.

На рис. 2 показана зависимость эффективных коэффициентов восстановления импульса в шероховатом канале. Видно, что коэффициент восстановления импульса в поперечном направлении может быть $\geqslant 1$.

Вывод граничных условий для первых и вторых моментов также основан на приближенном решении уравнения для ФПВ (3.1). Рассчитываются потоки концентрации, осредненного им-

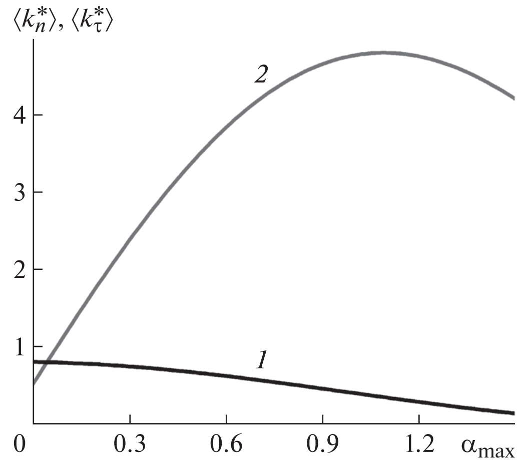

Рис. 2. Эффективные коэффициенты восстановления импульса в шероховатом канале; $k_n = 0.5$, $k_\tau = 0.8$, $\langle V'_x\rangle / \langle V'_y\rangle = -10$; *1* – $\langle k^*_\tau\rangle$, *2* – $\langle k^*_n\rangle$.

пульса, дисперсии скорости частиц, переносимые падающими и отраженными от стенки потоками дисперсной фазы. Сумма падающего и отраженного потоков вблизи стенки приравнивается потоку в течении.

5. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Предложенная модель сопоставляется с экспериментальными данными, полученными при нисходящем течении газовзвеси в вертикальном плоском канале. Приведем систему уравнений для моментов и соответствующих граничных условий для численного моделирования экспериментальных условий [9]. Опытные данные представлены для установившегося течения. Расчеты проведены путем решения системы нестационарных уравнений переноса до достижения стационарного состояния. Ось $0 \le y \le h$ направлена от стенки в поток (h – полуширина канала), ось $x \ge 0$ направлена по скорости потока. При записи системы уравнений для моментов учитываются только слагаемые линейные по градиентам осредненных параметров дисперсной фазы.

Уравнение для концентрации примеси имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}\langle N\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{ D_{yy}\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial y} - \tau_U \langle N\rangle \frac{\partial\langle v_y^2\rangle}{\partial y}\right\}$$

где $D_{yy} = \tau_U(\langle v_y^2\rangle + q_U^{(0)}\langle u_y^2\rangle)$ – коэффициент турбулентной диффузии частиц в поперечном направлении. Из уравнения видно, что распределение концентрации примеси регулируется турбулентной диффузией и силой турбофореза, направленной в сторону снижения амплитуды поперечных флуктуаций скорости частиц.

Граничные условия отражают отсутствие потоков дисперсной фазы в центре и на границе канала:

$$\left.\left\{ D_{yy}\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial y} - \tau_U \langle N\rangle \frac{\partial\langle v_y^2\rangle}{\partial y}\right\}\right|_{\substack{y=0\\ y=h}} = 0$$

Уравнение для аксиальной скорости дисперсной фазы имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}\langle V_x\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{\langle U_x\rangle + \tau_U g_x - \langle V_x\rangle}{\tau_U} + \frac{\partial}{\partial y}\left(f_U^{(0)}\nu_t \frac{\partial\langle U_x\rangle}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}D_{yy}\frac{\partial\langle V_x\rangle}{\partial y}\right)$$

Граничные условия симметрии и потери аксиального импульса при столкновении с шероховатой стенкой канала записываются как

$$\left.\frac{\partial\langle V_x\rangle}{\partial y}\right|_{y=h}=0,\quad \left.\left\{\frac{1-\langle k_\tau^*\rangle}{1+\langle k_\tau^*\rangle}\left(\frac{2}{\pi}\left\langle v_y^2\right\rangle\right)^{1/2}\langle V_x\rangle-\frac{1}{2}D_{yy}\frac{\partial\langle V_x\rangle}{\partial y}\right\}\right|_{y=0}=0$$

Уравнение для дисперсии флуктуаций скорости дисперсной фазы в поперечном направлении

$$\frac{\mathrm{d}\left\langle v_y^2\right\rangle}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{\tau_U}\left(f_U\left\langle u_y^2\right\rangle-\left\langle v_y^2\right\rangle\right)+\frac{1}{\langle N\rangle}\frac{\partial}{\partial y}\left(\langle N\rangle D_{yy}\frac{\partial\left\langle v_y^2\right\rangle}{\partial y}\right)$$

Граничные условия симметрии и генерации поперечной компоненты импульса на шероховатой стенке канала имеют вид

$$\left.\frac{\partial\left\langle v_y^2\right\rangle}{\partial y}\right|_{y=h}=0,\quad \left.\left\{2\frac{1-\langle k_n^*\rangle^2}{1+\langle k_n^*\rangle^2}\left(\frac{2}{\pi}\left\langle v_y^2\right\rangle\right)^{1/2}\left\langle v_y^2\right\rangle-D_{yy}\frac{\partial\left\langle v_y^2\right\rangle}{\partial y}\right\}\right|_{y=0}=0$$

Уравнение для дисперсии аксиальных флуктуаций скорости дисперсной фазы

$$\frac{\mathrm{d}\left\langle v_x^2\right\rangle}{\mathrm{d}t}=-\frac{2}{\tau_U}D_{xy}\frac{\partial\langle V_x\rangle}{\partial y}+\frac{2}{\tau_U}\left(\left\langle u_x^2\right\rangle f_U-\left\langle v_x^2\right\rangle\right)+\frac{1}{\langle N\rangle}\frac{\partial}{\partial y}\left(\langle N\rangle\frac{D_{yy}}{3}\frac{\partial\left\langle v_x^2\right\rangle}{\partial y}\right)$$

где $D_{xy}=\tau_U\left(\left\langle v_xv_y\right\rangle+q_U^{(0)}\left\langle u_xu_y\right\rangle\right)$ – коэффициент турбулентного переноса аксиальной компоненты импульса дисперсной фазы.

Граничные условия симметрии и потери аксиальной компоненты импульса имеют вид:

$$\left.\frac{\partial\left\langle v_x^2\right\rangle}{\partial y}\right|_{y=h}=0,\quad \left.\left\{\frac{1-\langle k_\tau^*\rangle^2}{1+\langle k_\tau^*\rangle^2}\left(\frac{2}{\pi}\left\langle v_y^2\right\rangle\right)^{1/2}\left\langle v_x^2\right\rangle-\frac{1}{3}\tau_U\left\langle v_y^2\right\rangle\frac{\partial\left\langle v_x^2\right\rangle}{\partial y}\right\}\right|_{y=0}=0$$

Уравнение для касательных турбулентных напряжений в дисперсной фазе записывается как

$$\frac{\mathrm{d}\left\langle v_xv_y\right\rangle}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\tau_U}D_{yy}\frac{\partial\langle V_x\rangle}{\partial y}+\frac{2}{\tau_U}(f_U^{(0)}\left\langle u_xu_y\right\rangle-\left\langle v_xv_y\right\rangle)+\frac{1}{\langle N\rangle}\frac{\partial}{\partial y}\left(\langle N\rangle\frac{1}{3}D_{xy}\frac{\partial\left\langle v_y^2\right\rangle}{\partial y}\right)$$

Время динамической релаксации частиц рассчитывается следующим образом:

$$\tau_U(\mathrm{Re}_p)=\frac{\tau_U^{(0)}}{1+0.15\,\mathrm{Re}_p^{0.687}},\quad \tau_U^{(0)}=\frac{1}{18}\frac{\rho_p}{\rho_g}\frac{d_p^2}{\nu_g},\quad \mathrm{Re}_p=\frac{d_pW}{\nu_g},\quad W=\left|\langle V_x\rangle-\langle U_x\rangle\right|$$

Здесь $\tau_U^{(0)}$ – время динамической релаксации в приближении Стокса, d_p – диаметр частиц, ρ_g, ρ_p – плотности материала газа и частиц, ν_g – коэффициент кинематической вязкости газа, Re_p – число Рейнольдса обтекания частиц, W – модуль относительной скорости частиц.

Учитывается влияние относительного скольжения фаз на интегральный временной масштаб флуктуаций скорости газа на траектории частицы [18]

$$\tilde{T}_\mathrm{L}=\frac{T_\mathrm{E}}{\sqrt{1+\chi_\mathrm{E}^2f_U^{(0)}}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\chi_\mathrm{E}\gamma^*}\operatorname{erf}\left(\frac{\chi_\mathrm{E}\gamma^*}{\sqrt{2}}\right),\quad \gamma^*=\frac{\gamma}{\sqrt{1+\chi_E^2(f_U^{(0)})^2}}$$

где T_E – интегральный временной масштаб Эйлера в системе координат, движущейся с осредненной скоростью газового потока, $\gamma=|W|/u$ – коэффициент скоростного скольжения, $u=\sqrt{2E/3}$ – среднеквадратичная скорость турбулентных флуктуаций газа, E – турбулентная энергия единицы массы газа, $\chi_E=1$ – параметр, связанный с отношением интегральных временных масштабов Лагранжа T_L и Эйлера, выбирается из условия $T_L/T_E\approx 0.7$.

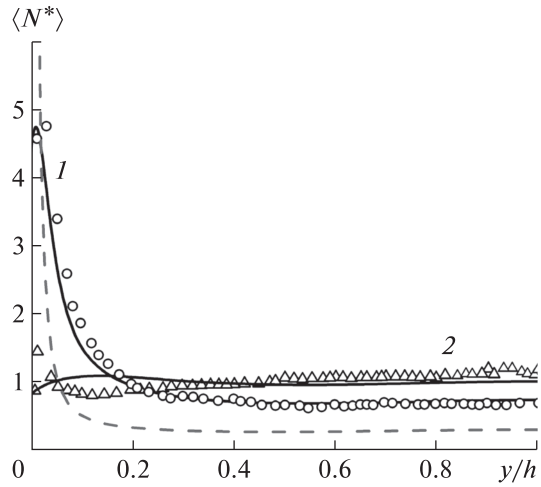

Рис. 3. Распределение безразмерной концентрации частиц поперек канала. Точки – экспериментальные данные, линии – результаты расчета: штриховая линия для частиц d_p = 50 мкм при $\alpha_{\max} = 0°$, сплошные линии при $\alpha_{\max} = 1.3°$; *1* – d_p = 50 мкм, *2* – d_p = 70 мкм.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчет параметров несущей фазы проведен на основе простой двухпараметрической модели турбулентности [19]. Мы полагаем, что наличие малой шероховатости канала, меньше толщины вязкого подслоя, не меняет параметров турбулентности по сравнению со случаем абсолютно гладких стенок.

Дисперсия аксиальных флуктуаций скорости газа оценивается как $\left\langle u_x^2 \right\rangle = E$. Дисперсия нормальных флуктуаций скорости газа рассчитывается по формуле, согласующейся с данными прямого численного моделирования [20]

$$\left\langle u_y^2 \right\rangle = \frac{1}{3} E \left[1 - \exp\left(-\frac{y_+}{A} \right) \right]^4, \quad A \approx 11$$

где y_+ – расстояние от стенки канала в универсальных переменных.

Интегральный временной масштаб Эйлера в универсальных переменных T_{E+} оценивается по формуле

$$T_{E+} = \max\left(10, \frac{\zeta E_+}{\varepsilon_+} \right), \quad \zeta = 0.3$$

где E_+, ε_+ – турбулентная энергия и диссипация в универсальных переменных.

Расчет реализован методом прямых на консервативной разностной схеме со сгущением узлов вблизи стенки канала [21].

На рис. 3 представлено распределение безразмерной концентрации дисперсной примеси (масштаб концентрации – ее среднее значение по сечению канала). Для идеально гладкого канала максимум концентрации примеси расположен на стенке и достигает существенных величин, что согласуется с данными прямого численного моделирования [10, 11]. Далее результаты расчетов сопоставляются с экспериментальными данными работы [9], в которой авторы используют гладкие поверхности канала. Понятие технической “гладкости канала” не исключает микрошероховатость, которая также может появиться при проведении экспериментов в результате эрозионного воздействия дисперсной примеси. Как отмечалось выше, для абсолютно гладких поверхностей максимум концентрации на стенке во много раз превосходит значение концентрации в ядре течения. Поэтому мы для интерпретации результатов экспериментов [9] предложили малую шероховатость омываемой поверхности. Конкретный угол наклона ($\alpha_{\max} \approx 1.3°$) выбирался эмпирическим путем и в дальнейших расчетах не менялся.

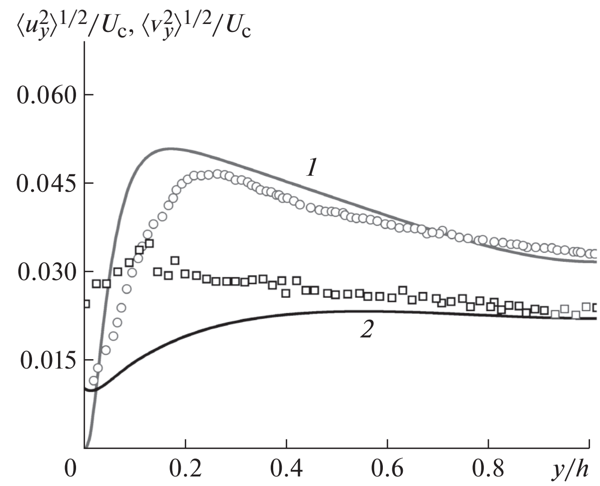

Рис. 4. Распределение дисперсии нормальных флуктуаций скорости поперек канала несущей и дисперсной фазы для d_p = 50 мкм. Линии – расчет, точки – экспериментальные данные: *1* – несущая фаза, *2* – дисперсная фаза.

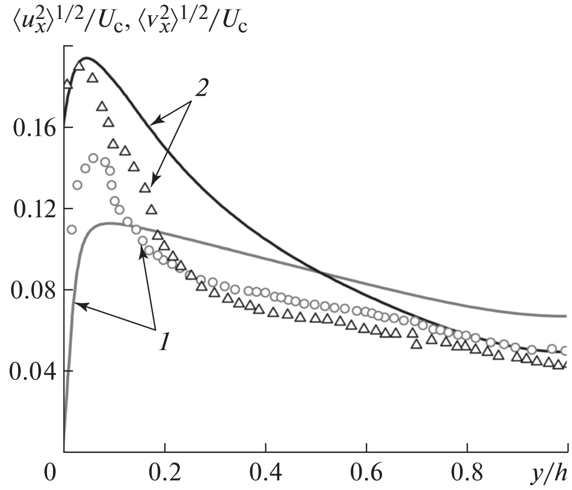

Рис. 6. Распределение дисперсии аксиальных флуктуаций скорости поперек канала несущей и дисперсной фазы. Точки – экспериментальные данные, кривые – расчет: *1* – газ; *2* – частицы d_p = 50 мкм.

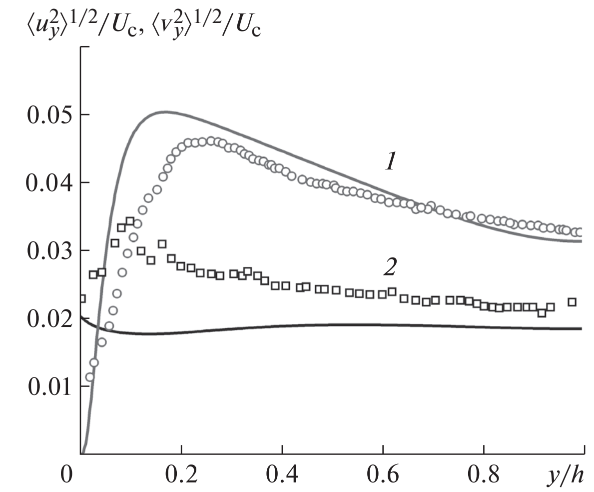

Рис. 5. Распределение дисперсии нормальных флуктуаций скорости поперек канала несущей и дисперсной фазы для d_p = 70 мкм.

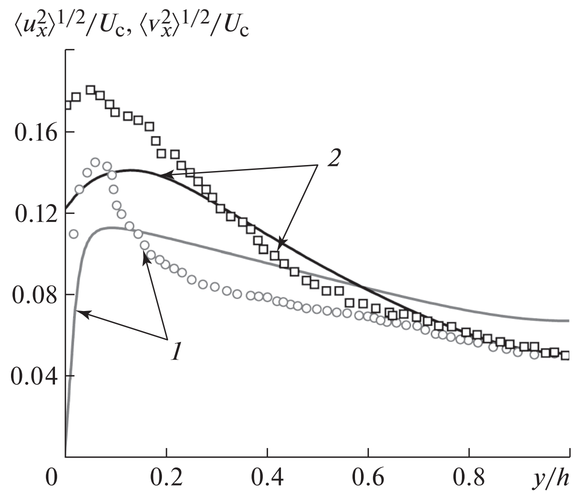

Рис. 7. Распределение дисперсии аксиальных флуктуаций скорости поперек канала несущей и дисперсной фазы частиц d_p = 70 мкм. Подписи как на рис. 6.

Для канала с небольшой шероховатостью появляется новый эффект, связанный с дополнительной генерацией нормальных к стенке флуктуации скорости дисперсной фазы, что приводит к более равномерному распределению концентрации дисперсной примеси в сечении канала. На рис. 4 и 5 иллюстрируется распределение дисперсии нормальных к стенке флуктуаций скорости частиц (U_c – скорость газа в центре канала). Видно, что для шероховатой стенки изменение дисперсии нормальных флуктуаций скорости дисперсной фазы немонотонно, что обусловливает принципиальное отличие в распределении концентрации дисперсной фазы в каналах с шероховатой и гладкими стенками.

В результате диффузионного переноса аксиального импульса дисперсной фазы к стенке канала возникает новый эффект: интенсивность флуктуаций скорости частиц в аксиальном направлении становится даже выше, чем у несущей фазы (рис. 6 и 7). Это принципиально новый эффект, связанный с существенной неоднородностью поля турбулентных флуктуаций газа при

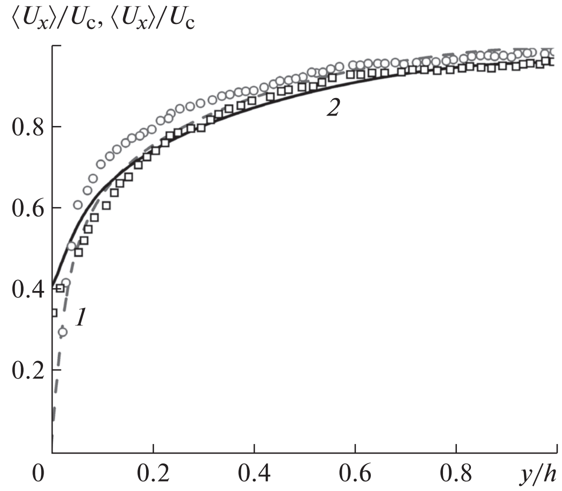

Рис. 8. Распределение осредненной аксиальной скорости несущей и дисперсной фазы поперек канала для d_p = 50 мкм. Точки – экспериментальные данные, кривые – расчет: *1* – несущая фаза; *2* – дисперсная фаза.

течении в каналах. Для свободной турбулентности интенсивность флуктуационного движения частиц всегда меньше, чем у газа.

Вследствие инерционного пробега частиц к стенке аксиальная скорость дисперсной фазы на стенке не равна нулю (рис. 8). Потеря импульса отраженных частиц приводит к заметному скоростному скольжению дисперсной и несущей фаз.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе современного математического аппарата теории случайных процессов и методов функционального анализа построена замкнутая система уравнений для первых и вторых моментов флуктуаций скорости дисперсной фазы. Выведена система граничных условий, учитывающих преобразование нормальной и аксиальной скорости частиц при соударении с шероховатой поверхностью. Представлены результаты расчетов распределения параметров инерционных частиц в плоском вертикальном канале. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с современными экспериментальными данными.

Показано, что даже сравнительно небольшая шероховатость стенок канала приводит к дополнительной генерации поперечных флуктуаций скорости дисперсной фазы, что качественно меняет характер распределения концентрации примеси по сечению канала по сравнению с гладкими стенками. Проиллюстрирован новый эффект турбулентного диффузионного переноса аксиальной компоненты импульса к стенке канала, в результате которого дисперсия аксиальных флуктуаций скорости дисперсной фазы становится выше, чем у газа.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-01061).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kussin J., Sommerfeld M.* Experimental studies on particle behaviour and turbulence modification in horizontal channel flow with different wall roughness // Exp. Fluids. 2002. V. 33. P. 143–159. https://doi.org/10.1007/s00348-002-0485-9
2. *Sommerfeld M., Kussin J.* Wall roughness effects on pneumatic conveying of spherical particles in a narrow horizontal channel // Int. J. Multiph. Flow. 2004. V. 142. P. 180–192. https://doi.org/10.1016/j.powtec.2004.05.002
3. *Benson M., Tanaka T., and Eaton J.K.* Effects of Wall Roughness on Particle Velocities in a Turbulent Channel Flow // J. Fluids Eng. 2004. V. 127. P. 250–256. https://doi.org/10.1115/1.1891149

4. *Squires K.D., Simonin O.* LES–DPS of the effect of wall roughness on dispersed-phase transport in particle-laden turbulent channel flow // Int. J. Heat and Fluid Flow. 2006. V. 27. 619–626. https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2006.02.009
5. *Konan N.A., Kannengieser O., and Simonin O.* Stochastic modeling of the multiple rebound effects for particle-rough wall collisions // Int. J. Multiph. Flow. 2009. V. 35. P. 933–945. https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2009.05.006
6. *Vreman A.W.* Turbulence attenuation in particle-laden flow in smooth and rough channels // J. Fluid Mech. 2015. V. 773. P. 103–136. https://doi.org/10.1017/jfm.2015.208
7. *Radenkovic D., Simonin O.* Stochastic modelling of three-dimensional particle rebound from isotropic rough wall surface // Int. J. Multiph. Flow.2018. V. 109. P. 35–50. https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.07.013
8. *Milici B.* Modification of particle laden near-wall turbulence in a vertical channel bounded by rough walls // Int. J. Multiph. Flow. 2018. V. 103. P. 151–168. https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.02.020
9. *Fong K.O., Amili O., and Coletti F.* Velocity and spatial distribution of inertial particles in a turbulent channel flow // J. Fluid Mech. 2019. V. 872. P. 367–406. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.355
10. *Dong L., Anyang W., Kun L., and Jianren F.* Direct numerical simulation of a particle-laden flow in a flat plate boundary layer // Int. J. Multiph. Flow. 2016. V. 79. P. 124–143. https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2015.10.011
11. *Bernardini M.* Reynolds number scaling of inertial particle statistics in turbulent channel flows // J. Fluid Mech. 2014. V. 758. R1. https://doi.org/10.1017/jfm.2014.561
12. *Reeks M.W.* On the continuum equations for dispersed particles in non-uniform flows. Phys. Fluids A. 1992. V. 446. P. 1290–1303. https://doi.org/10.1063/1.858247
13. *Liang G.Y., Cao L., and Wu D.J.* Approximate Fokker–Planck equation of system driven by multiplicative colored noises with colored cross-correlation // Physica A. 2004. V. 335. P. 371–384. https://doi.org/10.1016/j.physa.2003.12.023
14. *Klyatskin V.I.* Stochastic Equations Through the Eye of the Physicist. Amsterdam.: Elsevier Publ. Company, 2005.
15. *Derevich I.V., Shchadinskiy D.M., and Tun Z.H.* Probabilistic model of dispersed turbulent flow in channels with rough walls // Aerosol Sci. Technol. 2020. V. 54. Iss. 8. https://doi.org/10.1080/02786826.2020.1739617
16. *Kolmogorov A.N.* Foundations of the Theory of Probability. Dover Books on Mathematics, 2013.
17. *Wetchagaruna S., Riley J.J.* Dispersion and temperature statistics of inertial particles in isotropic turbulence // Phys. Fluids. 2010. V. 22. 063301-1–15. https://doi.org/10.1063/1.3392772
18. *Derevich I.V.* Spectral diffusion model of heavy inertial particles in a random velocity field of the continuum medium // Themophys. Aeromech. 2015. V. 22. P. 143–162. https://doi.org/10.1134/S086986431502002X
19. *Herrero J., Grau F.X., Grifoll J., Giralt F.* A near wall k-epsilon formulation for high Prandtl number heat transfer // Int. J. Heat Mass Transfer. 1991. V. 34. P. 711–721. https://doi.org/10.1016/0017-9310(91)90119-Y
20. *Kim J., Moin P., and Moser R.J.* Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number // J. Fluid Mech. 1987. V. 177. P. 133–166. https://doi.org/10.1017/S0022112087000892
21. *Derevich I.V., Klochkov A.K.* Analytical and numerical solution of the equation for the probability density function of the particle velocity in a turbulent flow // J. Eng. Phys. Thermophys. 2020. V. 93. P. 1043–1054. https://doi.org/10.1007/s10891-020-02206-4