

УДК 532.59: 534.2: 537.2

ОБ АКУСТИЧЕСКОМ ИЗЛУЧЕНИИ СЛАБО ЗАРЯЖЕННЫХ КАПЕЛЬ, ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ВО ВНЕШНЕМ ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

© 2022 г. А. И. Григорьев^{a,*}, Н. Ю. Колбнева^{b,**}, С. О. Ширяева^{b,***}

^a *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

^b *Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия*

**E-mail: grigorai@mail.ru*

***E-mail: kolbneva-nata@yandex.ru*

****E-mail: shir@uniyar.ac.ru*

Поступила в редакцию 15.04.2022 г.

После доработки 19.05.2022 г.

Принята к публикации 20.05.2022 г.

В асимптотических расчетах первого порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций и равновесной деформации, слабо заряженных капель естественного происхождения в слабом внешнем электрическом поле рассчитывается интенсивность акустического излучения от них и ширина диапазона частот, на который это излучение приходится. Расчеты проводятся на модели идеальной несжимаемой электропроводной жидкости. Показано, что акустическое излучение жидко-капельного аэрозоля естественного происхождения: облаков и туманов приходится на ультразвуковой диапазон частот, а акустическое излучение от дождя идет в звуковом диапазоне, и такое звуковое излучение может быть слышимым. Граница по радиусу капель между ультразвуковым и звуковым акустическими излучениями зависит от физических характеристик среды и капли и может смещаться как в одну сторону, так и в другую.

Ключевые слова: осциллирующая капля, электростатическое поле, акустическое излучение

DOI: 10.31857/S0568528122050061

Проблема изучения акустического излучения от капли, осциллирующей в газовой среде во внешнем электростатическом поле, представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике, физике атмосферного электричества, физике аэродисперсных систем, акустической левитации капель для получения высокочистых веществ [1–8]. Проблема акустического излучения от осциллирующей капли важна также для обработки результатов метеорологических исследований атмосферы методом ее акустического зондирования.

Следует отметить, что при конструировании электроакустических левитаторов, а также в вычислениях, связанных с акустическим зондированием атмосферы, капля в акустическом поле моделируется твердым шариком без внутренних степеней свободы [9]. Это представляется весьма грубым.

В связи со сказанным, рассмотрим некоторые общие закономерности акустического излучения от капли, пользуясь простейшей моделью идеальной несжимаемой электропроводной жидкости и законом сохранения энергии, предложенной в [10], и успешно примененной к изучению электромагнитного излучения при осцилляциях заряженной капли [11, 12].

Речь идет о простейшей цепочке рассуждений: в идеальной несжимаемой жидкости рассеяние энергии невозможно и дисперсионное уравнение задачи об осцилляциях капли имеет только вещественные корни. Тем не менее в задаче об акустическом (электромагнитном, если на капле есть заряд) излучении от осциллирующей капли идеальной несжимаемой жидкости, находящейся в сжимаемой среде, частота осцилляций оказывается комплексной. Мнимая же часть частоты отвечает за затухание осцилляций, невозможное в идеальной жидкости. Вывод один: часть энергии осцилляций уносится излучением: электромагнитным [10] (если капля заряжена или осциллирует в электростатическом поле) или акустическим [12]. Зная декремент затухания

осцилляций капли, несложно рассчитать интенсивность ее акустического (электромагнитного) излучения [12].

1. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим слабо заряженную сферическую каплю равновесного радиуса R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с массовой плотностью ρ_1 , коэффициентом поверхностного натяжения σ , подвешенную в конвективном облаке в суперпозиции гравитационного \mathbf{g} , внутриоблачного коллинеарного \mathbf{g} однородного электростатического поля напряженностью \mathbf{E}_0 и восходящего потока воздуха. Внешнюю среду (воздух) будем считать сжимаемым идеальным диэлектриком с массовой плотностью ρ_2 и диэлектрической проницаемостью ϵ_{ex} . Положим, что в воздухе звук распространяется со скоростью v . Температуру капли и внешней среды будем считать неизменной, а объем жидкой фазы капли – постоянным. В дальнейших рассуждениях малым зарядом капли будем пренебрегать (он нужен только для того, чтобы обеспечить неподвижность капли).

В соответствии с [13, 14] капля, находящаяся во внешнем электростатическом поле, принимает вытянутую вдоль поля \mathbf{E}_0 примерно сфероидальную форму с эксцентриситетом e . Примем, что ось z (ось симметрии капли) направлена в сторону, противоположную гравитационному полю \mathbf{g} .

Задачу будем решать в сферической системе координат (r, θ, φ) , начало которой поместим в центре масс капли. Полярный угол θ отсчитывается от \mathbf{E}_0 , а азимутальный угол φ в дальнейшем не используется ввиду осевой симметрии капли.

Примем, что на поверхности жидкости существует капиллярное волновое движение с амплитудой $\sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$, где κ – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, порождаемое уже тепловым движением молекул жидкости [15], которое создает малое возмущение $\xi(\theta, t)$ равновесной поверхности капли. Для большинства реальных жидкостей, включая жидкие металлы, тепловая амплитуда капиллярных волн не превышает десятых долей нанометра.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Уравнение возмущенной поверхности капли представим в виде

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t), \quad (2.1)$$

где $r(\theta)$ – равновесная форма капли. Примем также, что амплитуда капиллярного волнового возмущения $\xi(\theta, t)$ много меньше радиуса невозмущенной капли $\max |\xi| \ll R$. Отношение $\max |\xi| / R$ примем в качестве малого параметра $\epsilon \equiv |\xi| / R \ll 1$ задачи.

Пусть движение жидкости в капле и движение внешней среды бесконечно малой амплитуды, порождаемое капиллярным волновым движением на границе раздела сред, является потенциальным. Тогда поля скоростей безвихревого движения в капле и среде $\mathbf{V}_j(r, \theta, t)$ определится функциями гидродинамических потенциалов $\psi_j(r, \theta, t)$ $\mathbf{V}_j(r, \theta, t) = \nabla \psi_j(r, \theta, t)$ [16], (индексом $j = 1$ отмечаются величины, относящиеся к капле, $j = 2$ – к среде). При этом потенциалы скоростей внутри и вне капли, а также возмущение поверхности капли имеют один порядок малости $\psi_j(r, \theta, t) \sim \xi(\theta, t) \sim \epsilon$, поскольку именно зависящая от времени деформация поверхности генерирует капиллярное волновое движение.

Принимая каплю идеальным проводником, для которого характерное время распределения индуцированных внешним электрическим полем зарядов много меньше характерного гидродинамического времени колебаний поверхности капли, электрическое поле вокруг капли будем считать квазистационарным. В этом случае электрическое поле характеризуется электрическим потенциалом $\Phi(r, \theta, t)$, определяемым напряженностью поля \mathbf{E} на основе соотношения: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \Phi(r, \theta, t)$ [17].

Математическая формулировка задачи о расчете спектра капиллярных осцилляций незаряженной капли, во внешнем электростатическом поле, и генерации акустического излучения, состоит из уравнений Лапласа для потенциала поля скоростей движения жидкости в капле $\psi_1(r, \theta, t)$

и электростатического потенциала $\Phi(r, \theta, t)$, а также волнового уравнения для потенциала поля скоростей движения внешней среды $\psi_2(r, \theta, t)$

$$\Delta\psi_1(r, \theta, t) = 0, \quad \Delta\Phi(r, \theta, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2(r, \theta, t)}{\partial t^2} - \Delta\psi_2(r, \theta, t) = 0 \quad (2.3)$$

и граничных условий

$$r \rightarrow 0: \psi_1(r, \theta, t) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty: \Phi(r, \theta, t) \rightarrow -E_0 r \cos \theta \quad (2.4)$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t) \quad \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial \theta} \quad (2.5)$$

$$P_1(r, \theta, t) - P_2(r, \theta, t) + P_E(r, \theta, t) - P_\sigma(r, \theta, t) = 0 \quad (2.6)$$

$$\Phi(r, \theta, t) = \Phi_s(t) \quad (2.7)$$

Граничное условие для волнового уравнения (2.3) на бесконечности имеет вид $r \rightarrow \infty$:

$$\frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial r} + ik\psi_2(r, \theta, t) = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.8)$$

Сформулированную задачу дополним интегральными условиями

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \int_V \mathbf{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}(\theta, t), \nabla \Phi) dS = q, \quad S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi] \quad (2.10)$$

В выражениях (2.4)–(2.10) соотношения (2.4) есть граничные условия в центре капли и на бесконечности; (2.5), (2.6) – кинематическое и динамическое условия на ее возмущенной поверхности; (2.7) – условие постоянства электрического потенциала на поверхности идеально электропроводной капли; (2.8) – условие излучения Зоммерфельда [18]; (2.9) – условия постоянства полного объема капли и неподвижности ее центра масс; (2.10) – условие неизменности полного заряда капли.

Так же в (2.4)–(2.10) введены обозначения $\Phi_s(t)$ – постоянное значение электрического потенциала на поверхности капли, $k = \text{Re} \omega_n / v$ – волновое число, q – малый ($\sim O(\varepsilon^2)$) заряд капли, o и O – символы порядка малости [19], $P_j = P_{0j} - \rho_j \partial \psi_j(r, \theta, t) / \partial t$ – давления внутренней ($j = 1$) и внешней ($j = 2$) среды на поверхность капли, P_{0j} – постоянные давления в капле и среде, $P_E = \varepsilon_{ex} (\nabla \Phi)^2 / 8\pi$ – давление электрического поля на поверхность капли, $P_\sigma = \sigma (\nabla_s \cdot \mathbf{n}(\theta, t))$ – давление капиллярных сил, ∇_s – поверхностный оператор “набла”, $\mathbf{n}(\theta, t)$ – единичный вектор нормали к возмущенной поверхности капли, вычисляемый как

$$\mathbf{n}(\theta, t) = \frac{\nabla(r - r(\theta, t))}{\left| \nabla(r - r(\theta, t)) \right|_{r=r(\theta, t)}} \quad (2.11)$$

Сформулированную задачу (2.2)–(2.11) будем решать стандартными методами теории возмущений в линейном приближении по безразмерной амплитуде осцилляций ε [19]. Для этого искомые функции разложим в ряд по степеням малого параметра ε с точностью до слагаемых первого порядка

$$\xi(\theta, t) = \xi^{(1)}(\theta, t) + O(\varepsilon^2), \quad \psi_j(r, \theta, t) = \psi_j^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$\Phi(r, \theta, t) = \Phi^{(0)}(r, \theta) + \Phi^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$P_j(r, \theta, t) = P_j^{(0)}(r, \theta) + P_j^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$P_E(r, \theta, t) = P_E^{(0)}(r, \theta) + P_E^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$P_\sigma(r, \theta, t) = P_\sigma^{(0)}(r, \theta) + P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2)$$

где $\Phi^{(0)}(r, \theta)$ – электростатический потенциал у поверхности равновесной капли, $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$ – добавка к электростатическому потенциалу, связанная с осцилляциями поверхности капли. Верхний индекс в скобках указывает на порядок малости по ε .

Подставляя эти разложения в исходную систему уравнений (2.2)–(2.10) и приравнивая слагаемые одного порядка малости по ε , получим задачи нулевого и первого порядков.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА ПО ε

Для отыскания равновесного электрического потенциала $\Phi^{(0)}(r, \theta)$ и равновесной формы поверхности капли $r(\theta)$ решим электрогидродинамическую задачу нулевого порядка по ε , получающуюся из (2.2)–(2.10) группировкой слагаемых $\sim \varepsilon^0$

$$\Delta \Phi^{(0)}(r, \theta) = 0$$

$$r \rightarrow \infty: \Phi^{(0)}(r, \theta) \rightarrow -E_0 r \cos \theta$$

$$r = r(\theta): P_1^{(0)}(r, \theta, t) - P_2^{(0)}(r, \theta, t) + P_E^{(0)}(r, \theta, t) - P_\sigma^{(0)}(r, \theta, t) = 0$$

$$\Phi^{(0)}(r, \theta) = \text{const};$$

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \int_V \mathbf{r} \times r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}_0(\theta), \nabla \Phi^{(0)}(r, \theta)) dS = 0, \quad S = [r = r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

где $\mathbf{n}_0(\theta)$ – от нормали к равновесной поверхности капли $r(\theta)$.

Из приведенной выше задачи несложно найти

$$\Phi^{(0)}(r, \theta) = E_0 \left[r P_1(\mu) \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right) + \frac{2R^3}{5r^2} e^2 \left(P_1(\mu) + \frac{3R^2}{2r^2} P_3(\mu) \right) \right] \quad (3.1)$$

$$r(\theta) = R \left(1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) \right) + O(e^4), \quad e^2 = \frac{9\varepsilon_{ex} E_0^2 R}{16\pi\sigma} \quad (3.2)$$

где $P_n(\mu)$ – осесимметричный полином Лежандра n -го порядка [20]; e – эксцентриситет капли; n – целое положительное число; $\mu \equiv \cos \theta$. В (3.1), (3.12) соотношение (3.1) определяет равновесный электростатический потенциал невозмущенной капли, (3.2) – равновесную форму невозмущенной капли.

4. РЕШЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ ПО ε

Для определения линейной поправки к потенциалу электрического поля $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$, связанного с капиллярным волновым движением поверхности капли, сформулируем электрическую задачу в первом порядке малости по ε

$$\Delta \Phi^{(1)}(r, \theta, t) = 0 \quad (4.1)$$

$$r \rightarrow \infty: \Phi^{(1)}(r, \theta, t) \rightarrow 0 \quad (4.2)$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \Phi(r, \theta, t) = \Phi_s(t) \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}, \nabla \Phi) dS = 0, \quad S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi] \quad (4.4)$$

Из решения уравнения Лапласа (4.1) при выполнении условия ограниченности (4.2) получим электрический потенциал, представленный в виде ряда по полиномам Лежандра

$$\Phi^{(1)}(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n r^{-(n+1)} P_n(\mu) \quad (4.5)$$

где $P_n(\mu)$ – полином Лежандра n -го порядка [20], n – целое число, $\mu \equiv \cos \theta$.

Функцию волнового возмущения $\xi(\theta, t)$ с гармонической временной зависимостью отдельных слагаемых возьмем в виде $\xi(\theta, t) \sim \exp(i\omega_n t)$ [21]

$$\xi(r, \theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} M_n \exp(i\omega_n t) P_n(\mu) \quad (4.6)$$

Здесь минимальное значение индекса суммирования $n = 2$ определяется исключением радиальных пульсаций и поступательного движения капли в линейном приближении по ε . В выражениях (4.5), (4.6) действительные амплитудные коэффициенты F_n , M_n имеют первый порядок малости.

Подставим разложение (4.5) в условие (4.3) постоянства электрического потенциала на поверхности капли и с учетом интегрального условия сохранения заряда капли (4.4) и соотношений (2.1), (4.6) определим амплитудные коэффициенты F_n в (4.5), при помощи которых запишем электрический потенциал $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$ в виде

$$\Phi^{(1)}(r, \theta, t) = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} [l_1 M_{n-1} \exp(i\omega_{n-1} t) + l_2 M_{n+1} \exp(i\omega_{n+1} t) + e^2 (l_3 M_{n-3} \exp(i\omega_{n-3} t) + l_4 M_{n-1} \exp(i\omega_{n-1} t) + l_5 M_{n+1} \exp(i\omega_{n+1} t) + l_6 M_{n+3} \exp(i\omega_{n+3} t))] P_n(\mu) \quad (4.7)$$

$$l_1 = \frac{3n}{2n-1}, \quad l_2 = \frac{3(n+1)}{2n+3}, \quad l_3 = \frac{3n(n-2)(n-1)(n+1)}{2(2n-5)(2n-3)(2n-1)}$$

$$l_4 = \frac{n(50n^4 + n^3 - 103n^2 + 39n - 27)}{10(4n^2 - 9)(2n-1)^2}$$

$$l_5 = \frac{(n+1)(50n^4 + 321n^3 + 621n^2 + 278n - 180)}{10(4n^2 + 8n - 5)(2n+3)^2}, \quad l_6 = \frac{3(n+5)(n+3)(n+2)(n+1)}{2(2n+7)(2n+5)(2n+3)}$$

5. РЕШЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ ПО ε . ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Математическая формулировка гидродинамической части решаемой задачи первого порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций ε имеет вид

$$\Delta \psi_1(r, \theta, t) = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2(r, \theta, t)}{\partial t^2} - \Delta \psi_2(r, \theta, t) = 0 \quad (5.2)$$

$$r \rightarrow 0: \psi_1(r, \theta, t) \rightarrow 0 \quad (5.3)$$

$$r \rightarrow \infty: \frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial r} + ik \psi_2(r, \theta, t) = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (5.4)$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial \theta} \quad (5.5)$$

$$P_1^{(1)}(r, \theta, t) - P_2^{(1)}(r, \theta, t) + P_E^{(1)}(r, \theta, t) - P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) = 0 \quad (5.6)$$

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0, \quad \int_V \mathbf{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \mathbf{0}$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}, \nabla \Phi) dS = 0, \quad S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к возмущенной поверхности капли (2.1), и имеет согласно (2.11) вид

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \left(\mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r(\theta) + \xi(\theta, t)) \mathbf{e}_\theta \right) \left(1 + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r(\theta) + \xi(\theta, t)) \right]^2 \right)^{-1/2} \Bigg|_{r(\theta) + \xi(\theta, t)} = \\ &= \left(\mathbf{e}_r + \frac{1}{r(\theta) + \xi(\theta, t)} \frac{\partial (r(\theta) + \xi(\theta, t))}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \right) \left\{ 1 + \left[\frac{1}{r(\theta) + \xi(\theta, t)} \frac{\partial (r(\theta) + \xi(\theta, t))}{\partial \theta} \right]^2 \right\}^{-1/2} = \mathbf{n}(\theta, t) \\ \mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}. \end{aligned}$$

В выписанной задаче первого порядка малости: (5.4) — условие Зоммерфельда, (5.5) — кинематическое граничное условие на поверхности капли; (5.6) — динамическое граничное условие, поправки к давлениям, связанные с возмущением поверхности капли, определяются соотношениями $r = R$:

$$P_j^{(1)}(r, \theta, t) = -\rho_j \left[\frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial t} + \frac{1}{3} e^2 R \frac{\partial^2 \psi_j(r, \theta, t)}{\partial r \partial t} P_2(\mu) \right], \quad (j = 1, 2) \quad (5.7)$$

$$P_E^{(1)}(r, \theta, t) = -\frac{3\epsilon_{ex} E_0^2}{4\pi} \left[6E_0 P_1(\mu) \frac{\xi(r, \theta)}{R} + \frac{\partial \Phi_1(r, \theta, t)}{\partial r} \right] P_1(\mu) \quad (5.8)$$

$$P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) = \frac{\sigma}{R} \left[-\left(1 - \frac{2}{3} e^2 P_2(\mu) \right) (2 + \hat{L}) \frac{\xi(\theta, t)}{R} + \frac{2}{3} e^2 \frac{\xi(\theta, t)}{R} \hat{L} P_2(\mu) \right] \quad (5.9)$$

$$\hat{L} \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

Подставим в (5.8) уравнения для волнового возмущения (4.6) и поправки к электрическому потенциалу (4.7) и в результате несложных преобразований получим электрическое давление первого порядка малости по ϵ

$$P_E^{(1)} = \frac{9\epsilon_{ex} E_0^2}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} [M_{n-2} \exp(i\omega_{n-2}t) T_1 + M_n \exp(i\omega_n t) T_2 + M_{n+2} \exp(i\omega_{n+2}t) T_3] P_n(\mu) \quad (5.10)$$

$$T_1 = \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-3)(2n-1)}, \quad T_2 = \frac{n(4n^3 + 2n^2 - 6n - 1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}, \quad T_3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}$$

Из формулы (5.9) с учетом функции (4.6) найдем линейную по малому параметру ϵ поправку к давлению капиллярных сил

$$\begin{aligned} P_\sigma^{(1)} &= \frac{\sigma}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} [M_n \exp(i\omega_n t) T_4 + \\ &+ e^2 (M_{n-2} \exp(i\omega_{n-2}t) T_5 + M_n \exp(i\omega_n t) T_6 + M_{n+2} \exp(i\omega_{n+2}t) T_7)] P_n(\mu) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$T_4 = (n-1)(n+2), \quad T_5 = -\frac{2}{3} (4 + (n-2)(n-1)) K_{2,n-2,n}$$

$$T_6 = -\frac{2}{3} (4 + n(n+1)) K_{2,n,n}, \quad T_7 = -\frac{2}{3} (4 + (n+2)(n+3)) K_{2,n+2,n}$$

Примем, что гидродинамические потенциалы $\psi_j(r, \theta, t)$ зависят от времени t гармонически: $\psi_j(r, \theta, t) \sim \exp(i\omega_n t)$. С учетом данных рассуждений волновое уравнение (5.2) приведем к однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \psi_2(r, \theta, t) + k^2 \psi_2(r, \theta, t) = 0 \quad (5.12)$$

Потенциал поля скоростей течения жидкости в капле $\psi_1(r, \theta, t)$, являющийся решением уравнения Лапласа (5.1), удовлетворяющий условию ограниченности в центре масс капли (5.3), запишем в виде разложения по осесимметричным полиномам Лежандра

$$\psi_1(r, \theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} A_n \exp(i\omega_n t) r^n P_n(\mu) \quad (5.13)$$

Решение уравнения (5.12) для потенциала скоростей акустического поля при выполнении условия излучения на бесконечности (5.4) представим в виде

$$\psi_2(r, \theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \exp(i\omega_n t) h_n^{(2)}(kr) P_n(\mu) \quad (5.14)$$

где $h_n^{(2)}(z)$ – сферическая функция Бесселя третьего рода [22].

Заметим, что в разложениях (5.13), (5.14) коэффициенты A_n , B_n имеют первый порядок малости по безразмерной амплитуде осцилляций.

Подстановка разложений (4.6), (5.13), (5.14) в кинематическое граничное условие при $j = 1, 2$, позволяет найти коэффициенты A_n , B_n в (5.13), (5.14), выраженные через действительные амплитуды M_n , которые дают решение для потенциалов $\psi_1(r, \theta, t)$, $\psi_2(r, \theta, t)$ в виде

$$\psi_1(r, \theta, t) = R \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \left[\frac{i\omega_n}{n} M_n \exp(i\omega_n t) + \right. \quad (5.15)$$

$$\left. + e^2 (i\omega_{n-2} M_{n-2} \exp(i\omega_{n-2} t) T_8 + i\omega_n M_n \exp(i\omega_n t) T_9 + i\omega_{n+2} M_{n+2} \exp(i\omega_{n+2} t) T_{10}) \right] P_n(\mu)$$

$$T_8 = -\frac{1}{3n(n-2)} ((n-2)(n-3) K_{2,n-2,n} - \alpha_{2,n-2,n}), \quad T_9 = -\frac{1}{3n^2} (n(n-1) K_{2,n,n} - \alpha_{2,n,n})$$

$$T_{10} = -\frac{1}{3n(n+2)} ((n+2)(n+1) K_{2,n+2,n} - \alpha_{2,n+2,n})$$

$$\psi_2(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r(h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} [i\omega_n M_n \exp(i\omega_n t) + \quad (5.16)$$

$$+ e^2 (i\omega_{n-2} M_{n-2} \exp(i\omega_{n-2} t) T_{11} + i\omega_n M_n \exp(i\omega_n t) T_{12} + i\omega_{n+2} M_{n+2} \exp(i\omega_{n+2} t) T_{13})] P_n(\mu)$$

$$T_{11} = \frac{1}{3} \left(-R \frac{\partial_{r^2}^2(h_{n-2}^{(2)}(kr))}{\partial_r(h_{n-2}^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} K_{2,n-2,n} + \frac{1}{R} \frac{h_{n-2}^{(2)}(kR)}{\partial_r(h_{n-2}^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \alpha_{2,n-2,n} \right)$$

$$T_{12} = \frac{1}{3} \left(-R \frac{\partial_{r^2}^2(h_n^{(2)}(kr))}{\partial_r(h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} K_{2,n,n} + \frac{1}{R} \frac{h_n^{(2)}(kR)}{\partial_r(h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \alpha_{2,n,n} \right)$$

$$T_{13} = \frac{1}{3} \left(-R \frac{\partial_{r^2}^2(h_{n+2}^{(2)}(kr))}{\partial_r(h_{n+2}^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} K_{2,n+2,n} + \frac{1}{R} \frac{h_{n+2}^{(2)}(kR)}{\partial_r(h_{n+2}^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \alpha_{2,n+2,n} \right)$$

$$K_{m,k,n} = [C_{k0,m0}^{n0}]^2, \quad \alpha_{m,k,n} = -\sqrt{m(m+1)k(k+1)} C_{m0,k0}^{n0} \times C_{m-1,k1}^{n0}$$

где $C_{mk,lp}^{nq}$ – коэффициенты Клебша–Гордана [20], отличные от нуля при условии $|m-l| \leq n \leq m+l$, $m+l+n$ – четное и $k+p=q$.

Подставляя потенциалы поля скоростей (5.15), (5.16) в (5.7), найдем поправки первого порядка малости к давлениям внутренней и внешней для капли сред

$$P_1^{(1)} = \rho_1 R \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\omega_n^2}{n} M_n \exp(i\omega_n t) + e^2 (\omega_{n-2}^2 M_{n-2} \exp(i\omega_{n-2} t) T_8^+ + \omega_n^2 M_n \exp(i\omega_n t) T_9^+ + \omega_{n+2}^2 M_{n+2} \exp(i\omega_{n+2} t) T_{10}^+) \right] P_n(\mu) \quad (5.17)$$

$$T_8^+ = T_8 + \frac{1}{3} K_{2,n-2,n}, \quad T_9^+ = T_9 + \frac{1}{3} K_{2,n,n}, \quad T_{10}^+ = T_{10} + \frac{1}{3} K_{2,n+2,n}$$

$$P_2^{(1)} = \rho_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\partial_r(h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \{ \omega_n^2 M_n \exp(i\omega_n t) h_n^{(2)}(kR) + e^2 (\omega_{n-2}^2 M_{n-2} \exp(i\omega_{n-2} t) T_{11}^+ + \omega_n^2 M_n \exp(i\omega_n t) T_{12}^+ + \omega_{n+2}^2 M_{n+2} \exp(i\omega_{n+2} t) T_{13}^+) \} P_n(\mu) \quad (5.18)$$

$$T_{11}^+ = T_{11} \times h_{n-2}^{(2)}(kR) + \frac{1}{3} R \times \partial_r(h_{n-2}^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R} K_{2,n-2,n}$$

$$T_{12}^+ = T_{12} \times h_n^{(2)}(kR) + \frac{1}{3} R \times \partial_r(h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R} K_{2,n,n}$$

$$T_{13}^+ = T_{13} \times h_{n+2}^{(2)}(kR) + \frac{1}{3} R \times \partial_r(h_{n+2}^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R} K_{2,n+2,n}$$

В итоге из условия баланса давлений (5.6) в любой точке на возмущенной поверхности сферической капли с учетом (5.10), (5.11), (5.17), (5.18), пренебрегая взаимодействием различных мод осцилляций, найдем дисперсионное уравнение задачи

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{R^3} \frac{n(n-1)(n+2)}{\rho_1 - n\rho_2 T_0^+} \left(1 + e^2 \left(T_0 - \frac{\rho_1 T_9^- - n\rho_2 T_{12}^-}{\rho_1 - n\rho_2 T_0^+} \right) \right) \quad (5.19)$$

$$T_0 = -\frac{2n(2n^4 + 29n^3 + 24n^2 - 23n - 2)}{3(n-1)(n+2)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

$$T_0^+ = \frac{h_n^{(2)}(kR)}{R \cdot \partial_r(h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \quad T_9^- = \frac{(n+1)(n+3)}{3(2n-1)(2n+3)}$$

$$T_{12}^- = \frac{1}{3} \left(\left(1 - \frac{\partial_r^2(h_n^{(2)}(kr))}{\partial_r(h_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} \frac{h_n^{(2)}(kR)}{\partial_r(h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \right) K_{2,n,n} + \frac{1}{R^2} \left(\frac{h_n^{(2)}(kR)}{\partial_r(h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \right)^2 \alpha_{2,n,n} \right)$$

Входящую в уравнение (5.19) сферическую функцию Бесселя $h_n^{(2)}(z)$ для целого значения индекса представим в виде степенного ряда [22, 23]

$$h_n^{(2)}(z) = \frac{1}{z} \exp(-iz) \sum_{m=0}^n i^{m+1} \frac{(2n-m)!}{(n-m)! m!} \frac{1}{(2z)^{n-m}}, \quad z = kr \quad (5.20)$$

Аналогично тому, как это было проделано в [11, 24], при малом значении аргумента z ($z \ll 1$) для функций $T_0^+(z)$, $T_{12}^-(z)$ получим следующие асимптотики

$$T_0^+(z) \approx -\frac{n+1}{n^2} + i \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 z^{2n+1} \quad (5.21)$$

$$T_{12}^-(z) = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+1} K_{2,n,n} - \frac{1}{(n+1)^2} \alpha_{2,n,n} \right) \quad (5.22)$$

Решение дисперсионного уравнения имеет комплексный вид, поэтому запишем его как $\omega_n = \omega'_n + i\omega''_n$, где мнимая часть ω''_n имеет смысл декремента затухания из-за потерь механической энергии осцилляций капли на излучение продольных акустических волн. С учетом малости мнимой части по сравнению с реальной частью ($\omega''_n \ll \omega'_n$) для квадрата частоты осцилляций капли будет справедливо соотношение

$$\omega_n^2 \approx \omega_n'^2 + 2i\omega_n'\omega_n'' \quad (5.23)$$

Сопоставляя выражения (5.19), (5.23) и учитывая (5.21), (5.22), найдем реальную ω'_n и мнимую ω''_n части дисперсионного уравнения для малого аргумента $z_0 = kR$ в виде

$$\omega_n'^2 = \frac{\sigma}{R^3 \rho_1} \frac{n(n-1)(n+2)}{\kappa} \left(1 + e^2 \left(T_0 - \left(T_9^- - \frac{\rho_2}{\rho_1} T_{12}^- \right) \kappa^{-1} \right) \right), \quad \kappa \equiv 1 + \frac{n+1}{n} \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (5.24)$$

$$\omega_n'' = \frac{\sigma \rho_2}{R^3 \rho_1^2} n^2 (n-1)(n+2) \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 z_0^{2n+1} \frac{1}{2\omega_n'} \quad (5.25)$$

Подставим в (5.25) решение для реальной части частоты осцилляций и при $z_0 = \omega_n R/v$ получим декремент затухания n -й моды капиллярных осцилляций капли, связанный с генерацией акустических волн η_* , в виде

$$\eta_* = \frac{\sigma^{n+1}}{R^{n+2} v^{2n+1} \rho_1^{n+1}} n^{n+2} (n-1)^{n+1} (n+2)^{n+1} \frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 \times \\ \times \kappa^{-n} \left(1 + e^2 \left(T_0 - \left(T_9^- - n \frac{\rho_2}{\rho_1} T_{12}^- \right) \kappa^{-1} \right) \right)^n$$

В частности, если плотность внешней среды много меньше плотности внутренней среды ($\rho_2 \ll \rho_1$), декремент затухания для второй (основной) моды капиллярных осцилляций капли примет вид

$$\eta = \frac{14.2 \sigma^3 \rho_2}{R^4 v^5 \rho_1^4} (1 - 1.2e^2)^2 \quad (5.26)$$

На рис. 1а–б по (26) приведены кривые, иллюстрирующие зависимость декремента затухания η от размера капли R . Видно, что с ростом радиуса равновеликой сферической капли величина η весьма быстро снижается: при увеличении размера капли в три раза декремент затухания уменьшается на два порядка. Из (5.26) нетрудно видеть, что декремент затухания линейно зависит от плотности внешней среды, и что возрастание скорости звука в окружающей среде приводит к быстрому уменьшению декремента затухания.

На рис. 2а–б приведены зависимости частот акустических волн по (5.24) с использованием (5.21)–(5.22): а) для крупных капель (капель дождя) и б) для мелких, облачных. Видно, что дождевые капли при осцилляциях излучают акустические волны в диапазоне частот, воспринимаемых человеческим ухом, а облачные капли – в ультразвуковой области.

6. ИНТЕНСИВНОСТЬ АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Интенсивность полного звукового излучения осциллирующей капли, когда длина излучаемой акустической волны велика по сравнению с радиусом капли $\lambda \gg R$, определяется известным выражением [18]

$$I = \rho_2 v \oint_S \overline{V_2^2} dS \quad (6.1)$$

где $\overline{V_2^2}$ – среднее значение квадрата скорости движения частиц внешней среды в звуковой волне, а интегрирование производится по возмущенной поверхности капли, определяемой выражением (2.1).

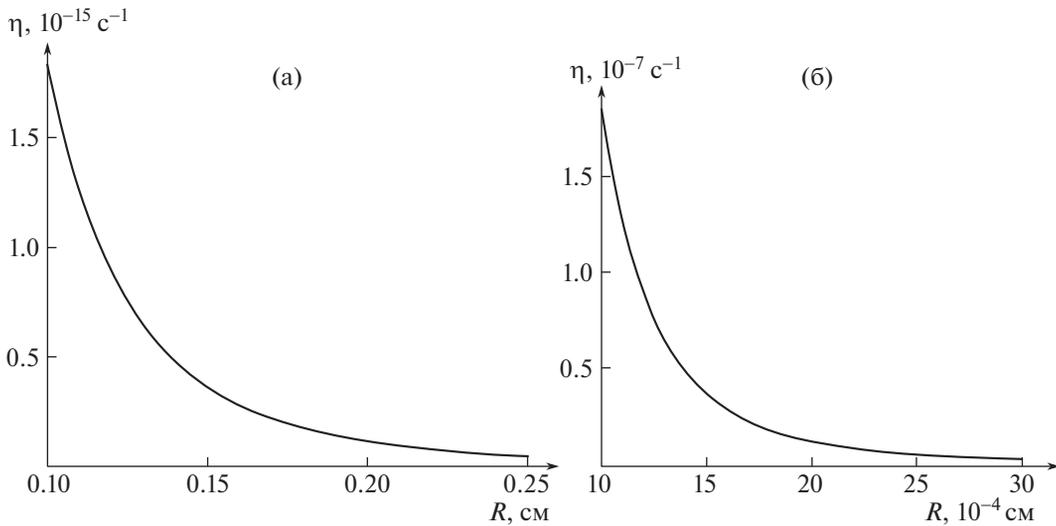


Рис. 1. Зависимость декремента затухания η дождевой незаряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле, от радиуса капли R : $n = 2$, $\epsilon_{ex} = 1$, $\sigma = 73$ дин/см, $E_0 = 0.17$ СГСЭ, $M_n = 0.1 \cdot R$, $\rho_1 = 1$ г/см³, $\rho_2 = 1.3 \times 10^{-3}$ г/см³, $\nu = 3.3 \times 10^4$ см/с; а) дождевая капля, б) облачная капля.

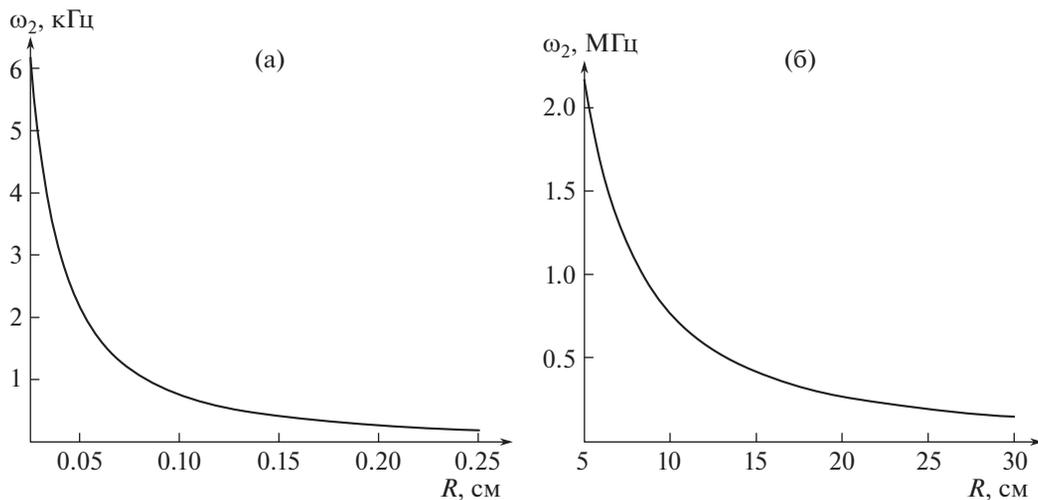


Рис. 2. Зависимость частоты осцилляций ω_2 капли от ее радиуса: параметры те же, что на рис. 1; а) – дождевая капля, б) – облачная капля.

Скорость движения внешней среды $\mathbf{V}_2(r, \theta, t) = \text{Re}(\nabla \psi_2(r, \theta, t))$ задается нормальной составляющей к поверхности осциллирующей капли и содержит лишь радиальную компоненту

$$\mathbf{V}_2(r, \theta, t) = \text{Re}\left(\frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial r} \mathbf{e}_r\right) \tag{6.2}$$

Для нахождения потенциала $\psi_2(r, \theta, t)$ в дальней области акустического поля (для расстояний, больших длины звуковой волны $r \gg \lambda$) сферическая функция Бесселя $h_n^{(2)}(z)$ в (5.20) при больших значениях аргумента $z \gg 1$ имеет асимптотическое представление:

$$h_n^{(2)}(z) \approx i^{n+1} \frac{1}{z} \exp(-iz), \quad z = kr \gg 1, \tag{6.3}$$

В уравнении (5.16) найдем асимптотическое поведение функции $\partial_z(h_n^{(2)}(z))$ для малого аргумента $z \ll 1$

$$\partial_z(h_n^{(2)}(z)) \approx -i \frac{(2n)!(n+1)}{2^n n!} \frac{1}{z^{n+2}} \exp(-iz), \quad z = z_0 = kR \ll 1 \quad (6.4)$$

Используя полученные асимптотики (6.3), (6.4), при условии $R \ll r$ потенциал скорости в окружающей каплю среде приобретет вид

$$\begin{aligned} \Psi_2(r, \theta, t) = & - \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} \frac{k^n R^{n+2}}{r} \exp(-ikr) [\omega'_n M_n \exp(i\omega'_n t) + \\ & + e^2 (\omega'_{n-2} M_{n-2} \exp(i\omega'_{n-2} t) T'_{11} + \omega'_n M_n \exp(i\omega'_n t) T'_{12} + \omega'_{n+2} M_{n+2} \exp(i\omega'_{n+2} t) T'_{13})] P_n(\mu) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Заметим, что на больших расстояниях r от осциллирующей капли в волновой зоне акустического излучения потенциал поля скоростей $\Psi_2(r, \theta, t)$ представлен суперпозицией расходящихся сферических волн с амплитудами, убывающими с расстоянием r по закону $\sim 1/r$.

В итоге, подставляя потенциал (6.5) в (6.2), при $R \ll r$ для скорости движения частиц внешней среды имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_2(r, \theta, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+2} \frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} R^{n+2} k^{n+1} \frac{1}{r} \exp(-ikr) [\omega'_n M_n \exp(i\omega'_n t) + \\ & + e^2 (\omega'_{n-2} M_{n-2} \exp(i\omega'_{n-2} t) T'_{11} + \omega'_n M_n \exp(i\omega'_n t) T'_{12} + \omega'_{n+2} M_{n+2} \exp(i\omega'_{n+2} t) T'_{13})] P_n(\mu) \mathbf{e}_r \\ T'_{11} = \text{Re } T_{11} \approx & \frac{1}{3} (n-1) \left((n-1) \left(\frac{2}{(n-2)^2} + \frac{1}{n-3} \right) K_{2,n-2,n} - \frac{1}{(n-2)^2} \alpha_{2,n-2,n} \right) \\ T'_{12} = \text{Re } T_{12} \approx & \frac{1}{3} (n+1) \left((n+1) \left(\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n-1} \right) K_{2,n,n} - \frac{1}{n^2} \alpha_{2,n,n} \right) \\ T'_{13} = \text{Re } T_{13} \approx & \frac{1}{3} (n+3) \left((n+3) \left(\frac{2}{(n+2)^2} + \frac{1}{n+1} \right) K_{2,n+2,n} - \frac{1}{(n+2)^2} \alpha_{2,n+2,n} \right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

В общей формуле для интенсивности звукового излучения (6.1) среднее значение квадрата скорости движения внешней для капли среды вычислим в виде $\overline{|V_2|^2} = |V_2|^2 / 2$. Скалярно умножая выражение (6.6) на комплексно сопряженное ему, получим

$$\begin{aligned} \overline{V_2^2(r, \theta, t)} = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} i^{n+2} (-i)^{m+2} \frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} \frac{2^m m!}{(2m)!(m+1)} R^{n+2} R^{m+2} k^{n+1} k^{m+1} \frac{1}{r^2} \times \\ & \times [\omega'_n M_n + e^2 (\omega'_{n-2} M_{n-2} T'_{11} + \omega'_n M_n T'_{12} + \omega'_{n+2} M_{n+2} T'_{13})] P_n(\mu) P_m(\mu) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Подставляя (6.7) в (6.1) и учитывая свойство ортогональности полиномов Лежандра [22], в формуле (6.1) рассчитаем интеграл по поверхности возмущенной капли $S = [r = r(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$. В итоге интенсивность акустического излучения незаряженной осциллирующей сфероидальной капли примет вид

$$\begin{aligned} I = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi}{2n+1} \left(\frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} \right)^2 \rho_2 v R^{2n+4} k^{2n+2} \times \\ & \times \left[\omega'_n M_n + e^2 (\omega'_{n-2} M_{n-2} T'_{11} + \omega'_n M_n T'_{12} + \omega'_{n+2} M_{n+2} T'_{13}) \right]^2 \end{aligned} \quad (6.8)$$

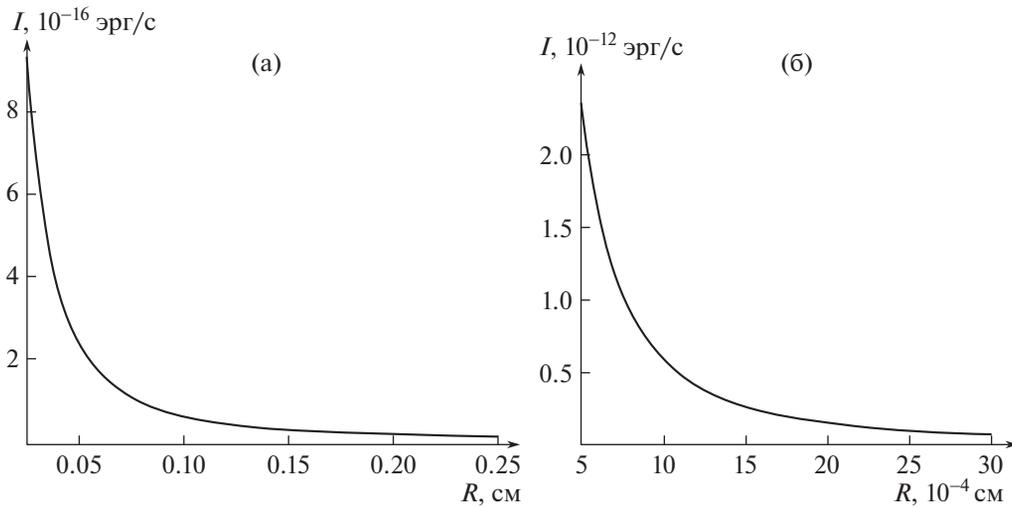


Рис. 3. Зависимость интенсивности акустического излучения I незаряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле, от радиуса капли R : параметры те же, что на рис. 1; а) – дождевая капля; излучение в звуковом диапазоне частот, б) – облачная капля; излучение ультразвуковое.

С учетом выражения для волнового числа: $k = \omega'_n/v$, аналитическое выражение (6.8) преобразуется к виду

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi}{2n+1} \left(\frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} \right)^2 \rho_2 R^{2n+4} \frac{\omega_n^{2n+2}}{v^{2n+1}} \times [\omega_n^i M_n + e^2 (\omega_{n-2}^i M_{n-2} T'_{11} + \omega_n^i M_n T'_{12} + \omega_{n+2}^i M_{n+2} T'_{13})]^2 \tag{6.9}$$

где частота n -й колебательной моды капли ω'_n определяется (5.24).

Используя выражение (6.9), оценим величину интенсивности акустического излучения жидко-капельных систем естественного и искусственного происхождения.

Источником акустического излучения в конвективных облаках являются в основном мелкие осциллирующие капли с радиусами от 3 до 30 мкм и концентрацией в облаке $\sim 10^3 \text{ см}^{-3}$, на долю которых приходится большая часть воды, содержащейся в облаке [25, 26]. Максимальную концентрацию имеют капли радиусом 3–7 мкм [25]. Осцилляции внутриоблачных капель большой амплитуды объясняются микрофизическими внутриоблачными процессами: разрушением крупных капель в результате аэродинамического сопротивления, столкновения с более мелкими каплями, а также капиллярной электростатической неустойчивости и электрического взаимодействия с соседними частицами. Натурные измерения колебаний дождевых капель показали, что капли могут осциллировать с амплитудами, достигающими десятков процентов их радиусов [27, 28]. Для характерных значений напряженности внутриоблачного электрического поля величина параметра Тейлора $w = 16\pi e^2/9$, определяющего электрогидродинамическую устойчивость капли по отношению к индуцированному внешним электрическим полем заряду, много меньше критического значения $w_{кр}$, при котором капля распадается [13, 14].

На рис. 3а–б приведем результаты оценки интенсивности акустического излучения единичной капли, осциллирующей на основной моде $n = 2$ во внешнем электростатическом поле напряженностью $E_0 = 0.17 \text{ СГСЭ}$ ($\sim 2 \times 10^{-4} E_{0кр}$, где $E_{0кр}$ – критическое для электростатического распада капли на более мелкие значение напряженности поля, при $R = 3 \text{ мкм}$ и $\sim 7 \times 10^{-4} E_{0кр}$ при $R = 30 \text{ мкм}$). Амплитуду осцилляций капли примем $M_n = 0.1R$. Характеристики капли и внешней среды: $\epsilon_{ex} = 1$, $\sigma = 73 \text{ дин/см}$, $\rho_1 = 1 \text{ г/м}^3$, $\rho_2 = 1.3 \times 10^{-3} \text{ г/м}^3$, $v = 3.3 \times 10^4 \text{ см/с}$. По формуле (6.9) найдено, что при радиусе капли $R = 3 \text{ мкм}$ интенсивность звукового излучения составила $I \sim 7 \times 10^{-12} \text{ эрг/с}$ на частоте $\omega_2 \approx 5 \text{ МГц}$. Для радиуса $R = 8 \text{ мкм}$ получено $I \sim 9 \times 10^{-13} \text{ эрг/с}$ на частоте

те $\omega_2 \approx 1$ МГц, а при $R = 30$ мкм величина интенсивности излучения составила $I \sim 7 \times 10^{-14}$ эрг/с на частоте $\omega_2 \approx 147$ кГц.

Интегральная мощность акустического излучения ансамбля мелких осциллирующих капель в облаке диаметром 10 км будет уже в 5×10^{20} раз больше излучения от одной капли. Принимая для оценки по порядку величины, что все облачные капли имеют одинаковый размер $R = 30$, получим излучение $I_{in} \sim 3 \times 10^7$ эрг/с на ультразвуковой частоте от 147 кГц.

Согласно [29], с. 427, радиусы капель осадков изменяются от $R = 0.01$ см до $R = 0.35$ см. При радиусах капель в диапазоне: $0.01 \leq R \leq 0.025$ см, осадки называются “моросью”, при $0.025 \leq R \leq 0.35$ см – “дождем”. Капли более крупных размеров разрушаются из-за лобового сопротивления воздуха.

По формуле (6.9) рассчитаем интенсивность акустического излучения дождевых капель при тех же характеристиках, что и выше. Получено, что для дождевой капли с размером $R = 0.025$ см интенсивность излучения равна $I \sim 1 \times 10^{-15}$ эрг/с при $\omega_2 \approx 6$ кГц. Для более крупной капли $R = 0.25$ см звуковое излучение $I \sim 1 \times 10^{-17}$ эрг/с на частоте $\omega_2 \approx 0.2$ кГц, а для самой большой капли с $R = 0.35$ см интенсивность излучения порядка $I \sim 5 \times 10^{-18}$ эрг/с при частоте осцилляций второй моды $\omega_2 \approx 0.1$ ГГц.

Примем, что в дожде концентрация капель с радиусом $R = 0.025$ см, равна 0.3 см^{-3} , и тогда несложно получить, что интегральное акустическое излучение на границе пространства объемом 1 км^3 , занятого ливневым дождем, будет иметь интенсивность $I \sim 3 \times 10^{-1}$ эрг/с на частоте ≈ 6 кГц, а для капель радиусом $R = 0.25$ см при той же концентрации интегральное излучение идет с интенсивностью $I \sim 3 \times 10^{-3}$ эрг/с на частоте ≈ 0.2 ГГц волн. Полагая для простоты, что дождь идет в кубическом пространстве с характерным линейным размером, в 1 км получим, что через любую грань куба в единицу времени выходит излучение, интенсивностью в шесть раз меньше. Тогда плотность потока энергии $J_{in} \sim 10^{-11}$ эрг/с · см² ($R = 0.025$ см) и $J_{in} \sim 10^{-13}$ эрг/с · см² ($R = 0.25$ см). Излучение такой интенсивности на несколько порядков величины меньше, чем может зарегистрировать ухо человека. Чтобы увеличить интенсивность излучения в проведенных оценках, можно взять большую амплитуду осцилляций и больший объем пространства, занятого дождем; можно увеличить величину заряда на капле и величину внутриоблачного (или приземного для дождевых капель) электрического поля, все это можно проделать, не выходя за рамки данных натурных метеорологических измерений [26].

Собственно говоря, при принятых выше условиях граница между ультразвуковыми и звуковыми волнами по размеру капель приходится примерно на $R = 0.01135$ см с интенсивностью излучения порядка $I \sim 5 \times 10^{-15}$ эрг/с с частотой осцилляций второй моды $\omega = 20$ кГц. По классификации [25] такие капли можно отнести к крупным облачным каплям, концентрация которых в грозовом облаке не превосходит 1 см^{-3} .

С увеличением номера моды осцилляций капли n на единицу интенсивность звукового излучения снижается примерно на два порядка.

Интересно, что если сравнить мощности акустического и электромагнитного излучений от единичной незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле в грозовом облаке, можно сделать заключение, что интенсивность звукового излучения на 17–18 порядков величины выше полной интенсивности электромагнитного излучения при тех же характеристиках электропроводной капли [24].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В линейном приближении по безразмерной амплитуде осцилляций и равновесной деформации капли слабым внешнем электрическом поле найдена интенсивность акустического излучения от жидко-капельных объектов естественного происхождения: капель туманов, облаков, дождя. Выяснилось, что туманы и облака излучают акустические волны достаточно большой интенсивности в ультразвуковом диапазоне частот, а вот даже мелкие дождевые капли генерируют при своих осцилляциях акустические волны из звукового диапазона частот с интенсивностью на два-три порядка величины более слабые, чем может зафиксировать ухо человека. Граница между ультразвуковым излучением капель и звуковым проходит в области размеров, чуть больших чем $R = 100$ мкм. При определении такой границы принималось, что капли несут весьма малый за-

ряд, влияние которого на частоты акустического излучения весьма мало, а амплитуда осцилляций равна одной десятой радиуса капли. Если в оценках взять амплитуды осцилляций в пять-шесть раз больше (как это фиксируется в натуральных наблюдениях) и учесть наличие на каплях существенного электрического заряда, то граница между ультразвуковыми и звуковыми акустическими волнами может быть сдвинута в область меньших размеров. При этом интенсивность излучения будет повышена до различаемого человеческим ухом в силу того, что концентрация капель в облаке увеличивается с уменьшением их размера.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598 “Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью”, <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей) Теория звука. Т. II. М.: Гостехтеориздат, 1955. 476 с.
2. Грин Х., Лейн В. Аэрозоли – пыли, дымы и туманы. Л.: Изд. Химия, 1969. 428 с.
3. Качурин Л. Г. Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеоздат, 1990. 463 с.
4. Тулайкова Т. В., Мищенко А. В., Амирова С. Р. Акустические дожди. М.: Физматкнига, 2010. 160 с.
5. Little C. G. On the detectability of fog, Cloud, Rain, and Snow by Acoustic Echo-Sounding Methods // J. Atm. Sci. 1972. V. 29. P. 748–755.
6. Can Ruan, Fei Xing, Yue Huang, Xinyi Yu, Jiacheng Zhang, Yufeng Yao. The Influence of Acoustic Field Induced by HRT on Oscillation Behavior of a Single Droplet // Energies. 2017. V. 10. № 48. P. 1–15.
7. Trinh E. H., Holt R. G., Thiessen D. B. The dynamics of ultrasonically levitated drops in an electric field // Phys. Fluids. 1996. V. 8. № 1. P. 43–61.
8. Karlsen J. T., Bruus H. Acoustic Tweezing and Patterning of Concentration Fields in Microfluidics // Phys. Rev. Appl. 2017. V. 7. № 034017. P. 1–10.
9. King L. V. On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres // Can. J. Res. 1934. V. 3. P. 212–216.
10. Калечиц В. И., Нахутин И. Е., Полуэктов П. П. О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.
11. Богатов Н. А. Электромагнитное поле, генерируемое капиллярными колебаниями капель // Сборник тезисов докладов VI Междунар. конф. “Солнечно-земные связи и физика предвестников землетрясений”. Петропавловск-Камчатский, ДВО РАН, 2013. С. 10–12.
12. Ширяева С. О., Григорьев А. И. Заряженная капля в грозном облаке. Ярославль: Изд. ЯрГУ им. П. Г. Демидова, 2008. 535 с.
13. Taylor G. I. Disintegration of water drops in an electric field // Proc. Roy. Soc. 1964. V. A280. P. 383–397.
14. Григорьев А. И., Ширяева С. О., Белавина Е. И. Равновесная форма заряженной капли в электрическом и гравитационном полях // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.
15. Френкель Я. И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
18. Лепендин Л. Ф. Акустика. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.
19. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
20. Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
21. Cheng K. J. Capillary oscillations of drop in an electric field // Phys. Lett. 1985. V. A112. № 11. P. 392–396.
22. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
23. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1963. 1108 с.
24. Григорьев А. И., Колбнева Н. Ю., Ширяева С. О. Дипольное электромагнитное излучение заряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 2. С. 62–76.
25. Мазин И. П., Шмистер С. М. Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеоздат, 1983. 280 с.
26. Мазин И. П., Хргиан А. Х., Имянитов И. М. Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л.: Гидрометеоздат, 1989. 647 с.
27. Стерлядкин В. В. Натурные измерения колебаний капель осадков // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1988. Т. 24. № 6. С. 613–621.
28. Beard K. V., Tokay A. A field study of small raindrop oscillations // Geophysical research letters. 1991. V. 18. № 12. P. 2257–2260.
29. Тверской П. Н. Курс метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1962. 700 с.