ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 4, с. 69–76

УДК 532.59:539.3

ЗАДАЧА КОШИ–ПУАССОНА ДЛЯ ЖИДКОСТИ СО СДВИГОВЫМ ТЕЧЕНИЕМ И НЕРАВНОМЕРНО СЖАТЫМ ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ

© 2022 г.
И. В. Стурова

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: sturova@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 14.02.2022 г.
После доработки 15.03.2022 г.
Принята к публикации 15.03.2022 г.

В линейном приближении решена трехмерная нестационарная задача о генерации изгибно-гравитационных волн, вызванных начальным осесимметричным возмущением жидкости, на поверхности которой плавает безграничный ледяной покров, моделируемый тонкой упругой пластиной с учетом продольных, поперечных и сдвиговых сжимающих усилий. В невозмущенном состоянии обе горизонтальные компоненты скорости жидкости линейно меняются по глубине. Получено интегральное представление решения, описывающего поведение ледяного покрова.

Ключевые слова: плавающая упругая пластина, изгибно-гравитационные волны, неравномерные сжимающие усилия, сдвиговые течения, эволюция начального возмущения

DOI: 10.31857/S0568528122040107

В последние десятилетия активно исследуются волновые движения, возникающие в жидкости, которая ограничена сверху плавающей тонкой упругой пластиной. Это необходимо для проектирования и эксплуатации искусственных платформ больших размеров, а также учета плавающего ледяного покрова [1]. Волны, возникающие в такой жидкости, называются изгибно-гравитационными (ИГВ), так как их свойства зависят как от свойств жидкости, так и от свойств упругого покрытия. К настоящему времени сравнительно хорошо исследованы процессы генерации, развития и распространения пространственных ИГВ в покоящейся в невозмущенном состоянии среде или в потоке жидкости, текущей с постоянной по глубине скоростью (см., например, [2]). Однако в реальных морских условиях вертикальное распределение скорости течения в некоторых случаях показывает значительные изменения величины и направления по глубине. Этот факт свидетельствует о том, что исследование ИГВ следует проводить также в рамках таких теоретических моделей, которые учитывают вертикальную структуру течений. Большое число исследований посвящено развитию вынужденных поверхностных волн при наличии сдвиговых течений в жидкости под свободной поверхностью (см. библиографию в [3, 4]). Трехмерные задачи о поведении ИГВ в жидкости со сдвиговым течением пока не рассматривались.

Наиболее простой нестационарной задачей в волновой гидродинамике является так называемая задача Коши-Пуассона о развитии во времени начального возмущения на верхней границе жидкости. В данной работе представлено решение линейной задачи о генерации волн, вызванных начальным осесимметричным возмущением в жидкости под ледяным покровом, который моделируется тонкой упругой пластиной с учетом продольных, поперечных и сдвиговых сжимающих усилий. Сплошной безграничный ледяной покров плывет на поверхности потока жидкости с вертикальным сдвигом скорости. Построено интегральное представление решения, описывающее поведение ледяного покрова. Двумерный случай этой задачи исследован в [5].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим безграничный в горизонтальных направлениях поток идеальной несжимаемой однородной жидкости конечной глубины H с вертикальным сдвигом скорости. Система декартовых координат x, y, z введена так, что оси x и y лежат на невозмущенной горизонтальной верхней границе жидкости, а ось z направлена вертикально вверх. Вектор скорости невозмущенного

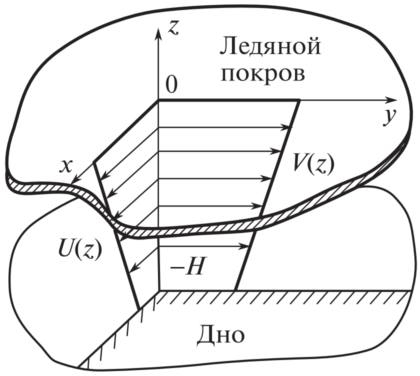

Рис. 1. Схема течения в невозмущенном состоянии.

потока обозначим $\mathbf{V} = (U(z), V(z), 0)$, где компоненты скорости вдоль осей x и y имеют линейную зависимость

$$U(z) = U_0 + \alpha z, \quad V(z) = V_0 + \beta z$$

На поверхности потока жидкости плавает сплошной ледяной покров, который моделируется тонкой упругой пластиной постоянной толщины и плотности. Предполагается, что в упругой пластине существуют продольные, поперечные и сдвиговые напряжения, и во все моменты времени жидкость находится в контакте с пластиной. Схема течения приведена на рис. 1.

В начальный момент времени $t = 0$ верхняя граница жидкости отклоняется от невозмущенного горизонтального положения. Обозначим $\mathbf{v} = (u, v, w)$ возникающие возмущения скорости жидкости, которые предполагаются малыми. Развитие последующего волнового движения в жидкости описывается линеаризованными уравнениями Эйлера

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right)\mathbf{v} + w\frac{d\mathbf{V}}{dz} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

где $p(x, y, z, t)$ – динамический добавок давления, ρ – плотность жидкости.

Кинематическое и динамическое условия на верхней границе жидкости ($z = 0$) имеют вид

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + U_0\frac{\partial\eta}{\partial x} + V_0\frac{\partial\eta}{\partial y} = w \tag{1.2}$$

$$D\Delta_2^2\eta + Q_1\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + Q_2\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + 2Q_3\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + M\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \rho g\eta = p, \quad \Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.3}$$

Здесь $\eta(x, y, t)$ – вертикальный прогиб ледяного покрова, его цилиндрическая жесткость равна $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$, $M = \rho_1 h$; E, ρ_1, h, ν – модуль Юнга, плотность, толщина и коэффициент Пуассона; Q_1, Q_2, Q_3 – продольное, поперечное и сдвиговое сжатие по соответствующим направлениям. Первое слагаемое в динамическом условии описывает упругие свойства ледяного покрова, сумма последующих трех слагаемых представляет влияние сжимающих напряжений в нем, а пятое слагаемое – его инерционные свойства. В дальнейшем предполагается, что инерционное слагаемое мало по сравнению с другими слагаемыми и им можно пренебречь.

На ровном горизонтальном дне выполняется условие непротекания

$$w = 0 \quad (z = -H) \tag{1.4}$$

Начальные условия равны

$$\eta = \eta_0(r), \quad |\mathbf{v}| = 0 \quad (t = 0), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.5}$$

где $\eta_0(r)$ – осесимметричное начальное возвышение верхней границы жидкости.

Для решения задачи (1.1)–(1.5) используется двойное преобразование Фурье

$$\tilde{u}(\lambda,\mu,z,t) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,y,z,t)\exp[-i(\lambda x + \mu y)]dxdy \tag{1.6}$$

Аналогичные преобразования вводятся для остальных искомых функций. В результате система уравнений (1.1) примет вид

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} + Z\tilde{u} + \alpha\tilde{w} + i\lambda P = 0, \quad \frac{\partial\tilde{v}}{\partial t} + Z\tilde{v} + \beta\tilde{w} + i\mu P = 0 \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t} + Z\tilde{w} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad i(\lambda\tilde{u} + \mu\tilde{v}) + \frac{\partial\tilde{w}}{\partial z} = 0 \tag{1.8}$$

где $Z(\lambda,\mu,z) = i[\lambda U(z) + \mu V(z)]$, $P = \tilde{p}/\rho$.

Дифференцируя уравнения в (1.7) по z и используя уравнения (1.8), сведем данную систему к одному уравнению

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + Z\right]\left(\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial z^2} - k^2\tilde{w}\right) = 0, \quad k^2 = \lambda^2 + \mu^2$$

С учетом граничного условия на дне (1.4) получим

$$\tilde{w} = A(\lambda,\mu,t)\mathrm{sh}[k(z+H)]$$

где $A(\lambda,\mu,t)$ – неизвестная функция. Выполняя двойное преобразование Фурье для кинематического (1.2) и динамического (1.3) условий, находим

$$\tilde{p}|_{z=0} = -\frac{\rho}{k}\left\{\left[\frac{\partial A}{\partial t} + i\zeta_1 A\right]\mathrm{ch}(kH) - \frac{i\zeta_2}{k}A\,\mathrm{sh}(kH)\right\}$$

где $\zeta_1(\lambda,\mu) = \lambda U_0 + \mu V_0, \zeta_2(\lambda,\mu) = \lambda\alpha + \mu\beta$. В результате уравнение для определения $\tilde{\eta}(\lambda,\mu,t)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2\tilde{\eta}}{\partial t^2} + i\left[2\zeta_1 - \frac{\zeta_2}{k}\mathrm{th}(kH)\right]\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t} + \left[\left(\frac{k}{\rho}\zeta_3 + \frac{\zeta_1\zeta_2}{k}\right)\mathrm{th}(kH) - \zeta_1^2\right]\tilde{\eta} = 0 \tag{1.9}$$

с начальными условиями

$$\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_0(k), \quad \partial\tilde{\eta}/\partial t = 0 \quad (t = 0) \tag{1.10}$$

где $\zeta_3(\lambda,\mu) = Dk^4 - \lambda^2 Q_1 - \mu^2 Q_2 - 2\lambda\mu Q_3 + \rho g$. Коэффициенты уравнения (1.9) не зависят от времени и это уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение.

Следуя [6], выведем дисперсионное соотношение для ИГВ в рассматриваемой задаче. Решение уравнения (1.9) пропорционально $\exp[-i(\zeta_1 + \omega_\pm)t]$, где

$$\omega_\pm(k,\theta) = \pm\sqrt{\omega_0^2 + \zeta_4^2} - \zeta_4 \tag{1.11}$$

$$\omega_0^2(k,\theta) = \frac{k}{\rho}\zeta_3\,\mathrm{th}(kH), \quad \zeta_4(k,\theta) = \frac{\zeta_2\,\mathrm{th}(kH)}{2k}, \quad \theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$$

Здесь функция $\omega_0(k,\theta)$ является дисперсионным соотношением для ИГВ в жидкости без сдвига скорости. С учетом инерционного слагаемого в (1.3) (т.е. при $M \neq 0$) дисперсионное соотношение для ИГВ в системе жидкость – упругая пластина с неравномерным сжатием дано в работах [2, 7, 8]. Ограничиваясь положительным значением в левой части (1.11), получим зависимость $\omega(k,\theta)$ для частоты ИГВ в жидкости со сдвигом скорости

$$\omega(k,\theta) = \sqrt{\omega_0^2 + \zeta_4^2} - \zeta_4 \tag{1.12}$$

Решение уравнения (1.9) с начальными условиями (1.10) имеет вид

$$\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_0\exp(i\zeta_5 t)\left[\cos(\zeta_6 t) - \frac{i\zeta_5}{\zeta_6}\sin(\zeta_6 t)\right]$$

где

$$\zeta_5(k,\theta) = \zeta_4 - \zeta_1, \quad \zeta_6(k,\theta) = \sqrt{\omega_0^2 + \zeta_4^2}$$

Для начального возмущения

$$\eta_0(r) = a\exp(-br^2)$$

после двойного преобразования Фурье (1.6) получим

$$\tilde{\eta}_0(k) = \frac{\pi a}{b}\exp\left(-\frac{k^2}{4b}\right)$$

Далее введем безразмерные переменные

$$(\bar{x},\bar{y}) = \frac{(x,y)}{H}, \quad \bar{t} = \sqrt{\frac{g}{H}}t, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{a}, \quad \bar{b} = H^2 b, \quad \bar{k} = Hk, \quad (\bar{U}_0,\bar{V}_0) = \frac{(U_0,V_0)}{\sqrt{gH}}$$

$$\bar{D} = \frac{D}{\rho g H^4}, \quad \bar{Q}_j = \frac{Q_j}{\rho g H^2} \quad (j = 1,2,3), \quad (\bar{\alpha},\bar{\beta}) = \sqrt{\frac{H}{g}}\frac{(\alpha,\beta)}{2}, \quad \bar{\omega} = \sqrt{\frac{H}{g}}\omega$$

После выполнения обратных преобразований Фурье и перехода в подвижную систему координат (черта сверху далее опущена)

$$X = x - U_0 t, \quad Y = y - V_0 t$$

получим решение для вертикального прогиба ледяного покрова

$$\eta(X,Y,t) = \frac{1}{4\pi b}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} k\exp\left(-\frac{k^2}{4b}\right)\left[1 + \frac{\gamma(k,\theta)}{\sigma(k,\theta)}\right]\cos\psi(k,\theta,t)dk \qquad (1.13)$$

где

$$\gamma(k,\theta) = f(\theta)\operatorname{th}k - k(U_0\cos\theta + V_0\sin\theta), \quad f(\theta) = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta$$
$$\sigma(k,\theta) = \sqrt{\omega_0^2(k,\theta) + [f(\theta)\operatorname{th}k]^2} \qquad (1.14)$$

$$\omega_0^2(k,\theta) = k\operatorname{th}k[Dk^4 - Q(\theta)k^2 + 1], \quad Q(\theta) = Q_1\cos^2\theta + Q_2\sin^2\theta + Q_3\sin(2\theta)$$
$$\psi(k,\theta,t) = (X\cos\theta + Y\sin\theta)k - \omega(k,\theta)t, \quad \omega(k,\theta) = \sigma(k,\theta) - f(\theta)\operatorname{th}k \qquad (1.15)$$

При $D = 0$, $Q_1 = Q_2 = -T$ $(T > 0)$, $Q_3 = 0$ решение (1.13) является решением задачи Коши–Пуассона для жидкости со свободной поверхностью с учетом коэффициента поверхностного натяжения T. Решение этой задачи при наличии только одной компоненты горизонтальной скорости основного потока, т.е. $V(z) = 0$, дано в [6]. Выполнен подробный анализ поведения капиллярно-гравитационных волн в зависимости от глубины жидкости и параметра сдвига.

Волновое движение, описываемое решением (1.13), становится осесимметричным только при отсутствии основного потока $U(z) = V(z) = 0$ и равномерном сжатии ледяного покрова $Q_1 = Q_2$, $Q_3 = 0$. В этом случае решение (1.13) сводится к однократному интегралу

$$\eta(r,t) = \frac{1}{2b}\int_0^{\infty} k\exp\left(-\frac{k^2}{4b}\right)J_0(kr)\cos[\omega_1(k)t]dk \qquad (1.16)$$

где

$$\omega_1(k) = \sqrt{k\operatorname{th}k(Dk^4 - Q_1k^2 + 1)}$$

J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Решение данной задачи для бесконечно глубокой жидкости и ненапряженного ледяного покрова ($Q_1 = 0$) получено в [9]. Используя результаты работы [10], можно определить равномерные и неравномерные асимптотические решения для (1.16) при больших значениях r и t, выражающиеся через функцию Эйри и ее производную.

2. ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ

Зависимость $\omega(k,\theta)$ в (1.15) (в размерных переменных (1.12)) устанавливает связь между частотой ω и волновым числом ИГВ k при различных значениях угла θ. Для существования вещественного значения частоты ω необходимо, чтобы при всех возможных значениях $0 \le \theta \le 2\pi$ подкоренное выражение в (1.14) было неотрицательным. Это условие гарантирует устойчивость плавающей упругой пластины. При отсутствии сдвигового течения все значения $q_j \equiv Q_j/\sqrt{D}$ ($j = 1,2,3$) не должны превышать 2 (см. подробнее [8]). С возрастанием сдвигового сжатия q_3 область возможных значений q_1 и q_2 уменьшается. Наличие сдвигового потока приводит к некоторому увеличению области допустимых значений q_1 и q_2 при фиксированном значении q_3. Для определения допустимых значений q_j ($j = 1,2,3$) необходимо при заданных параметрах D,α,β и фиксированных двух значениях параметров сжатия, например q_1 и q_3, для каждого значения θ решить систему уравнений

$$G(k_*,\theta) = 0, \quad \left.\frac{\partial G}{\partial k}\right|_{k=k_*} = 0 \tag{2.1}$$

где

$$G(k,\theta) = k[Dk^4 - Q(\theta)k^2 + 1] + f^2(\theta)\operatorname{th}k$$

Используя первое уравнение в (2.1), выразим

$$Q(\theta) = [Dk^5 + k + f^2(\theta)\operatorname{th}k]/k^3 \tag{2.2}$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (2.1), получим уравнение для определения $k_*(\theta)$

$$2(Dk^4 - 1) + f^2(\theta)(1 - \operatorname{th}^2 k - 3\operatorname{th}k/k) = 0$$

Это уравнение всегда имеет только один положительный корень. Используя (2.2), находим $Q_*(\theta) = Q(\theta)|_{k=k_*}$ и определяем минимальное положительное значение q_2 при изменении $0 \le \theta \le 2\pi$

$$q_2(\theta) = \frac{Q_*(\theta)/\sqrt{D} - q_1\cos^2\theta - q_3\sin(2\theta)}{\sin^2\theta}$$

Значение фазовой скорости ИГВ $c(k,\theta)$ равно

$$c(k,\theta) = \omega(k,\theta)/k \tag{2.3}$$

Эта характеристика важна для объяснения картины волнового движения.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Представленные ниже расчеты выполнены при следующих параметрах ледяного покрова и жидкости:

$$E = 5\times 10^9 \text{ Па}, \quad \nu = 0.3, \quad h = 0.5 \text{ м}, \quad \rho = 1025 \text{ кг/м}^3, \quad H = 20 \text{ м}$$

На рис. 2 для двух значений $q_3 = 0.5, 1.25$ при различных параметрах сдвигового потока α и β представлены кривые, которые на плоскости (q_1,q_2) ограничивают область устойчивости упругой пластины, т.е. для значений q_1 и q_2 ниже этих кривых при заданных параметрах q_3, α, β и всех возможных значениях угла θ подкоренное выражение в (1.14) является неотрицательным. На рис. 2 кривые *1–3* относятся к случаю $q_3 = 0.5$, кривые *4–6* – к случаю $q_3 = 1.25$. Кривые *1*, *4* соответствуют значениям $\alpha = \beta = 0$, кривые *2, 5* – значениям $\alpha = 0.5$, $\beta = 0$, а кривые *3, 5* – значениям $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.3$. Видно, что с увеличением параметров сдвига α и β область допустимых значений q_1 и q_2 увеличивается.

Представленные ниже прогибы ледяного покрова $\eta(X,Y,t)$, определенные в (1.13), вычислены для четырех вариантов значений параметров сжатия и сдвигового потока (см. табл. 1) при $bH^2 = 2$. На рис. 3 представлены зависимости функции $\eta(0,0,t)$ в эпицентре начального возмущения от

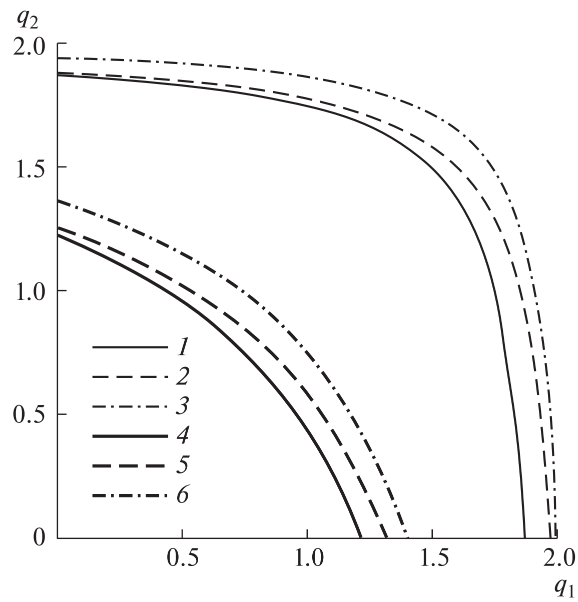

Рис. 2. Области значений q_1 и q_2, которые ограничивают зоны устойчивости упругой пластины: *1–3* – $q_3 = 0.5$; *4–6* – $q_3 = 1.25$; *1*, *4* – $(\alpha,\beta) = (0,0)$; *2*, *5* – $(\alpha,\beta) = (0.5,0)$; *3*, *6* – $(\alpha,\beta) = (0.5,0.3)$.

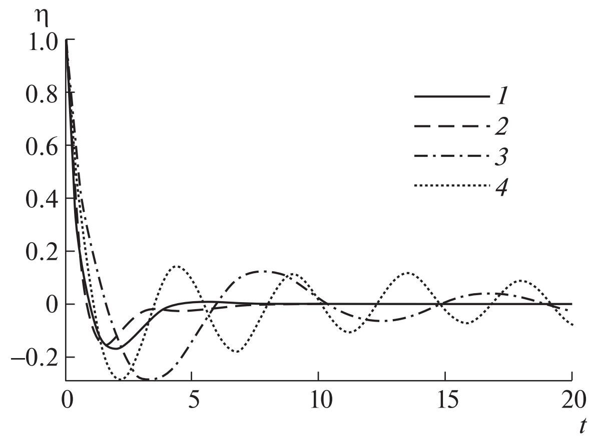

Рис. 3. Прогибы ледяного покрова $\eta(0,0,t)$ в зависимости от времени. Номера кривых *1–4* соответствуют номеру варианта в табл. 1.

времени. Номера кривых соответствуют номеру варианта в табл. 1. Видно, что при отсутствии сжимающих усилий в ледяном покрове его прогиб быстро убывает (кривые *1*, *2*), тогда как при наличии сжимающих усилий (кривые *3*, *4*) функция $\eta(0,0,t)$ имеет осциллирующий характер с довольно слабым затуханием колебаний особенно для варианта 4, в котором присутствует сдвиговое течение.

Таблица 1

Вариант	q_1	q_2	q_3	α	β	U_0	V_0
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0.5	0.3	0.6	0.4
3	1.5	1.2	0.5	0	0	0	0
4	1.5	1.2	0.5	0.5	0.3	0.6	0.4

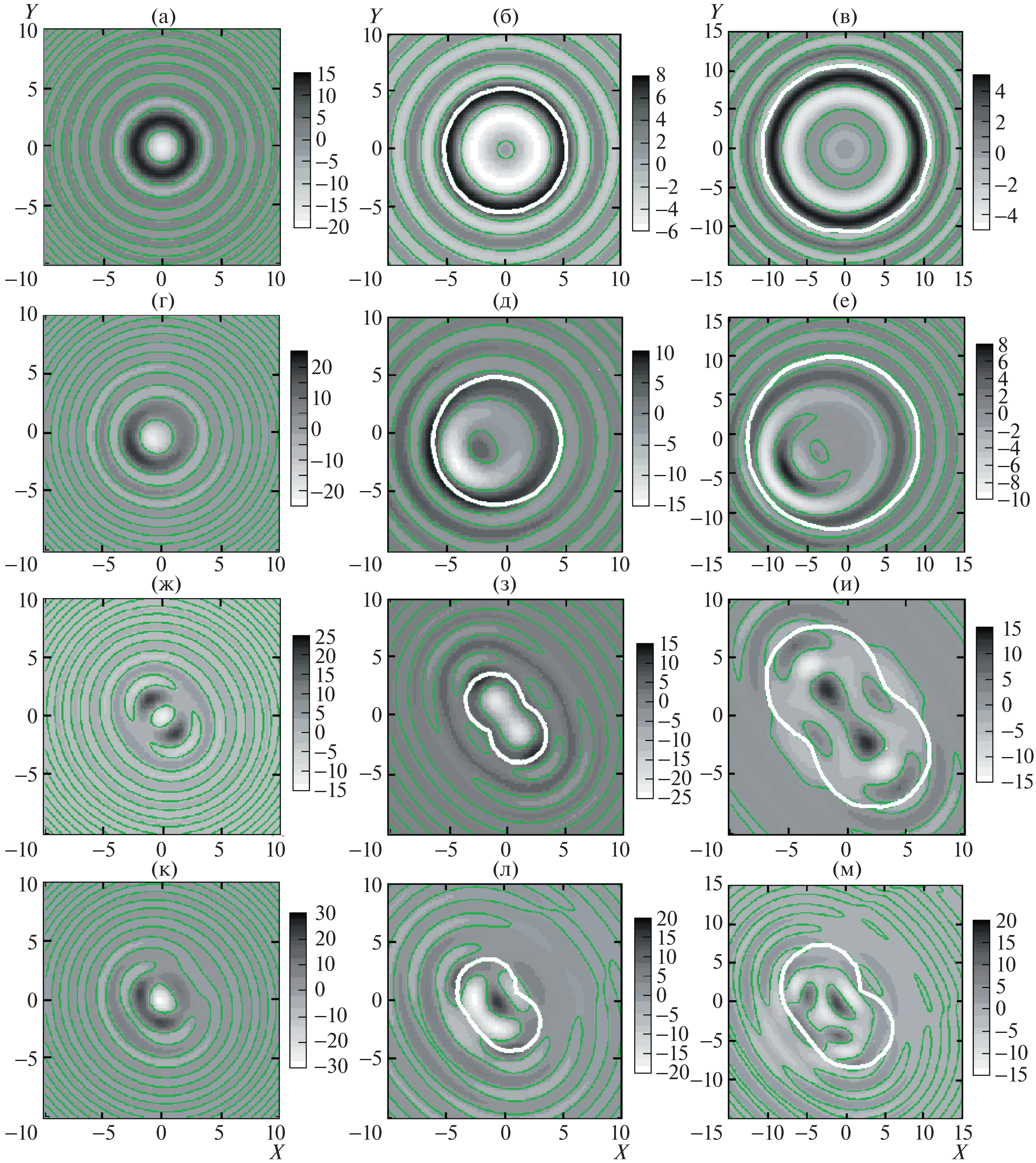

Рис. 4. Волновые картины вертикальных прогибов ледяного покрова для трех моментов времени: $t = 2$ (а, г, ж, к); $t = 5$ (б,д,з,л); $t = 10$ (в, е, и, м). Палитра справа показывает значения функции $10^2 \cdot \eta(X,Y,t)$. Исходные параметры представлены в табл. 1: вариант 1 (а, б, в); вариант 2 (г, д, е); вариант 3 (ж, з, и); вариант 4 (к, л, м). Тонкие линии соответствуют нулевым изолиниям функции $\eta(X,Y,t)$. Замкнутая кривая, показанная жирной линией белого цвета, соответствует волновому фронту ИГВ.

На рис. 4 представлены двумерные картины вертикальных прогибов ледяного покрова $10^2 \cdot \eta(X,Y,t)$ для трех моментов времени: $t = 2$ (рис. 4а, г, ж, к); $t = 5$ (рис. 4б, д, з, л); $t = 10$ (рис. 4в, е, и, м). Тонкие линии соответствуют нулевым изолиниям функции $\eta(X,Y,t)$. Для варианта 1 картина волнового движения является осесимметричной и соответствует решению (1.16), так как для этого варианта отсутствуют сжимающие усилия в ледяном покрове и жидкость является первоначально покоящейся. Во всех остальных рассмотренных вариантах волновое движение не является осесимметричным. Для значений времени $t = 5$ и $t = 10$ замкнутая кривая, показанная жирной линией белого цвета, соответствует волновому фронту ИГВ, который определяется как произведение $tc(K, \theta)$ аналогично [6]. Значение фазовой скорости в (2.3) вычисляется для волнового числа $K = 2\sqrt{b}$, при котором степень в экспоненциальном множителе подынтегрального выражения в (1.13) равна –1, и значение θ меняется от 0 до 2π. При отсутствии неравномерных сжимающих усилий в ледяном покрове (варианты 1 и 2) волновой фронт представляет собой окружность, координаты центра которой и радиус зависят от параметров α и β сдвигового потока.

При наличии неравномерного сжатия в ледяном покрове (варианты 3, 4) форма волнового фронта становится более сложной, так как она определяется совместным влиянием сжимающих усилий и сдвигового потока. Для рассмотренных четырех вариантов наименьшие волновые возмущения наблюдаются для варианта 1, а наибольшие – для варианта 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена нестационарная трехмерная задача о развитии начального осесимметричного возмущения в жидкости конечной глубины, на поверхности которой плавает ледяной покров. В невозмущенном состоянии продольная и поперечная составляющие скорости жидкости линейно меняются с глубиной. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной с учетом продольных, поперечных и сдвиговых сжимающих усилий.

В рамках линейной теории волн построено интегральное представление решения, описывающего поведение ледяного покрова. Показано, что наличие сжимающих усилий в ледяном покрове и сдвигового течения в жидкости существенно влияет на поведение вертикальных прогибов ледяного покрова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Squire V.A.* Synergies between VLFS hydroelasticity and sea ice research// Intern. J. Offshore Polar Engng. 2008. V. 18. № 4. P. 241–253.
2. *Букатов А.Е.* Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ. 2017. 360 с.
3. *Букатов А.Е., Власенко В.И., Пухтяр Л.Д., Суворов А.М. и др.* Динамика поверхностных и внутренних волн. Киев: Наук. думка. 1988. 192 с.
4. *Li Y., Smeltzer B.K., Ellingsen S.Å.* Transient wave resistance upon a real shear current // Eur. J. Mech. B / Fluids. 2019. V. 73. P. 180–192.
https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2017.08.012
5. *Стурова И.В.* Задача Коши–Пуассона для жидкости с ледяным покровом при наличии сдвигового течения (двумерный случай) // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 1. С. 1–10.
https://doi.org/10.31857/S0568528122010108
6. *Ellingsen S.Å.* Initial surface disturbance on a shear current: the Cauchy–Poisson problem with a twist // Phys. Fluids. 2014. V. 26. № 8. P. 082104.
https://doi.org/10.1063/1.4891640
7. *Букатов А.Е., Жарков В.В., Завьялов Д.Д.* Трехмерные изгибно-гравитационные волны при неравномерном сжатии// ПМТФ. 1991. № 6. С. 51–57.
8. *Стурова И.В.* Влияние неравномерного сжатия упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости, на развитие нестационарных изгибно-гравитационных волн // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 2. С. 63–71.
https://doi.org/10.31857/S0568528121020110
9. *Maiti P., Mandal B.N.* Water waves generated due to initial axisymmetric disturbances in water with an ice-cover // Arch. Appl. Mech. 2005. V. 74. № 9. P. 629–636.
https://doi.org/10.1007/s00419-005-0384-7
10. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Владимиров И.Ю.* Равномерные и неравномерные асимптотики дальних полей поверхностных волн от вспыхнувшего локализованного источника// ПММ. 2021. Т. 85. № 5. С. 626–634.
https://doi.org/10.31857/S0032823521050039