

УДК 532.526:533.6.011.55

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ВНУТРЕННЕМ ВЫДЕЛЕНИИ ТЕПЛА И ПОДАЧЕ ГАЗА ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ СТЕНКУ

© 2022 г. С. А. Гапонов<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup> Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

\*E-mail: gaponov@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 05.03.2022 г.

После доработки 20.05.2022 г.

Принята к публикации 20.05.2022 г.

Решена задача устойчивости дозвукового пограничного слоя в условиях подвода тепла внутрь пограничного слоя с инъекцией однородного газа через пористую пластину, частично модулирующая устойчивость пограничного слоя с диффузионным горением. Во всем диапазоне исследованных параметров наиболее растущими являются двумерные волны. Установлено, что при фиксированной норме подвода тепла с увеличением числа Рейнольдса, т.е. при удалении от передней кромки пластины, максимальная температура в пограничном слое увеличивается, что согласуется с известными экспериментами и расчетами параметров пограничного слоя с диффузионным горением. При этом зависимость максимальных по частоте степеней усиления от числа Рейнольдса немонотонна. Показано, что инъекция газа с подводом тепла дестабилизирует пограничный слой, как и в его отсутствие. С другой стороны, показана стабилизирующая роль подвода тепла и в условиях вдува газа через пористую стенку. С увеличением частоты нарастающей волны фазовая скорость стремится к скорости в обобщенной точке перегиба. Несмотря на достаточно большие величины степеней нарастания, справедливо соотношение Гастера, согласно которому пространственная степень усиления равна временной степени усиления, поделенной на групповую скорость.

*Ключевые слова:* пограничный слой, подвод тепла, пористая пластина, неустойчивость, возмущения

**DOI:** 10.31857/S0568528122050048

Стимулирующей задачей настоящей работы была проблема устойчивости пограничного слоя с диффузионным горением. Впервые задача диффузионного пламени в пограничном слое была сформулирована Эммонсом [1]. Исследования пограничного слоя с диффузионным горением проводились неоднократно, что отражено, например, в обзоре [2].

Менее изучена проблема устойчивости пограничного слоя с химическими реакциями. Обзор соответствующих работ, выполненных до конца 70-х гг., имеется в монографии [3]. Однако почти все работы, упомянутые в обзоре, относятся к задаче о гравитационной конвекции. Наибольшее отношение к настоящей теме имеют работы [4–6]. В [4] анализ ограничен невязким приближением, т.е. в уравнениях устойчивости пренебрегается членами, содержащими коэффициенты молекулярного переноса вещества, импульса и энергии. В [3, 5, 6] исследования проведены как в невязком приближении, так и с учетом коэффициентов переноса вещества, импульса и энергии в приближении Дана-Линя [7]. В них изучалась устойчивость в условиях диссоциации и рекомбинации кислорода и азота. Аналогичные исследования в более полной постановке проводились для гиперзвукового пограничного слоя, подробную информацию о которых можно найти в [8, 9]. Однако они касались только устойчивости течения по отношению к двумерным 2D-возмущениям, направление волнового вектора которых совпадает с направлением основного течения.

Первоначальные исследования устойчивости ламинарных течений в присутствии диффузионного пламени проводились для слоев смешения топлива и окислителя или при подаче струи топлива в окислитель, и задача решалась в пренебрежении вязкостью в уравнениях устойчивости. Подробную информацию о таких работах можно найти в обзоре [10]. В связи с этим заслуживает внимания работа [11]. В ней, по-видимому, впервые рассмотрена устойчивость струи в присутствии пламени с учетом вязкости и теплопроводности в уравнениях устойчивости. До на-

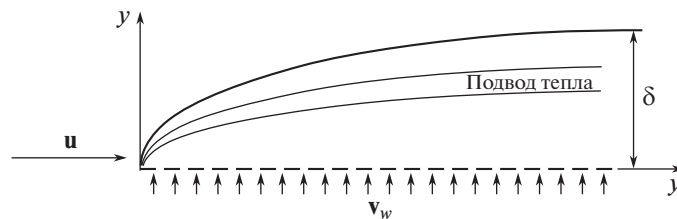


Рис. 1. Схема пограничного слоя с подводом тепла и вдувом газа через пористую стенку.

стоящего времени отсутствуют исследования по устойчивости пограничного слоя при сгорании топлива, подаваемого через проникаемую поверхность и сгорающего в потоке окислителя.

Наличие диффузионного пламени приводит к внутреннему выделению тепла и изменению состава смеси, а плотность зависит как от температуры, так и состава смеси (ее молекулярной массы). Поэтому устойчивость пограничного слоя с горением зависит от числа Маха, температурных граничных условий, смешения инородных газов и условий теплоподвода внутрь пограничного слоя. Однако во многих случаях, например, при сгорании углеводородных топлив в потоке воздуха плотность газа зависит, в основном, от температуры. Молекулярная масса смеси меняется по пограничному слою незначительно [12], ее изменением можно пренебречь. При подаче топлива через пористую стенку, обтекаемую окислителем, важным фактором, влияющим на устойчивость пограничного слоя, связан с вдуванием газа.

Важный результат работ [3, 5] состоит в том, что члены уравнений устойчивости, связанные с возмущениями источников тепла и концентраций веществ, обратно пропорциональны числу Рейнольдса, и они одного порядка с членами, учитывающими непараллельность течения. Там же показано, что в приближении локальной параллельности потока устойчивость пограничного слоя зависит только от распределения скорости и плотности основного течения. Из этого следует, что влияние возмущений источника концентраций и температуры на устойчивости пограничных слоев сравнимо с влиянием непараллельности основного течения. Слабое влияние возмущений источника тепла на устойчивость пограничного слоя без вдува было подтверждено в [13]. Поэтому при исследовании устойчивости пограничных слоев в приближении параллельного течения этими возмущениями можно пренебречь, что согласуется, кроме того, с теорией устойчивости диффузионного пламени при больших числах Дамкёлера  $Da$  (зона пламени много меньше толщины пограничного слоя) [14] и результатами [15] при конечных значениях  $Da$ . Таким образом, устойчивость диффузионного пламени в пограничном слое удовлетворительно может описываться устойчивостью течения однородного газа с подводом энергии внутрь слоя и инжекцией газа через пористую стенку.

Поэтому в данной работе распределение температуры в условиях диффузионного пламени моделируется с помощью источника тепла, а плотность обратной пропорциональностью температуре. Исследования проведены при дозвуковом обтекании пластины, число Маха  $M \ll 1$ .

## 1. ОСНОВНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

На рис. 1 показан пограничный слой с полосой ввода тепла и вдувом газа через пористую стенку.

Ламинарное течение однородного газа в пограничном слое описывается в безразмерных переменных системой уравнений [16]

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial y} &= 0, \quad \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho \left( u \frac{\partial I}{\partial x} + v \frac{\partial I}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial I}{\partial y} + \mu \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) u \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \rho Q \\ \rho &= \frac{pm}{RT}, \quad I = h + \frac{u^2}{2}, \quad \mu = T^{3/2} \left( 1 + \frac{T_s}{T_e} \right) \left( T + \frac{T_s}{T_e} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $u$  и  $v$  – проекции вектора скорости на ортогональные координаты  $x$  (параллельная поверхности пластины) и  $y$  (нормальная к поверхности) соответственно,  $\rho$  – плотность,  $p$  – давле-

ние,  $T$  – температура,  $h = c_p T$  – энтальпия,  $Q$  – количество тепла введенного в единицу времени на единицу массы,  $m$  – молекулярный вес газа,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости,  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $Pr$  – число Прандтля. Предполагается, что  $c_p$  и  $Pr$  постоянны,  $T_s = 110$  К. Система (1.1) нормализована с помощью следующих масштабов:  $v_e/u_e$  – длина,  $\mu_e$  – вязкость,  $u_e$  – скорость,  $T_e$  – температура,  $\rho_e$  – плотность,  $u_e^2$  – энтальпия,  $u_e^4 \rho_e / \mu_e$  – подвод тепла,  $u_e^2 / T_e$  – удельная теплоемкость и универсальная газовая постоянная,  $\rho_e u_e^2$  – давление. Индексом  $e$  помечены параметры на внешней границе пограничного слоя.

На поверхности пластины ( $y = 0$ )  $u = 0$ ,  $v = j/\rho_w$  ( $j$  – поток массы газа через стенку),  $T = T_w$ , а на внешней границе пограничного слоя  $u = T = 1$ .

В локальном автомодельном приближении система приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dY} \left( C \frac{d^2 f}{dY^2} \right) + \frac{f}{2} \frac{d^2 f}{dY^2} &= 0 \\ \frac{d}{dY} \left( \frac{C}{Pr} \frac{dg}{dY} \right) + \frac{f}{2} \frac{dg}{dY} &= \frac{u_e^2}{I_e} \frac{d}{dY} \left[ \left( \frac{1}{Pr} - 1 \right) C \frac{df}{dY} \frac{d^2 f}{dY^2} \right] - Q \frac{u_e^2}{I_e} Re_b^2 \left( \frac{Re}{Re_b} \right)^2 \\ \frac{df}{dY} = u, \quad g &= \frac{u_e^2 I}{I_e}, \quad dY = \rho \frac{dy}{Re}, \quad C = \rho \mu, \quad Re = \sqrt{x} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $Re_b$  – постоянное число Рейнольдса конкретной задачи. Решение системы (1.2) зависит от  $x$  (через  $Re$ ) параметрически и должно удовлетворять граничным условиям

$$f = j Re, \quad \frac{df}{dY} = u = 0, \quad T = T_w (Y = 0); \quad u = g = 1 (Y = \infty)$$

Зависимость подвода тепла от нормальной координаты принимается в виде

$$Q \frac{u_e^2}{I_e} Re_b^2 = Au(1-u) \exp \left( - \left( \frac{y - y_f}{\Delta_f} \right)^2 \right)$$

Здесь величина  $\Delta_f$  пропорциональна ширине полосы подвода тепла, которая много меньше толщины пограничного слоя;  $y_f$  – параметр задачи, характеризующий положение полосы подвода тепла. В силу того, что основной вклад в подвод тепла осуществляется в узкой полосе, т.е. при  $y - y_f \ll 1$ , можно ограничиться первым членом разложения скорости по координате вблизи  $y_f$ , т.е. принять  $(u - u_f) \approx (du/dy)_f (y - y_f)$ , где индексом  $f$  помечены значения параметров течения при  $y = y_f$ . Тогда

$$\begin{aligned} y - y_f &\approx (u - u_f) \left( \frac{du}{dy} \right)_f^{-1} = (u - u_f) \frac{Re}{\rho_f} \left( \frac{du}{dY} \right)^{-1} \Big|_{Y=Y_f} \\ y - y_f &\approx (u - u_f) T_f(Re_b) \frac{T_f(Re)}{T_f(Re_b)} Re_b \frac{Re}{Re_b} \left( \frac{du}{dY} \right)^{-1} \Big|_{Y=Y_f} \end{aligned}$$

Известно, и настоящие предварительные расчеты показывают, что  $du/dY$  слабо зависит от  $Re$ . Таким образом, можно взять

$$Q \frac{u_e^2}{I_e} Re_b^2 = Au(1-u) \exp \left( - \left( \frac{u - u_f}{\Delta} \frac{T_f(Re)}{T_f(Re_b)} \frac{Re}{Re_b} \right)^2 \right) \quad (1.3)$$

Параметры  $A$ ,  $\Delta$  и  $u_f$  были выбраны таким образом, чтобы распределение температуры соответствовало профилю температуры, рассчитанному в [17] для пламени при следующих условиях. Плоская пористая пластина обтекается воздухом, а через ее поры вдувается смесь азота и водорода, массовая концентрация которого составляла 0.4%. Скорость на границе пограничного слоя составляет 5 м/с, а максимум температуры находился на высоте 3.5 мм на расстоянии 0.1 м от переднего края пластины. Расчеты в [17] были проведены при  $T_e = 293$  К,  $Re_b = 180$  и числе Ма-

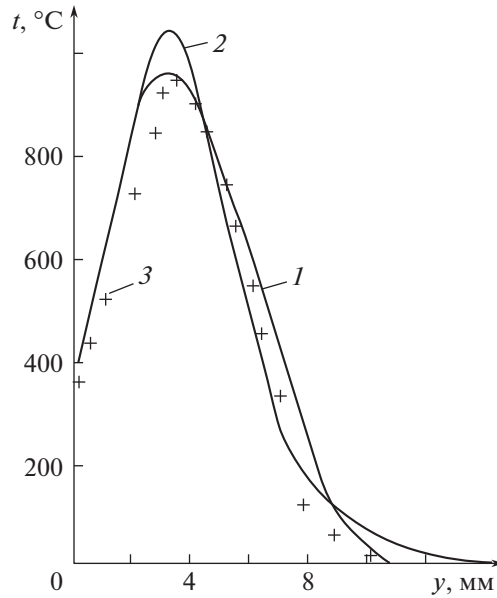


Рис. 2. Сравнение распределения температуры настоящих расчетов (1) с расчетными (2) и экспериментальными (3) данными [17].

ха  $M \ll 1$ . Наилучшее соответствие температурных профилей, полученных в [17] и в настоящих расчетах, было достигнуто при  $A = 15.25$ ,  $u_f = 0.15$ ,  $\Delta = 0.158$  (рис. 2).

На рис. 3 представлены профили скорости (рис. 3а) и температуры (рис. 3б) при числе Рейнольдса  $Re = 180$  и разных значениях параметра вдува  $j$ . Как и следовало ожидать, при вдуве в профиле скорости появляется точка перегиба, которая удаляется от поверхности пластины с увеличением  $j$ . Температура внутри пограничного слоя при этом увеличивается. Расчеты показывают, что при  $j = 0.004$  увеличение числа Рейнольдса с  $Re = 70$  до  $Re = 180$ , что равносильно смещению вниз по потоку примерно два раза, повышает максимальную температуру внутри слоя примерно на 35%, что качественно согласуется с данными по диффузионному пламени в пограничном слое, например, с экспериментами [17] и расчетами [18].

В теории “невязкой” неустойчивости особую роль играет обобщенная точка перегиба, наличие максимума или минимума в произведении плотности и завихренности  $K = \rho(du/dy) = \rho^2(du/dY)$ , наличие которых является необходимым условием неустойчивости. Изменение  $K$  по пограничному слою показано на рис. 3в. Из него видно, что с увеличением интенсивности вдува положение максимума смещается к внешней границе пограничного слоя, в то время как положение минимума остается неизменным. Сильное влияние вдува на положение максимума, обобщенной точки перегиба, может повлиять на устойчивость течения в пограничном слое.

## 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Полные динамические уравнения в безразмерном представлении имеют вид

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad}\Pi, \quad \frac{dp}{dt} + \rho \text{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad \rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} - \text{div}(\mathbf{q}) + 2\mu \dot{S}^2 + \rho Q \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad \dot{S}_j = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \dot{S}^2 = \sum_{i,j=1}^3 \dot{S}_{ij}^2$$

$$\Pi = \left( p + \frac{2}{3} \mu \text{div} \mathbf{v} \right) E - 2\mu \dot{S}, \quad p = \rho RT, \quad \mathbf{q} = -\frac{c_p \mu}{Pr} \text{grad} T$$

Здесь тепловой поток нормирован на  $\rho_e u_e^3$ , а время на  $v_e / u_e^2$ . Нормировка других величин такая же, как и в (1.1). Любую величину  $\Phi_j$  можно представить в виде суммы основной стационарной

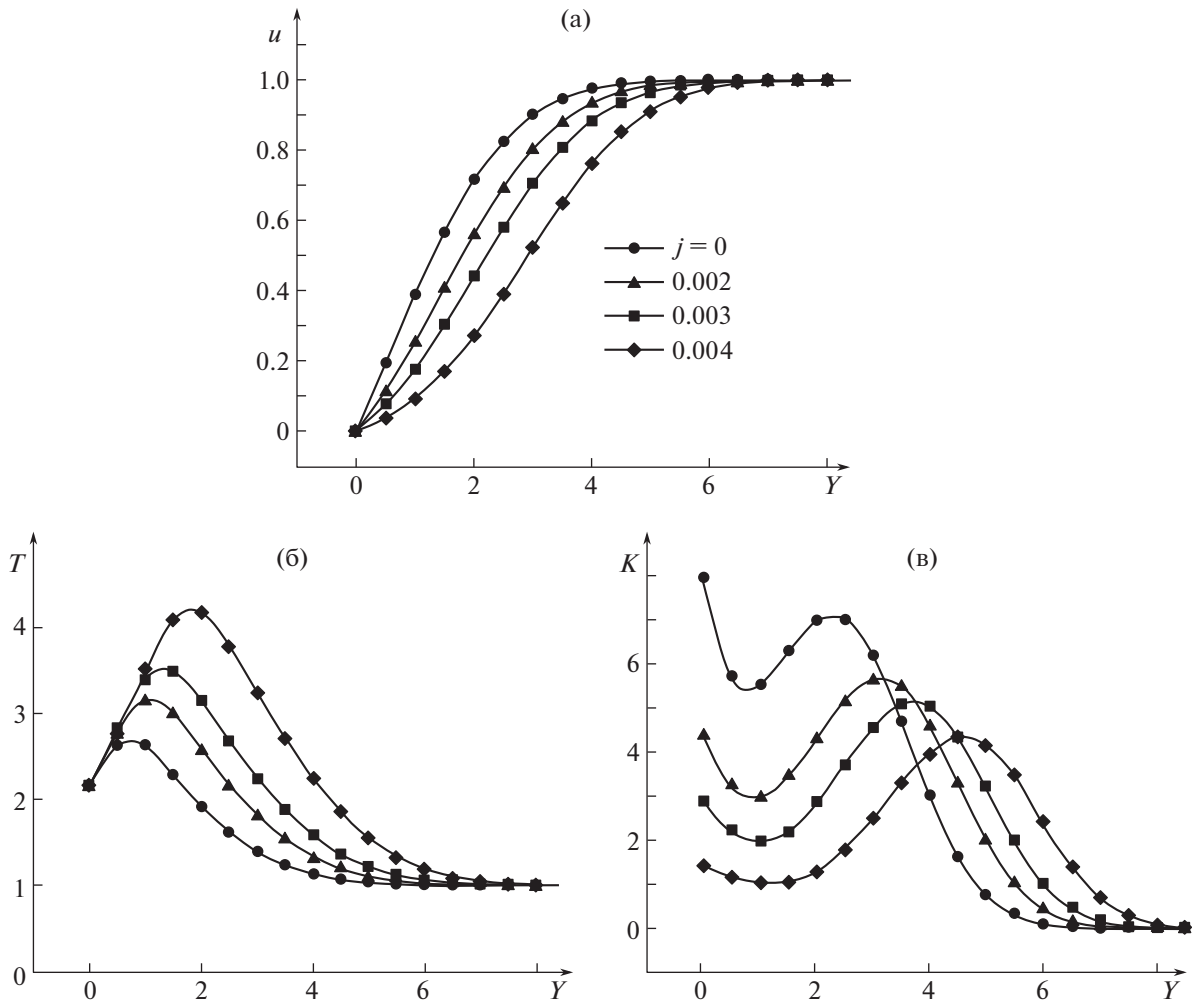


Рис. 3. Распределение скорости (а) и температуры (б) и произведения плотности на завихренность (в) в пограничном слое при  $Re = 180$  и разных величинах вдува газа.

величины и нестационарного возмущения,  $\Phi_i(t, x, y, z) = \phi_i(x, y, z) + \varepsilon \phi_{li}(t, x, y, z)$ . Линеаризация (2.1) относительно возмущений  $\phi_{li} = \phi_i^d(y) \exp[i(ax + bz - Ft)]$  приводит к линейной системе дифференциальных уравнений [19, 20], которая в приближении параллельного течения имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{d\phi_1^d}{dY} &= -i_c \phi_2^d + i_x \phi_5^d + i_z \phi_6^d - 2\mu_r \frac{du_w^d}{dY}, & \frac{d\phi_2^d}{dY} &= \rho \frac{dT}{dY} \phi_2^d - u_w^d - i_c T r^d \\
 \frac{d\phi_3^d}{dY} &= -i_x \phi_2^d - \frac{du}{dY} \mu_i T^d + \frac{\phi_5^d}{\mu_r}, & \frac{d\phi_4^d}{dY} &= -i_z \phi_2^d + \frac{\phi_6^d}{\mu_r} \\
 \frac{d\phi_5^d}{dY} &= i_x \phi_1^d + i_c \phi_3^d - i_T^d + \rho \frac{du}{dY} \phi_2^d, & \frac{d\phi_6^d}{dY} &= i_z \phi_1^d + (i_c - \mu_a) \phi_4^d - i_z \mu_r u_w^d \\
 \frac{d\phi_7^d}{dY} &= i\omega RT \phi_1^d + \rho \frac{dI}{dY} \phi_2^d - u_i^d + i_c u \phi_3^d + \left(i_c - \frac{\mu_a}{Pr}\right) \phi_8^d \\
 \frac{d\phi_8^d}{dY} &= -Pr \frac{du}{dY} \phi_3^d - \frac{dh}{dY} \mu_i T^d + \frac{Pr(\phi_7^d - u \phi_5^d)}{\mu_R}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

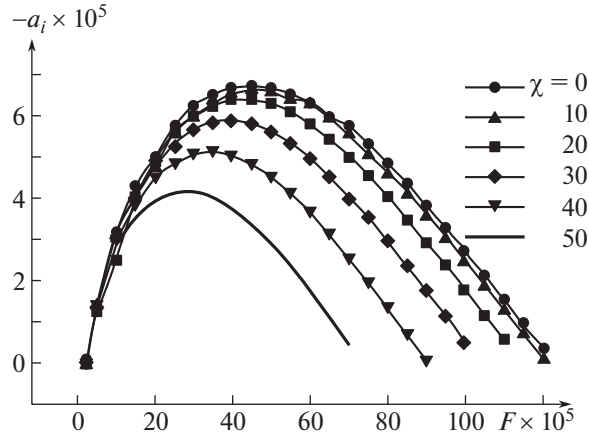


Рис. 4. Зависимость степени пространственного усиления от частотного параметра при разных углах скольжения:  $Re = 180, j = 0.004$ .

Здесь  $\phi_1^d, \phi_2^d, \phi_3^d, \phi_4^d, \phi_5^d, \phi_6^d, \phi_7^d, \phi_8^d$  – амплитуды возмущений давления; нормальной, продольной и боковой скорости; сдвиговых напряжений  $\tau_{12}, \tau_{23}$ ; теплового потока и энтальпии. Дополнительными членами системы являются

$$\begin{aligned} u_w^d &= i_x \phi_3^d + i_z \phi_5^d, & i_t^d &= i_x \mu_r u_w^d + \mu_a \phi_3^d \\ \mu_a &= (i_x^2 + i_z^2) \mu_r, & \tilde{r} &= \rho^d / \rho = g_m \phi_1^d - \rho T^d \\ T^d &= g_{m1} \phi_8^d, & i_x &= ia \operatorname{Re} T, & i_z &= ib \operatorname{Re} T \\ i_c &= \operatorname{Re} u_c = i \operatorname{Re}(ua - F), & \mu_r &= \frac{\mu \rho}{\operatorname{Re}}, & \mu_T &= \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} \\ g_m &= \gamma M^2, & g_{m1} &= (\gamma - 1) M^2, & \gamma &= c_p / c_v \end{aligned}$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты.

Система (2.2) решается с граничными условиями

$$\phi_3^d, \phi_2^d, \phi_4^d, \phi_8^d = 0 \quad (Y = 0 \text{ и } Y = \infty) \quad (2.3)$$

При заданных значениях  $M, Re, F$  и параметрах основного течения решение системы (2.2) с условиями (2.3) существует при собственном значении  $a = a_r + ia_i$ . Течение неустойчиво при отрицательном значении  $a_i$ .

На рис. 4 показаны зависимости степеней пространственного усиления возмущений от частотного параметра при  $Re = 180, j = 0.004$  и различных углах скольжения волны  $\chi = \operatorname{arctg}(b/a_r)$ .

Из представленных данных видно, что практически во всем диапазоне частот нарастающих возмущений наиболее интенсивно растут двумерные волны,  $\chi = 0$ . Поэтому ниже будут приведены результаты по устойчивости только по отношению к двумерным возмущениям.

На рис. 5 приведены значения степеней усиления в зависимости от частоты для ряда чисел Рейнольдса. Из этих данных видно, что максимальная степень усиления нарастает с ростом числа Рейнольдса при  $Re < 150$ , дальнейшее его увеличение приводит к уменьшению скорости роста возмущений. Частота наиболее растущих волн уменьшается с увеличением числа Рейнольдса, по-видимому, из-за нарастания толщины пограничного слоя с ростом  $Re = x^{1/2}$ .

На рис. 6 показана зависимость степени пространственного усиления от частотного параметра при разной подаче газа через пористую стенку при  $Re = 180$ . Как и в отсутствие подогрева [21], при подводе тепла увеличение скорости потока массы через стенку приводит к дестабилизации течения. Расчетами установлено, что критическое число Рейнольдса при  $j = 0.004$  уменьшается почти на 70% в сравнении со случаем  $j = 0$ .

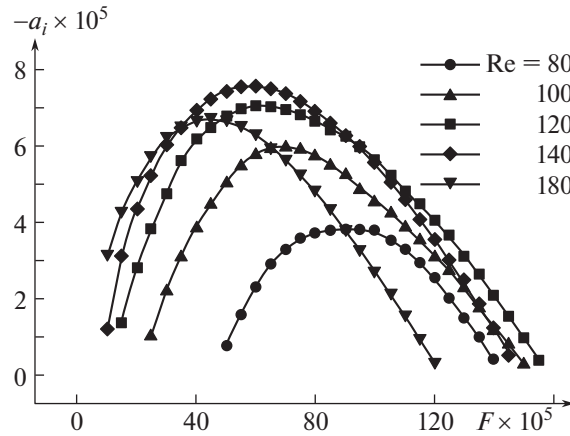


Рис. 5. Зависимость степени пространственного усиления от частотного параметра при разных числах Рейнольдса:  $j = 0.004$ ,  $\chi = 0$ .

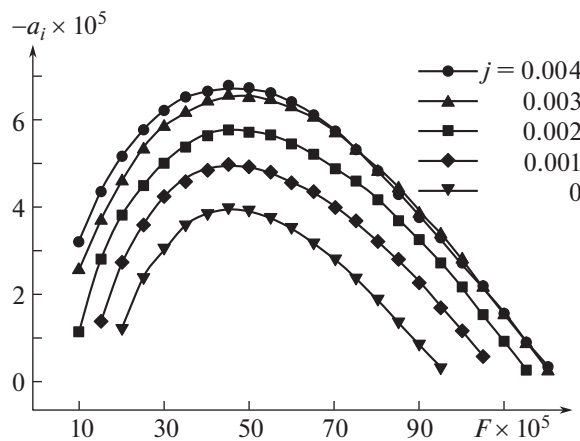
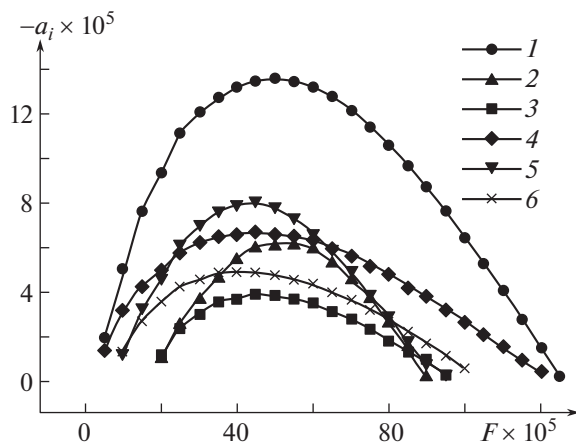


Рис. 6. Зависимость степени пространственного усиления от частотного параметра при разной подаче газа через пористую стенку:  $Re = 180$ ,  $\chi = 0$ .

Расчеты фазовой и групповой скорости от частотного параметра в неустойчивой области при  $Re = 180$ ,  $j = 0.004$  показали, прежде всего, что групповая скорость существенно превышает фазовую скорость. С увеличением частоты фазовая скорость стремится к значению скорости основного течения в положении максимума функции  $K$ . Она находится в промежутке скоростей в положении минимума и максимума  $K$  (рис. 3в,  $Re = 180$ ,  $j = 0.004$ ), где выполняется второе необходимое условие “невязкой” неустойчивости [15],  $(u - Us)(dK/dY) < 0$ , которое является обобщением критерия Фьёртофта [22]. Здесь  $Us$  – скорость, соответствующая максимуму  $K$ .

Известно [23], что при слабом усилении возмущений их пространственные и временные степени усиления связаны соотношением  $a_i \approx -F_i/C_{gr}$ , где временная степень усиления  $F_i$  – мнимая часть собственного значения  $F$  задачи (2.2), (2.3) при фиксированном реальном значении  $a$ . Специальные расчеты показали, что точное значение степени пространственного усиления практически совпадает с ее приближенной величиной даже при достаточно интенсивном росте амплитуды возмущения.

В [13, 24], при исследовании влияния подвода тепла в отсутствие подачи газа через поверхность пластины, была установлена стабилизирующая роль подогрева узкой полосы пограничного слоя. Поэтому в настоящих исследованиях также обращалось внимание на влияние подогрева на устойчивость пограничного слоя в условиях инжекции газа через пористую пластину. На рис. 7 показаны зависимости степеней усиления от частоты при разных соотношениях количества инжектируемого газа ( $j = 0.0, 0.001, 0.004$ ), как в отсутствие подвода тепла ( $Q = 0$ ), так и при подводе



**Рис. 7.** Зависимости степеней пространственного усиления от частотного параметра при разных соотношениях подачи газа через стенку и подводе тепла ( $Re = 180$ ,  $T_w = 2.16$ ,  $\chi = 0$ ): 1 –  $j = 0.004$ ,  $Q = 0.0$ ; 2 –  $j = 0.0$ ,  $Q = 0$ ; 3 –  $j = 0.0$ ,  $Q \neq 0$ ; 4 –  $j = 0.004$ ,  $Q \neq 0$ ; 5 –  $j = 0.001$ ,  $Q = 0$ ; 6 –  $j = 0.001$ ,  $Q \neq 0$ .

тепла в соответствии с соотношением (1.3). При этом все зависимости получены при одинаковой температуре стенки  $T_w = 2.16$  (640°K) и числе Рейнольдса  $Re = 180$ . Сопоставление максимумов приведенных зависимостей показывает следующее. В отсутствие подвода тепла (зависимости: 1 ( $j = 0.004$ ), 2 ( $j = 0.001$ ), 5 ( $j = 0.0$ )) вдув газа дестабилизирует течение. Подвод тепла, наоборот, стабилизирует его при нагретой пластине ( $T_w = 2.16$ ). Сопоставление зависимости 1 и 4 показывает, что в случае большого количества вдуваемого газа ( $j = 0.004$ ) подвод тепла уменьшает максимальную степень усиления более чем в два раза. Однако она все еще выше, чем в случае без подогрева и вдува газа (зависимость 2). При меньших количествах вдуваемого газа ( $j = 0.001$ ) в результате подвода тепла (зависимость 6) устойчивость пограничного слоя повышается не только в отношении случая без подвода тепла (зависимость 5), но становится более устойчивым по сравнению со случаем без инжекции и подвода тепла (зависимость 2).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках локального автомодельного приближения смоделирован профиль температуры диффузионного пламени работы [17] при массовом вдуве газа через пористую пластину  $j = (\rho v)_w / (\rho u)_\infty = 0.004$ , числе Рейнольдса  $Re = 180$  и числе Маха  $M \ll 1$ . При этом потребовался подвод тепла в соответствии с (1.3). С использованием (1.3) были рассчитаны стационарные параметры пограничного слоя и рассмотрена его устойчивость при разных значениях числа Рейнольдса и расхода вдуваемого через пористую стенку газа. Установлено, что увеличение вдуваемой массы газа через пористую стенку приводит к образованию перегибных профилей скорости. При фиксированной норме вдува увеличение числа Рейнольдса повышает максимальную температуру внутри слоя. Из этого следует рост максимальной температуры вниз по потоку, так как  $Re = x^{1/2}$ , что наблюдается при диффузионном горении, например, в экспериментах [17] и расчетах [18]. Важная функция в теории “невязкой” неустойчивости, произведении плотности и завихренности  $K$ , имеет две обобщенные точки перегиба. Одна из них соответствует минимуму, вторая максимуму  $K(Y)$ . Минимальное значение  $K$  находится на меньшем расстоянии от стенки в сравнении с положением максимума  $K$ . Положение максимума с увеличением вдува смещается к внешней границе пограничного слоя, в то время как минимум продолжает оставаться при  $Y \approx 1$ .

Впервые исследована устойчивость пограничного слоя с подводом тепла и вдувом газа при дозвуковом обтекании пластины. В результате исследований установлено, что в условиях вдува газа и внутреннего подвода тепла наиболее опасными (растущими) являются двумерные возмущения, как и в отсутствие подогрева. Существует число Рейнольдса, при котором степень усиления максимальна. С увеличением числа Рейнольдса частота наиболее растущих волн понижается из-за увеличения толщины пограничного слоя. Инжекция газа дестабилизирует пограничный слой. При параметре вдува  $j = 0.004$  критическое число Рейнольдса снижается примерно на 40% в сравнении со случаем  $j = 0$ .



Критический слой, где скорость в пограничном слое равна фазовой скорости волны ( $u = C$ ), располагается в области, соответствующей второму необходимому условию “невязкой” неустойчивости,  $(u - Us)(dK/dY) < 0$ . С увеличением частоты растущих волн фазовая скорость стремится к скорости течения в максимуме произведения плотности и завихренности, соответствующего обобщенной точке перегиба. Несмотря на довольно большие степени пространственного роста, их приближенные значения, определяемые как отношение степени временного усиления к групповой скорости, практически совпадают с точными величинами.

При нагретой пластине подвод тепла внутри пограничного слоя понижает максимальную степень роста возмущений в пограничном слое с инъекцией газа, как и в случае ее отсутствия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 22-21-00017, <https://rscf.ru/project/22-21-00017/>).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Emmons H.W.* The film combustion of liquid fuel // *Z. Math. und Mech.* 1956. V. 36. 1/2. P. 60–71.
2. *Волчков Э.П., Терехов В.И., Терехов В.В.* Структура течения, тепло- и массоперенос в пограничных слоях со вдувом химически реагирующих веществ (обзор) // *Физика горения и взрыва*. 2004. № 1. С. 3–20.
3. *Гапонов С.А., Петров Г.В.* Устойчивость пограничного слоя неравновеснодиссоциирующего газа. Новосибирск: Наука, 2013. 95 с.
4. *Shen S.F.* Effect of chemical reaction on the inviscid criterion for laminar stability of parallel flows // *Fifth Midwestern Conference on Fluid Mechanics, Ann Arbor, Michigan, University of Michigan.* 1957. P. 11–20.
5. *Петров Г.В.* Устойчивость пограничного слоя газа с химическими реакциями на каталитической поверхности // *Физика горения и взрыва*. 1974. Т. 10. № 6. С. 797–801.
6. *Петров Г.В.* Устойчивость пограничного слоя каталитически рекомбинирующего газа // *ПМТФ*. 1978. № 1. С. 40–45.
7. *Lin C.C.* The theory of hydrodynamic stability. Cambridge university press. 1955. 155 p. *Линь Ц.Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958. 195 с.
8. *Han Y., Cao W.* Flat-plate hypersonic boundary-layer flow instability and transition prediction considering air dissociation // *Appl. Math. Mech.* 2019. V. 40. № 5. P. 719–736. doi.org/. <https://doi.org/10.1007/s10483-019-2480-6>
9. *Marxen O.* Hydrodynamic Stability of Hypersonic Chemically Reacting Boundary Layers I.EN-AVT-289-02%20(23).pdf
10. *Jackson T.L.* Stability of Laminar Diffusion Flames in Compressible Mixing Layers // In: *Hussaini M.Y., Kumar A., Voigt R.G. / Major Research Topics in Combustion. ICASE/NASA LaRC Ser. Springer, New York. NY.* 1992 [https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2884-4\\_8](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2884-4_8)
11. *See Y.C., Ihme M.* Effects of finite-rate chemistry and detailed transport on the instability of jet diffusion flames // *J. Fluid Mech.* 2014. V. 745. P. 647–681. <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.95>
12. *Лукашов В.В., Терехов В.В., Терехов В.И.* Пристенные течения химически реагирующих веществ. Обзор современного состояния проблемы // *Физика горения и взрыва*. 2015. Т. 51. № 2. С. 23–36.
13. *Гапонов С.А.* Устойчивость сверхзвукового пограничного слоя при подводе тепла в его узкую полосу // *Теплофизика и аэромеханика*. 2021. Т. 28. № 3. С. 351–360.
14. *Jackson T.L., Grosch C.E.* Inviscid spatial stability of a compressible mixing layer. Part 2. The flame sheet model // *Journal of Fluid Mechanics.* 1990. V. 217. P. 391–420. <https://doi.org/10.1017/S0022112090000775>
15. *Shin D.S., Ferziger J.H.* Linear stability of the reacting mixing layer // *AIAA Journal.* 1991. V. 29 (10). P. 1634–1642. <https://doi.org/10.2514/3.10785>
16. *Dorrance W.H.* Viscous Hypersonic Flow: Theory of Reacting and Hypersonic Boundary Layers. McGraw-Hill Book Co. Inc. 1962. 334 p. *Дорренс У.Х.* Гиперзвуковые течения вязкого газа. М.: Изд-во Мир. 1966. 439 с.
17. *Volchkov E.P., Lukashov V.V., Terekhov V.V., Hanjalic K.* Characterization of the flame blow-off conditions in a laminar boundary layer with hydrogen injection // *Combustion and Flame.* 2013. V. 160. P. 1999–2008. <https://doi.org/10.1016/j.combustflame.2013.04.004>
18. *Peters N.* Analysis of a laminar flat plate boundary-layer diffusion flame // *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 1976. V. 19. P. 385–393. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(76\)90094-6](https://doi.org/10.1016/0017-9310(76)90094-6)
19. *Петров Г.В.* Реакция сверхзвукового пограничного слоя на акустическое воздействие // *Теплофизика и аэромеханика*. 2001. № 1. С. 77–86.

20. Гапонов С.А., Юдин А.В. Взаимодействие гидродинамических внешних возмущений с пограничным слоем // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43. № 1. С. 100–107.
21. Chen T.S., Sparrow E.M., Tsou F.K. The effect of mainflow transverse velocities in linear stability theory // Journal of Fluid Mechanics. 1971. V. 50 (04). P. 741.  
<https://doi.org/10.1017/s0022112071002866>
22. Fjortoft R. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex // Geophys. 1950. V. 17. P. 1–52.
23. Gaster M.A. A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability // J. Fluid Mech. 1962. V. 14. Part 2. P. 222–224.  
<https://doi.org/10.1017/S0022112062001184>
24. Гапонов С.А. Влияние подвода тепла в узкую полосу пограничного слоя на его устойчивость // Прикладная механика и техническая физика. 2020. Т. 61. № 5. С. 5–13.  
<https://doi.org/10.15372/PMTF20200501>