ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 5, с. 119–128

УДК 533.72

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ЭФФЕКТА РАЗРЕЖЕНИЯ НА ЧИСЛО ПУАЗЕЙЛЯ В ДЛИННОМ КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ ПРИ НЕПОЛНОЙ АККОМОДАЦИИ МОЛЕКУЛ ГАЗА

© 2022 г. О. В. Гермидер[a,]*, В. Н. Попов[a,]**

[a] Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия

*E-mail: o.germider@narfu.ru

**E-mail: v.popov@narfu.ru

Поступила в редакцию 12.04.2022 г.
После доработки 15.05.2022 г.
Принята к публикации 15.05.2022 г.

В зависимости от значений параметра разрежения, отношений радиусов цилиндров, образующих длинный кольцевой канал, и коэффициентов аккомодации тангенциального импульса молекул газа на стенках канала предложен метод вычислений значений числа Пуазейля. В промежуточном режиме течения газа данные значения получены с использованием полиномиальной аппроксимации Чебышева на основе линеаризованного модельного кинетического уравнения Шахова с зеркально-диффузными граничными условиями Максвелла. Приведен анализ полученных результатов в окрестности гидродинамического режима течения газа со скольжением и проведено их сравнение с аналогичными результатами, найденных в рамках БГК модели.

Ключевые слова: число Пуазейля, течения газа в каналах, коэффициент аккомодации тангенциального импульса молекул газа

DOI: 10.31857/S056852812205005X

Развитие методов математического моделирования процессов, протекающих в прямых микро- и наноканалах, является одним из главных направлений исследований, проводимых в последнее время в области динамики разреженного газа [1–4]. Гидравлические диаметры этих каналов могут варьироваться от десятков нанометров до десятков миллиметров, что приводит к тому, что течение газа в условиях, когда средняя длина свободного пробега молекул газа сравнима с характерным размером поперечного сечения канала (в частности, с гидравлическим диаметром) не может быть описано на основе уравнений динамики сплошных сред [5]. Для исследования гидродинамических закономерностей течения газа в длинном канале, образованном двумя коаксиальными цилиндрами, введем число Пуазейля P_0, определяемое как произведение коэффициента трения Дарси f_d на число Рейнольдса Re [6, 7]. Как отмечено в [8], выбранная конфигурация сечения канала представляет интерес как с прикладной, так и с теоретической точек зрения. В постановочной части работа близка к [8] и [9]. Течение газа в канале обусловлено градиентом давления в продольном направлении. В представленной работе в отличие от [8] и [9] в качестве основного уравнения, описывающего кинетику массопереноса, используется линеаризованная S модель (уравнение Шахова) [10], которая при переходе к гидродинамическому режиму дает корректное значение числа Прандтля в отличие от модели БГК. Граничные условия обобщены на случай с несовпадающими значениями коэффициентов аккомодации тангенциального импульса молекул газа на стенках канала. Проводится сравнительный анализ с результатами из [9] и результатами в режиме течения со скольжением, которые получены в явном виде с использованием уравнения Навье–Стокса. Значения числа Пуазейля находятся с применением полиномиальной аппроксимации Чебышева [11, 12] в широком диапазоне изменения параметра разрежения в зависимости от значений коэффициентов аккомодации тангенциального импульса молекул газа на цилиндрах и гидравлического диаметра канала. Модификация метода коллокации [12] выполнена путем использования свойств конечных сумм полиномов Чебышева, произведения Кронекера при построении матрицы системы алгебраических уравнений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим течение разреженного газа в длинном канале, образованном двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами R_1' и R_2' ($R_1' < R_2'$), под действием заданного градиента давления, направленного вдоль оси канала z'. Считаем, что цилиндры поддерживаются при постоянной температуре. Коэффициенты аккомодации тангенциального импульса молекул газа на внутреннем и внешнем цилиндрах обозначим соответственно α_1 и α_2. Канал соединяет два резервуара, давления в которых обозначим p_1' и p_2' соответственно. Полагаем, что $p_2' < p_1'$ и длина канала $L' \gg D_h'$, где $D_h' = 2(R_2' - R_1')$ – гидравлический диаметр [7]. Состояние газа в точке $\mathbf{r}'$ определяем функцией распределения молекул газа $f'(\mathbf{r}', \mathbf{v})$, где $\mathbf{v}$ – молекулярная скорость газа. В качестве масштабов длины, скорости, вектора потока тепла, концентрации, температуры, функции распределения выберем соответственно величины: D_h', $\beta^{-1/2}$, $p_0'\beta^{-1/2}$, n_0', T_0', $n_0'\beta^{3/2}$, где $\beta = m'/(2k_BT_0')$, k_B – постоянная Больцмана, m' – масса молекул газа, n_0', T_0' – концентрация, температура газа в некоторой точке, принятой за начало координат; $p' = n'k_BT'$. Тогда для безразмерных величин имеем следующие соотношения

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}'}{D_h'}, \quad R_1 = \frac{R_1'}{D_h'}, \quad R_2 = \frac{R_2'}{D_h'}, \quad f = \frac{f'}{n_0'\beta^{3/2}}$$

$$\mathbf{C} = \beta^{1/2}\mathbf{v}, \quad \mathbf{u} = \beta^{1/2}\mathbf{u}', \quad \mathbf{q} = \frac{\beta^{1/2}}{p_0'}\mathbf{q}', \quad n = \frac{n'}{n_0'}, \quad T = 1$$

Число Пуазейля P_0 определяем как произведение коэффициента трения Дарси f_d на число Рейнольдса Re [6, 7]

$$\mathrm{P}_0 = f_d\mathrm{Re} = -\frac{2G_p p_0' D_p' \beta^{1/2}}{\mu \bar{u}_z} \tag{1.1}$$

где μ – динамическая вязкость газа, $\bar{u}_z$ – среднее значение функции u_z.

Полагаем, что модуль безразмерного градиента давления G_p является малым по величине. Учитывая осесимметричный характер течения газа в канале, введем цилиндрические координаты $\mathbf{r} = (\rho, r_\varphi, r_z)$ в конфигурационном пространстве и $\mathbf{C} = (C_\perp, C_\psi, C_z)$ в пространстве скоростей. В линейном приближении получим

$$f(\mathbf{r},\mathbf{C}) = f_0(C)\big(1 + G_p(z + h(\rho,\mathbf{C}))\big), \quad f_0(C) = \pi^{-3/2}\exp(-C^2) \tag{1.2}$$

Здесь f_0 – безразмерный абсолютный максвеллиан. Используя (1.2), представляем $\bar{u}_z$ в виде разложения по G_p

$$\bar{u}_z = -G_p\bar{U}_z, \quad \bar{U}_z = -\frac{2}{R_2^2 - R_1^2}\int_{R_1}^{R_2} U_z(\rho)\rho d\rho \tag{1.3}$$

$$U_z(\rho) = \pi^{-3/2}\int \exp(-C^2)C_z h(\rho,\mathbf{C})d^3\mathbf{C}$$

Подставляя (1.3) в (1.1) и учитывая, что в случае модели жестких сфер для параметра разреженности δ выполняется соотношение [5]:

$$\delta = \frac{D_p' p' \beta^{1/2}}{\mu}$$

получаем

$$\mathrm{P}_0 = \frac{2\delta}{\bar{U}_z}$$

Введем функции $Z_1 = Z_1(\rho,\zeta,C_\perp)\overline{\tau}$ и $Z_2 = Z_2(\rho,\zeta,C_\perp)$

$$Z_1(\rho,\zeta,C_\perp) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-C_z^2)C_z h(\rho,\mathbf{C})dC_z$$

$$Z_2(\rho,\zeta,C_\perp) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-C_z^2)C_z^3 h(\rho,\mathbf{C})dC_z$$

Компоненты U_z и q_z записываем через функции Z_1 и Z_2 как

$$\begin{pmatrix} U_z \\ W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\exp\left(-C_\perp^2\right)\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\begin{pmatrix} C_\perp Z_1 \\ C_\perp^3 Z_1 \\ C_\perp Z_2 \end{pmatrix}d\zeta dC_\perp$$

$$q_z = W_1 + W_2 - \frac{5}{2}U_z$$

Функцию Z_1 находим из линеаризованной модели кинетического уравнения Шахова [12]

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial\rho}\zeta + \frac{\partial Z_1}{\partial\zeta}\frac{(1-\zeta^2)}{\rho}\right)C_\perp + \delta Z_1(\rho,\zeta,C_\perp) + \frac{1}{2} = \\ = \delta\left(U_z(\rho) + \frac{2(1-\Pr)}{5}q_z(\rho)(C_\perp^2 - 1)\right)\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\left(\frac{\partial Z_2}{\partial\rho}\zeta + \frac{\partial Z_2}{\partial\zeta}\frac{(1-\zeta^2)}{\rho}\right)C_\perp + \delta Z_2(\rho,\zeta,C_\perp) + \frac{3}{4} = \delta\left(\frac{3}{2}U_z(\rho) + \frac{3(1-\Pr)}{5}q_z(\rho)C_\perp^2\right) \tag{1.5}$$

где Pr – число Прандтля. Значение Pr = 2/3 соответствует S модели. При Pr = 1 система уравнений (1.4) и (1.5) переходит в БГК модель.

В качестве граничного условия на цилиндрах используем модель зеркально-диффузного отражения Максвелла [5]. В этом случае имеем

$$Z_j(R_i,\zeta,C_\perp) = (1-\alpha_i)Z_j(R_i,-\zeta,C_\perp), \quad (-1)^i\zeta < 0, \quad i, j = 1, 2 \tag{1.6}$$

2. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Неизвестные функции $Z_1(\rho,\zeta,C_\perp)$ и $Z_2(\rho,\zeta,C_\perp)$, где $\rho \in [R_1, R_2]$, $C_\perp \in [0,+\infty)$ и $\zeta \in [-1, 1]$, раскладываем в ряды по полиномам Чебышева первого рода T_{k_i} и ограничиваясь в этих рядах членами с номерами $k_i \le n_i$ $(i = \overline{1, 3})$ [11], получаем

$$Z_j(\rho,\zeta,C_\perp) = \mathbf{T}_1(x_1)\otimes\mathbf{T}_2(x_2)\otimes\mathbf{T}_3(x_3)\mathbf{A}_\mathbf{j}, \quad j = 1, 2 \tag{2.1}$$

где $x_1 = (2\rho - R_2 - R_1)/(R_2 - R_1)$, $x_2 = \zeta$, $x_3 = (C_\perp - 1)/(C_\perp + 1)$, $\mathbf{T}_\mathbf{i}$ – матрица размером $1\times n_i'$ $(n_i' = n_i + 1, i = \overline{1, 3})$:

$$\mathbf{T}_\mathbf{i}(x_i) = \left(T_0(x_i)T_1(x_i)\ \ldots\ T_{n_i-1}(x_i T_{n_i}(x_i)\right)$$

$\mathbf{A}_\mathbf{j}$ – матрицы размером $n_1'n_2'n_3'\times 1$:

$$\mathbf{A}_\mathbf{j} = (a_{000}^{(j)}a_{001}^{(j)}\ \ldots\ a_{n_1n_2n_3-1}^{(j)}a_{n_1n_2n_3}^{(j)})^{\mathrm{T}}, \quad j = 1, 2$$

через $\mathbf{T}_1(x_1)\otimes\mathbf{T}_2(x_2)$ обозначено произведение Кронекера двух матриц [13].

В качестве точек коллокации в (1.4) и (1.5) для x_i выберем нули $T_{n_i'}(x_i)$ на отрезке [–1, 1] [11]:

$$x_{i,k_i} = \cos\xi_i, \quad \xi_i = \frac{\pi(2n_i - 2k_i + 1)}{2(n_i + 1)}, \quad k_i = \overline{0, n_i}, \quad i = \overline{1, 3} \tag{2.2}$$

Для нахождения значений полиномов Чебышева и производных от полиномов Чебышева в точках (2.2) воспользуемся геометрическим определением $T_{j_i}(x_i) = \cos(j_i \arccos x_i)$, где $x_i \in [-1, 1]$ [11]. Тогда

$$T_{j_i}(x_{i,k_i}) = \cos j_i\xi_i, \quad \frac{dT_{j_i}(x_{i,k_i})}{dx_i} = \frac{j_i \sin j_i\xi_i}{|\sin \xi_i|}, \quad j_i, \quad k_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 1, 2 \tag{2.3}$$

Подставляя (2.1)–(2.3) в (1.4), приходим к системе $n_1'n_2'n_3'$-уравнений, в которой заменяем уравнения с $x_{1,0}$, x_{2,k_2} ($k_2 = \overline{n_2'/2, n_2}$) на уравнения, вытекающие из граничного условия (1.6) для функции Z_1 при $x_2 > 0$:

$$\mathbf{T}_1(-1) \otimes (\mathbf{T}_2(x_{2,k_2}) - (1-\alpha_1)\mathbf{T}_2(x_{2,n_2-k_2})) \otimes \mathbf{T}_3(x_{3,k_3})\mathbf{A}_1 = 0, \quad k_3 = \overline{0, n_3}$$

с x_{1,n_1}, x_{2,k_2} ($k_2 = \overline{0, n_2'/2 - 1}$) на уравнения (2.4) для $x_2 < 0$:

$$\mathbf{T}_1(1) \otimes (\mathbf{T}_2(x_{2,k_2}) - (1-\alpha_2)\mathbf{T}_2(x_{2,n_2-k_2})) \otimes \mathbf{T}_3(x_{3,k_3})\mathbf{A}_1 = 0, \quad k_3 = \overline{0, n_3}$$

Здесь и ниже считаем, что n_2 – нечетное число. Аналогично в системе $n_1'n_2'n_3'$-уравнений, полученной подстановкой точек (2.3) в (1.5), на уравнения, вытекающие из граничного условия (1.6) для функции Z_2.

Учитывая, что в точках (2.3) имеют место равенства [11]:

$$\frac{2}{n_i'}\sum_{k_i=0}^{n_i} T_{l_i}(x_{k_i})T_{j_i}(x_{k_i}) = \gamma_{l_i}\delta_{l_i,j_i},$$

$$\frac{2}{n_i'}\sum_{k_i=0}^{n_i}{}' T_{k_i}(x_{l_i})T_{k_i}(x_{j_i}) = \delta_{l_i,j_i}, \quad l_i, j_i = \overline{0, n_i}, \quad i = \overline{1, 3} \tag{2.4}$$

где δ_{l_i,j_i} – символ Кронекера; параметр γ_{l_i} равен 2, если $l_i = 0$, иначе $\gamma_{l_i} = 1$, под $\sum_{k_i=0}^{n_i}{}'$ понимаем конечную сумму, в которой первое слагаемое умножается на 1/2, выразим коэффициенты в (2.1) через значения функций Z_1 и Z_2, вычисленные в точках (2.3). Обозначая

$$\mathbf{Z}_i = \left(Z_{i,000}, Z_{i,001} \ldots Z_{n_1n_2n_3-1}Z_{i,n_1n_2n_3}\right)^{\mathrm{T}}, \quad Z_{i,k_1k_2k_3} = Z_i(\rho_{k_1}, C_{\perp,k_2}, \zeta_{k_3}), \quad i = 1, 2$$

имеем $\mathbf{A}_i = 8(n_1'n_2'n_3')^{-1}\mathbf{J}' \otimes \mathbf{H}' \otimes \mathbf{G}'\mathbf{Z}_i$, ($i = 1, 2$), где $\mathbf{J}'$, $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{G}'$ – транспонированные матрицы $\mathbf{J}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{G}$, в которых первая строка умножается на 1/2, а $J_{k_1+1,j_1+1} = T_{j_1}(x_{1,k_1})$, $H_{k_2+1,j_2+1} = T_{j_2}(x_{2,k_2})$, $G_{k_3+1,j_3+1} = T_{j_3}(x_{3,k_3})$, $j_i, k_i = \overline{0, n_i}$, $i = \overline{1, 3}$. Используя полученное выражение для $\mathbf{A}$, приходим к системам матричных уравнений относительно $\mathbf{Z_i}$, решения которых находим LU-методом.

На основе полученных элементов матрицы $\mathbf{Z}_1$ восстанавливаем $U_z(\rho)$

$$U_z(\rho) = \frac{8}{n_1'n_2'n_3'}\mathbf{T}_1\left(\frac{2\rho - R_2 - R_1}{R_2 - R_1}\right)\mathbf{J}' \otimes \mathbf{B}\mathbf{Z}_1$$

где $\mathbf{B}$ – блочная $1 \times n_2'n_3'$-матрица, состоящая из n_2'-одинаковых блоков $\mathbf{K}\mathbf{G}'$ размером $1 \times n_3'$,

$$\mathbf{K} = 2\int_{-1}^{1} \frac{1 + x_3}{(1 - x_3)^3}\mathbf{T}_3(x_3)\exp\left(-\frac{(1 + x_3)^2}{(1 - x_3)^2}\right)dx_3 \tag{2.5}$$

Для вычисления интеграла (2.5) применяем рекуррентные соотношения [11]

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_i(x) = 2xT_{i-1}(x) - T_{i-2}(x), \quad i \geq 2$$

Находим значение $\bar{U}_z$ по формуле (1.3) и подставляем его в (1.1). Таким образом, число Пуазейля P_0 зависит от параметра разрежения газа δ, отношения радиусов цилиндров $r = R_1'/R_2'$ и ко-

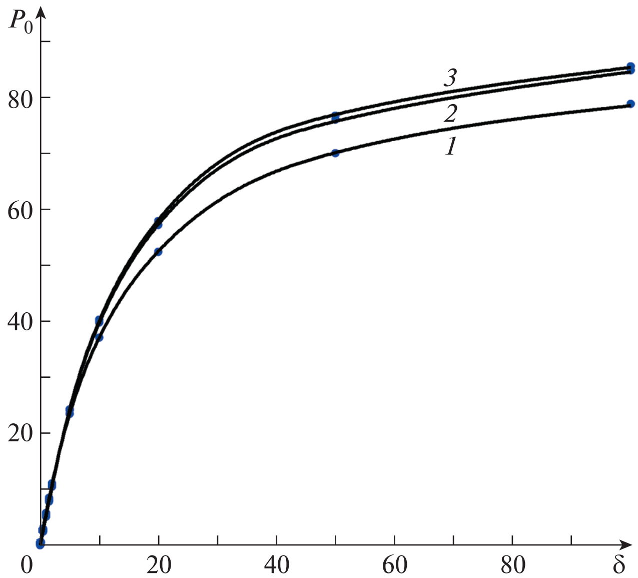

Рис. 1. Графики функции $P_0(\delta)$: $\alpha = 1$, $\Pr = 1$, $r = 0.1, 0.5, 0.9$ (1–3).

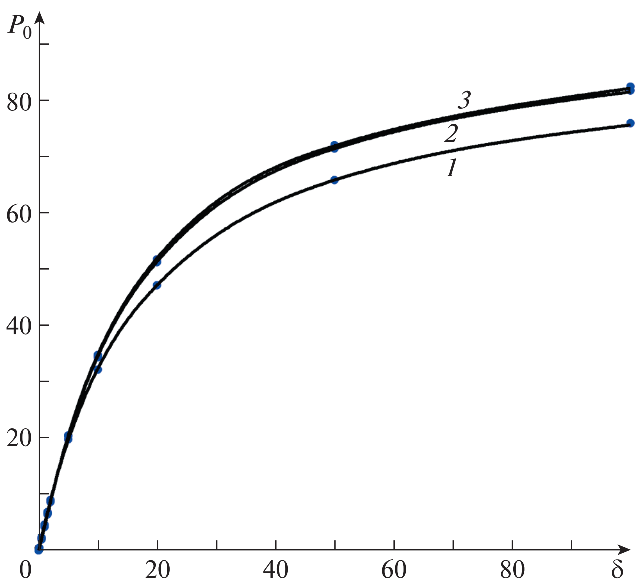

Рис. 2. Графики функции $P_0(\delta)$: $\alpha = 0.85$, $\Pr = 1$, $r = 0.1, 0.5, 0.9$ (1–3).

эффициентов аккомодации тангенциального импульса молекул газа на стенках канала α_1 и α_2. Здесь выразили безразмерные радиусы цилиндров R_1 и R_2 через r

$$R_1 = \frac{r}{2(1-r)}, \quad R_2 = \frac{1}{2(1-r)}$$

Полученные результаты вычислений P_0 представлены графически на рис. 1–4. В случае $\Pr = 1$ на рис. 1 и 2 кривые *1*, *2* и *3* построены с применением кубической сплайн-интерполяции для отношения радиусов цилиндров 0.1, 0.5, 0.9 при совпадающих коэффициентах аккомодации тангенциального импульса молекул газа на внешнем и внутреннем цилиндрах $\alpha = \alpha_{1,2} = 1$ (рис. 1) и $\alpha = 0.85$ (рис. 2). Наблюдается возрастание числа Пуазейля с ростом отношения радиусов ци-

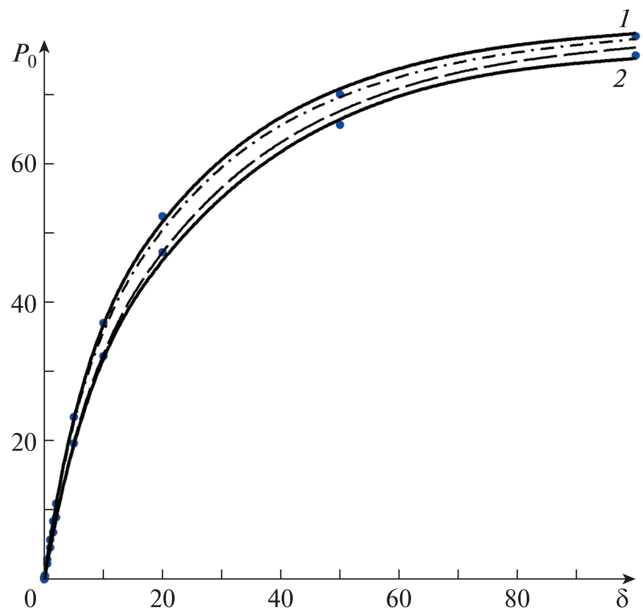

Рис. 3. Зависимость $P_0(\delta)$: $r = 0.1$, $\Pr = 2/3$, $\alpha = 1$, 0.85 (1, 2).

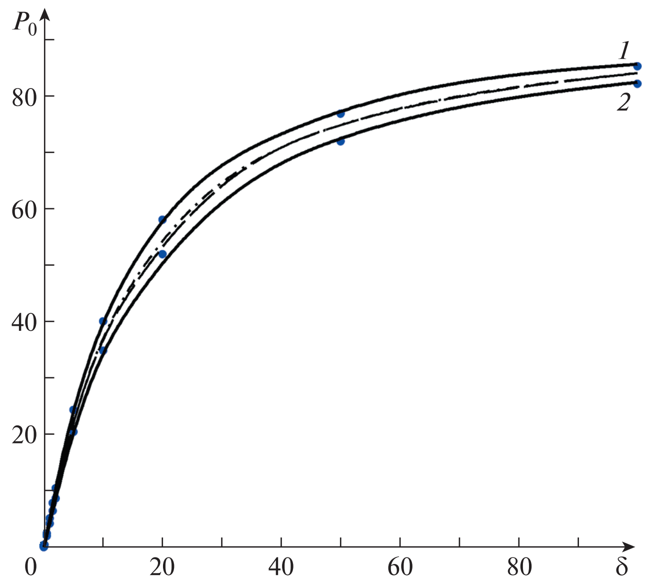

Рис. 4. Зависимость $P_0(\delta)$: $r = 0.9$, $\Pr = 2/3$, $\alpha = 1$, 0.85 (1, 2).

линдров и параметра разряжения. Существенное сближение с кривой *3* происходит при уменьшении значения α. Точками показаны значения P_0 из [9]. Наблюдается хорошее согласие полученных результатов в настоящей работе с [9] (погрешность менее 2%). На рис. 3 и 4 сплошными линиями *1* ($\alpha = 1$) и *2* ($\alpha = 0.85$) проиллюстрирована зависимость $P_0(\delta)$ для $r = 0.1$ и $r = 0.9$ при $\Pr = 2/3$. Кривая, построенная штриховой линией, соответствует значениям $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 0.85$, штрихпунктирной – $\alpha_1 = 0.85$ и $\alpha_2 = 1$. С увеличением значений $\delta > 20$ наблюдается сближение этих кривых. Точками на рис. 3 и 4 показаны значения P_0 при $\Pr = 1$. Видно, что результаты, основанные на решении уравнения БГК и S-модели, согласуются между собой.

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В гидродинамическом режиме течения ($\delta^{-1} \ll 1$) массовую скорость газа можно восстановить на основе решения уравнения Навье–Стокса для одноатомного газа

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dU_z(\rho)}{d\rho}\right) = -\delta \tag{3.1}$$

с граничным условием прилипания на цилиндрах $U_z(R_i) = 0$ ($i = 1, 2$). В этом случае получаем выражение U_z, которое соответствует [14]:

$$U_z(\rho) = \frac{\delta}{4}\left(R_1^2 \ln\frac{R_2}{\rho} + R_2^2 \ln\frac{\rho}{R_1} - \rho^2\right)\left(\ln\frac{R_2}{R_1}\right)^{-1} \tag{3.2}$$

В этом случае, подставляя (3.2) в (1.3) и используя (1.1), имеем

$$\mathrm{P}_0 = \frac{64(1-r)^2 \ln r}{(\ln r - 1)r^2 + \ln r + 1}$$

При $r \to 0$ получаем $\mathrm{P}_0 = 64$, которое соответствует цилиндрическому каналу [7]. При $r \to 1$ приходим к значению $P_0 = 96$, которое имеет место при течении газа в плоском канале [7].

Покажем, что в пределе ($\delta^{-1} \ll 1$) массовая скорость газа $U_z(\rho)$, полученная на основе уравнения (1.4), принимает вид (3.2). Действительно, в этом случае, ограничиваясь нулевым приближением относительно δ^{-1} в уравнении (1.4), имеем

$$Z_1(\rho,\zeta,C_\perp) = U_z(\rho) + \frac{2(1-\mathrm{Pr})}{5}q_z(\rho)(C_\perp^2 - 1) \tag{3.3}$$

Умножим левую и правую части уравнения (3.3) на $C_\perp \exp(-C_\perp^2)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до $+\infty$. В результате получаем

$$2\int_0^{+\infty} Z_1(\rho,\zeta,C_\perp)C_\perp \exp(-C_\perp^2)dC_\perp = U_z(\rho) \tag{3.4}$$

Откуда следует, что функция $Z_1 = U_z$, определяемая выражением (3.2), является решением уравнения (3.4) и удовлетворяет граничным условиям (1.5). При фиксированных значениях r максимум функции $\mathrm{P}_0(\delta)$ достигается в гидродинамическом пределе. Для отношения радиусов цилиндров 0.1 и 0.9 максимальные значения $\mathrm{P}_0(\delta)$ равны соответственно 89.4 и 96, т.е. происходит существенный сдвиг значений $\mathrm{P}_0(\delta)$ от 64, которое определяет течение газа в цилиндрическом канале, в сторону плоского течения.

В режиме течения со скольжением тангенциальная массовая скорость газа пропорциональна ее нормальному градиенту вблизи стенок канала [5]. Следуя [9] и [5], запишем граничные условия скольжения в виде

$$U_z(R_i) = (-1)^{i+1}\frac{\sigma_p}{\delta}\frac{dU_z}{d\rho}(R_i), \quad i = 1, 2 \tag{3.5}$$

Здесь σ_p – безразмерный коэффициент вязкого скольжения. Для диффузного рассеяния ($\alpha_{1,2} = 1$) в рамках модели S коэффициент σ_p равен 1.018 [15] и 1.06 в рамках модели БГК [5], для зеркально-диффузного отражения Максвелла при $\alpha = \alpha_{1,2}$ коэффициент σ_p может быть получен по формуле [15]:

$$\sigma_p(\alpha) = \frac{2-\alpha}{\alpha}\big(\sigma_p(1) - 0.1211(1-\alpha)\big)$$

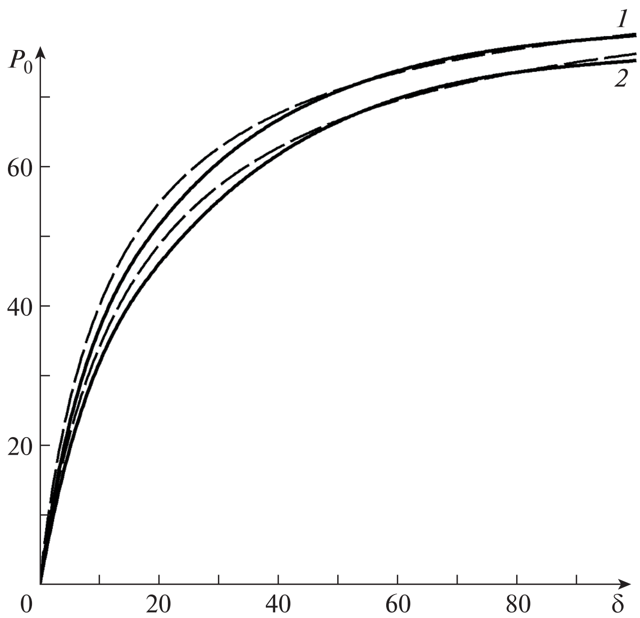

Рис. 5. Графики зависимости $P_0(\delta)$: $r = 0.1$, $\alpha = 1$, 0.85 (1, 2) в рамках S модели и на основе уравнения Навье–Стокса.

Решение уравнение Навье–Стокса (3.1) с граничными условиями скольжения (3.5) находим аналитически

$$U_z(\rho) = \frac{1}{4}\left(\left(\rho^2 \ln r - R_1^2 \ln\frac{\rho}{R_2} - R_2^2 \ln\frac{R_1}{\rho}\right)R_1R_2\delta^2 + \right.$$
$$+ (R_1 + R_2)\rho^2\sigma_p\delta + 2(R_2^2 - R_1^2)\sigma_p^2 + \tag{3.6}$$
$$\left. + \left(R_1^3 + R_2^3 - R_1^2R_2 \ln\frac{R_2^2}{\rho^2} - R_1R_2^2 \ln\frac{R_1^2}{\rho^2}\right)\sigma_p\delta\right)(\sigma_p(R_1 + R_2) - \delta R_1R_2 \ln r)^{-1}$$

Подставляя (3.6) в (1.3), согласно (1.1) получаем

$$P_0 = \frac{64\delta(\delta r \ln r + (2r^2 - 2)\sigma_p)(1 - r)^2}{\beta} \tag{3.7}$$

где

$$\beta = r\delta(\delta + 8\sigma_p)((r^2 + 1)\ln r - r^2 + 1) +$$
$$+ 2\sigma_p\delta(r^4 - 4r^2 \ln r - 1) + 16(r^4 - 2r^3 + 2r - 1)\sigma_p^2 \tag{3.8}$$

На рис. 5 и 6 сплошными линиями 1 ($\alpha = 1$) и 2 ($\alpha = 0.85$) показаны результаты вычислений $P_0(\delta)$ для $r = 0.1$ и $r = 0.9$ в рамках линеаризованной S модели. Штриховыми линиями построены кривые по формуле (3.7) при $\sigma_p = 1.018$. Видно, что результаты вычислений числа Пуазейля для отношения радиусов цилиндров 0.1 (кривая 1) и 0.9 (кривая 2) в представленной работе приближаются к результатам гидродинамики со скольжением при $\delta > 20$. Отклонение не превосходит 5.6% при δ и 1.5% при $\delta = 40$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан алгоритм вычисления значений числа Пуазейля в промежуточном режиме течения газа между двумя длинными цилиндрами на основе решения линеаризованного кинетиче-

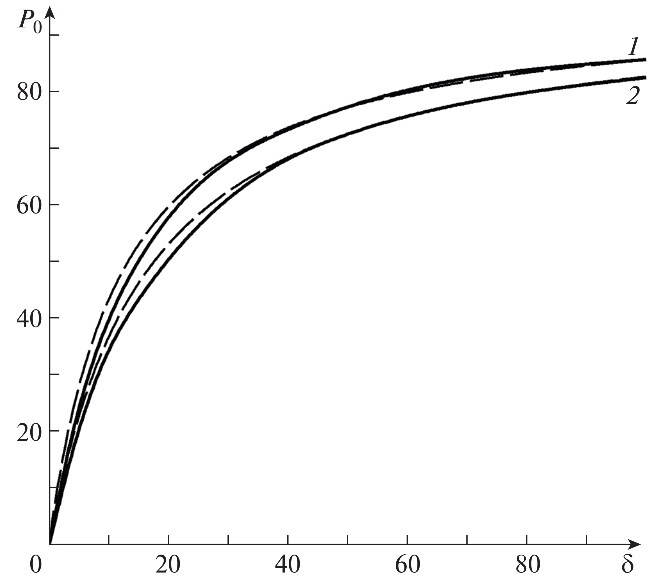

Рис. 6. Графики зависимости $P_0(\delta)$: $r = 0.9$, $\alpha = 1,\ 0.85$ (1, 2) в рамках S модели и на основе уравнения Навье–Стокса.

ского уравнения Шахова с использованием полиномиальной аппроксимации Чебышева. Проведен анализ влияния отношения радиусов цилиндров, параметра разрежения и коэффициентов аккомодации тангенциального импульса молекул газа на стенках канала на значения числа Пуазейля. Установлено, что с ростом отношения радиусов цилиндров, параметра разрежения и значений коэффициентов аккомодации тангенциального импульса молекул газа на стенках канала происходит монотонное возрастание числа Пуазейля. Максимальное значение этого числа характеризует свойства плоского течения газа, обусловленного действием постоянного продольного градиента давления, в гидродинамическом пределе. Полученные результаты могут быть использованы для численного моделирования массопереноса при течении газа в канале, образованного двумя коаксиальными цилиндрами, и для объяснения особенностей этого процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ambrus V.E., Sharipov F., Sofonea V.* Comparison of the Shakhov and ellipsoidal models for the Boltzmann equation and DSMC for ab initio -based particle interactions // Computers and Fluids. 2020. V. 211. 104637.
2. *Boscarino S., Cho S.Y.* On the order reduction of semi-Lagrangian methods for BGKmodel of Boltzmann equation // Applied Mathematics Letters. 2022. V. 123. 107488.
3. *Rovenskaya O.I.* Numerical analysis of surface roughness effects on the Poiseuille flow caused by a small pressure drop // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2017. V. 110. P. 817–826.
4. *Valougeorgis D., Vasileiadis N., Titarev V.* Validity range of linear kinetic modeling in rarefied pressure driven single gas flows through circular capillaries // European Journal of Mechanics / B Fluids, Special Issue on Non-equilibrium Gas Flows. 2017. V. 64. P. 2–7.
5. *Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д.* Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург: УрО РАН, 2008.
6. *Liu C., Yanga J., Ni Yu.* A multiplicative decomposition of Poiseuille number on rarefaction and roughness by lattice Boltzmann simulation // Computers and Mathematics with Applications. 2011. V. 61. P. 3528–3536.
7. *Kandlikar S.G., Garimella S., Li D., Colin S., King M.R.* Heat Transfer and Fluid Flow in Minichannels and Microchannels. Oxford: Elsevier Ltd., 2006.
8. *Шахов Е.М.* Течение разреженного газа между коаксиальными цилиндрами под действием градиента давления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 7. С. 1107–1116.
9. *Breyiannis G., Varoutis S., Valougeorgis D.* Rarefied gas flow in concentric annular tube: Estimation of the Poiseuille number and the exact hydraulic diameter // European Journal of Mechanics B/Fluids. 2008. V. 27. P. 609–622.

10. *Шахов Е.М.* Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крука // Изв. АН СССР, МЖГ. 1968. № 5. С. 142–145.
11. *Mason J., Handscomb D.* Chebyshev polynomials. Florida: CRC Press, 2003.
12. *Гермидер О.В., Попов В.Н.* Неизотермическое течение разреженного газа в длинном цилиндрическом канале при произвольных перепадах давления и температуры // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 3. С. 125–140.
13. *Liu S., Trenkler G.* Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and Other Matrix Products // International Journal of Information and Systems Sciences. 2008. V. 4 № 1. P. 160–177.
14. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid Mechanics. New York: Pergamon. 1989.
15. *Graur I., Sharipov F.* Non-isothermal flow of rarefied gas through a long pipe with elliptic cross section // Microfluid Nanofluid. 2009. V. 6. P. 267–275.