ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 4, с. 86–95

УДК 533.6.011

ПЛОСКИЕ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЛА, ОБТЕКАЕМЫЕ С НАИБОЛЬШИМИ “КРИТИЧЕСКИМИ” ЧИСЛАМИ МАХА

© 2022 г. А. Н. Крайко[a,*], В. А. Шаповалов[a]

[a] Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, Москва, Россия

*E-mail: akraiko@ciam.ru

Поступила в редакцию 10.03.2022 г.
После доработки 15.03.2022 г.
Принята к публикации 15.03.2022 г.

Строятся двумерные (плоские и осесимметричные) тела, которые при ряде дополнительных ограничений обтекаются идеальным (невязким и нетеплопроводным) газом с наибольшими “критическими” числами Маха M*. Если число Маха набегающего потока $M_0 < M^*$, то во всем потоке, включая обтекаемые поверхности, $M < 1$, отсутствуют ударные волны и, как следствие, равно нулю волновое сопротивление. При $M_0 = M^*$ равенство $M = 1$ выполняется хотя бы в одной точке потока, а при $M_0 > M^*$ появляются сверхзвуковые зоны, в общем случае с образованием ударных волн и волновым сопротивлением, растущим с ростом M_0. Как известно, максимальные M* реализуют двумерные конфигурации, при обтекании которых потоком с $M_0 = M^*$ часть их контуров – отрезки звуковых линий тока. Тривиальными примерами таких конфигураций служат не возмущающие течение пластина под нулевым углом атаки и отрезок прямой (“осесимметричная игла”) в равномерном потоке с $M \equiv M_0 \equiv M^* \equiv 1$. Отнесенная к квадрату фиксированной хорды площадь их продольного сечения $S = 0$. Если в дополнение к длине хорды задать площадь $S > 0$, то критические контуры таких тел составят передний и задний торцы и соединяющие их без изломов верхняя и симметричная нижняя звуковые линии тока. При $S \to 0$ высота торцов стремится к нулю, M_0 и M* стремятся к единице и получаются тривиальные решения. Чтобы при $S > 0$ избавиться от практически неизбежных отрывов за телами, построенными в предположении безотрывного обтекания, вводится ограничение на величину угла наклона контуров их кормовых частей. В результате вместо задних торцов появляются наклонные прямолинейные отрезки, и плоская критическая конфигурация становится симметричным профилем крыла. При принципиальной простоте структуры двумерных критических конфигураций известные методы их построения весьма сложны. Численные “инструменты”, примененные в данном исследовании, оказались более простыми. В их основе лежат генетический алгоритм “прямой” оптимизации с представлением искомых отрезков звуковых линий тока кривыми Бернштейна–Безье и процедура установления с интегрированием уравнений течения идеального газа модифицированной схемой Годунова повышенного (на гладких решениях) порядка аппроксимации. Ранее эти инструменты развивались и применялись авторами и их коллегами при построении широкого круга оптимальных аэродинамических форм.

Ключевые слова: плоские и осесимметричные тела, обтекаемые с наибольшими критическими числами Маха, отрезки звуковых линий тока, кривые Бернштейна–Безье, прямые методы оптимизации, генетический алгоритм

DOI: 10.31857/S0568528122040077

Наличие отрезков звуковых линий тока в контурах симметричных профилей и тел вращения, обтекаемых под нулевым углом атаки равномерным безграничным набегающим потоком идеального газа с наибольшими критическими числами Маха набегающего потока $M_0 = M^* < 1$, установлено в [1]. Последующие обобщения [2] на тела в цилиндрических каналах и в решетках, на контуры с отрезками горизонталей и даже с конечными областями поступательного звукового потока не столь принципиальны. Поскольку при числах Маха набегающего потока $M_0 \le M^*$ эти тела не имеют волнового сопротивления, то их естественно называть и “критическими”, и “оптимальными”. Анализ обтекания таких тел [1, 2] включал доказательство и применение “свойства прямолинейности” звуковых линий (“линий перехода”), отличных от звуковых линий тока,

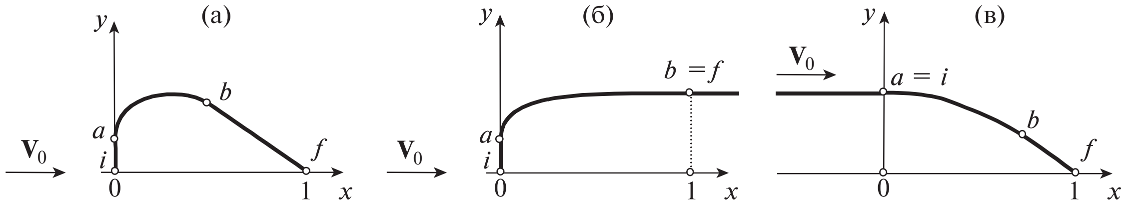

Рис. 1. Структура оптимальных по М* контуров: симметричного профиля или тела вращения (а), головной (б) и кормовой (в) частей; ab – отрезки звуковых (при $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}^*$) линий тока.

“теорем сравнения” и “принципа максимума” для дозвуковых течений. Как и в [1, 2], под “дозвуковыми” здесь и далее понимаются течения, в которых $\mathrm{M} \le 1$.

Построенные в [3–10] примеры оптимальных тел в безграничном равномерном дозвуковом набегающем потоке включают симметричные профили и замкнутые тела вращения, обтекаемые под нулевым углом атаки, а также головные или кормовые части полубесконечных пластины и кругового цилиндра. Для их построения в [3–10] созданы численно-аналитические инструменты с неизменно весьма сложными аналитическими составляющими. В этом отношении подход, возможности которого иллюстрируют приводимые ниже примеры, намного проще. В его основе прямой метод оптимального профилирования с численным решением “установлением” уравнений Эйлера, описывающих дозвуковое обтекание идеальным газом искомых плоских и осесимметричных тел, представление выпуклых звуковых участков их контуров кривыми Бернштейна–Безье (КББ) и нахождение оптимальных КББ с помощью генетического алгоритма. При этом в задачах оптимального профилирования минимизируется интеграл по выпуклому участку контура от $(p - p_*)^2$ – квадрата разности давления p и его известной (см. ниже) “критической” величины p_*, отвечающей $\mathrm{M} = 1$. У оптимальных тел выпуклые участки – отрезки звуковых линий тока и этот интеграл или сумма интегралов, если таких участков несколько, равен нулю.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО М* ДВУМЕРНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ И ИХ ОСОБЕННОСТИ

Несколько плоских и осесимметричных оптимальных тел, обтекаемых равномерным набегающим потоком идеального газа с наибольшими критическими числами Маха М*, изображены на рис. 1. Это – обтекаемые под нулевым углом атаки симметричный профиль или тело вращения (а) и головная (б) и кормовая (в) части полубесконечных пластины или кругового цилиндра (далее – “головные или кормовые части”). Во всех примерах ось x декартовых или цилиндрических координат xy направлена по скорости $\mathbf{V}_0$ набегающего потока и совмещена с осью или плоскостью симметрии оптимальных тел. Начало координат и линейный масштаб выбраны так, что, если не оговорено особо, то $0 \le x \le 1$.

При построении оптимальных по М* конфигураций наряду с заданием длины, принятой за линейный масштаб, ставятся дополнительные условия. Для головных и кормовых частей естественно задаются ординаты точек гладкой стыковки искомого контура $y = y(x)$, $0 \le x \le 1$ с горизонтальной образующей пластины или кругового цилиндра (y_f и y_i на рис. 1б и 1в, индексы i, f, ... метят переменные в точках i, f, ...). Возможны и иные ограничения, например,

$$\frac{dy}{dx} \equiv \mathrm{tg}\theta \ge \mathrm{tg}\theta_{\mathrm{m}}, \quad S \equiv \int_i^f y dx \ge S_{\mathrm{m}}, \quad y \le y^{\mathrm{m}} \tag{1.1}$$

с заданными константами $\theta_{\mathrm{m}} < 0$, $S_{\mathrm{m}} > 0$ и y^{m}.

Как уже отмечалось, первое ограничение (1.1), вводимое, в первую очередь, для профилей, тел вращения (рис. 1а) и кормовых частей (рис. 1в), приводит к появлению у них наклонных прямолинейных участков $dy/dx = \mathrm{tg}\theta_{\mathrm{m}}$, заканчивающихся в точке $x = 1$, $y = 0$. Ограничение на площадь “продольного” сечения S, введенное еще в [1], привело к появлению в искомом контуре выпуклого участка – отрезка звуковой линии тока, на котором $\mathrm{M} = 1$ и $p = p_*$. У оптимальных головных и кормовых частей выпуклые отрезки звуковых линий тока появляются без этого условия. Получающаяся при этом площадь продольного сечения $S = S^0(l, \theta_{\mathrm{m}})$ – функция удлинения l, равного

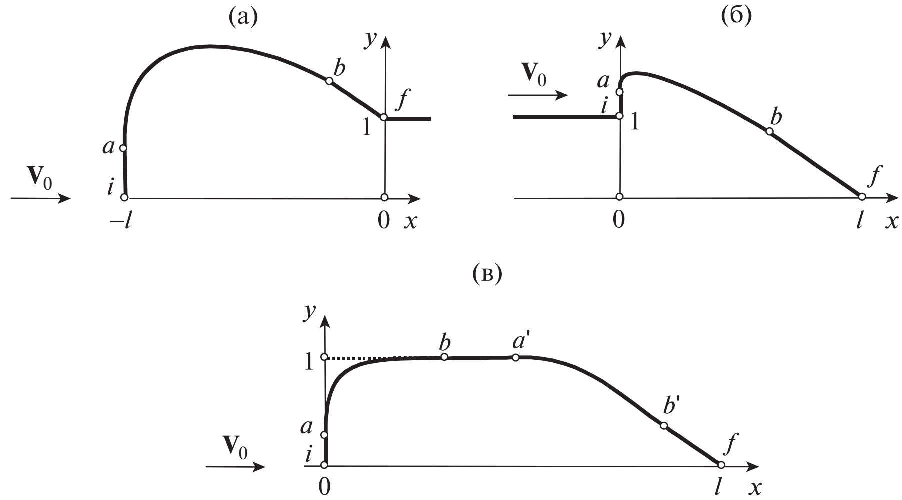

Рис. 2. Возможные оптимальные по M* при ограничениях (1.1) контуры: головной (а) и кормовой (б) частей и профиля или тела вращения (в); *ab* и *a*'*b*' – отрезки звуковых (при M_0 = M*) линий тока.

отношению длины к y_f или y_i, и θ_m. Ограничение площади S влияет на форму оптимальной головной или кормовой части и на величину M* при S_m, превышающих $S^0(l, \theta_m)$. Для таких S_m у оптимальной головной части также появляется наклонный концевой участок *bf*, на котором (рис. 2а) $dy/dx = \mathrm{tg}\theta_m$, а у оптимальной кормовой части – торец *ia* (рис. 2б). Из-за увеличения их длины здесь за линейный масштаб взята ордината полубесконечной гоизонтальной образующей.

Ограничение на максимально допустимую ординату – третье условие (1.1), вводимое в дополнение к двум первым, также начинает работать не сразу, а лишь тогда, когда растущая с увеличением S_m максимальная ордината оптимального контура на рис. 1а, 2а или 2б превзойдет y^m. При таких S_m один звуковой отрезок (*ab* на рис. 1а) оптимального контура заменят два выпуклых звуковых отрезка (*ab* и *a*'*b*' на рис. 2в) и горизонтальный дозвуковой $y = y^m$ между ними (*ba*' на рис. 2в). При появлении горизонтального участка у профиля или тела вращения за линейный масштаб берется его ордината (рис. 2в). Если при построении оптимальной головной части (рис. 1б) заданное $y^m = y_f$, то при $S_m > S^0$ наряду с единственным звуковым участком *ab* появляется дозвуковой (M < 1) горизонтальный участок *bf* с $y = y^m$. Если $y^m = y_i$, то аналогичная ситуация возникает при построении оптимальной кормовой части.

При гладкой стыковке всех участков оптимальных образующих (непрерывности угла наклона касательной к ним θ) кривизна звуковых участков в их концевых точках обращается в бесконечность [7–11]. При приближении к этим точкам по отрезкам θ = const бесконечны производные p и V, а при приближении по нормали к контуру – производные всех параметров [11].

Сказанное выше о структуре изображенных на рис. 1 и на рис. 2 оптимальных конфигураций либо установлено в [1, 2], либо получается с привлечением сформулированных и доказанных в этих работах утверждений, справедливых для названных дозвуковыми течений, в которых M ≤ 1. Не вдаваясь в подробности, перечислим указанные утверждения. Первое из них – свойство прямолинейности звуковых линий, отличных от звуковых линий тока, отрезки которых при безграничном набегающем потоке с M_0 = M* < 1 формируют оптимальные контуры. Второе утверждение – принцип максимума. Согласно ему в таких течениях число Маха может достигать своего максимального значения M = 1 только на обтекаемых контурах. Свойство прямолинейности звуковых линий тока и принцип максимума справедливы и при дозвуковом (с M ≤ 1) обтекании несимметричных профилей. Однако для них доказать ключевые (при выяснении структуры оптимальных тел рис. 1 и 2) утверждения, названные в [1] "теоремой сравнения" и "леммой граничной точки", не удалось.

2. ПРЯМОЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ, ОБТЕКАЕМЫХ ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ С НАИБОЛЬШИМИ КРИТИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ МАХА

Как уже отмечалось, в применяемом далее прямом методе минимизируется интеграл по звуковому для оптимального тела выпуклому участку контура

$$I = \int_a^b (p - p_*)^2 d\xi. \tag{2.1}$$

Здесь ξ – расстояние, отсчитываемое вдоль контура, p_* – отвечающее M = 1 критическое давление. Далее за масштабы плотности и скорости взяты их размерные (с индексом "градус") критические величины ρ_*° и a_*°, а давление отнесено к $\rho_*^\circ a_*^{\circ 2}$. При этом для совершенного газа с постоянными теплоемкостями и их отношением (показателем адиабаты) γ безразмерное $p_* = 1/\gamma$.

Наряду с равным нулю для оптимальных контуров функционалом I ниже вычисляются коэффициент волнового сопротивления c_x и площадь или объем

$$c_x = \frac{2}{\rho_0 V_0^2}\int_i^f (p - p_0) dy^\nu, \quad S = \int_i^f y^\nu dx \tag{2.2}$$

с $\nu = 1$ и 2 для плоских и осесимметричных конфигураций. Для совершенного газа входящие в формулу для c_x в (2.2) $\rho_0 V_0^2$ и давление газа в набегающем потоке p_0 – функции его числа Маха

$$V_0^2 = \frac{(\gamma+1)\mathrm{M}_0^2}{2 + (\gamma-1)\mathrm{M}_0^2}, \quad p_0 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2}V_0^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \rho_0 V_0^2 = \gamma p_0 \mathrm{M}_0^2.$$

Выпуклые участки искомых оптимальных контуров аппроксимировались кривыми Бернштейна–Безье (КББ). КББ задается параметрически [12]

$$P(t) = \sum_{k=0}^K B_k^K(t) P_k, \quad B_k^K(t) = \frac{K!}{k!(K-k)!} t^k (1-t)^{K-k}, \quad t \in [0,1]. \tag{2.3}$$

Здесь P – координаты КББ x и y, t – параметр, $B_k^K(t)$ – полиномы Бернштейна, а P_k – координаты концов (контрольных точек) отрезков ломаной ("полигона"). В общем случае КББ проходит лишь через крайние контрольные точки, касаясь в них соответствующего отрезка полигона. Важное достоинство КББ – линейная зависимость ее координат от координат P_k контрольных точек.

Как КББ представляет выпуклый звуковой (при $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}^*$) отрезок образующей симметричного профиля, демонстрирует рис. 3 с тремя первыми контрольными точками (*0–2*) на оси y и тремя последними (*6–8*) на продолжении прямого отрезка bf и с многократно увеличенной (для наглядности) ординатой. Такое расположение точек *0–2* и *6–8* обеспечивает гладкую стыковку искомого звукового участка контура с передним торцом и с приходящим в точку f прямым концевым отрезком $dy/dx = \mathrm{tg}\theta_\mathrm{m}$.

В рассчитанных далее примерах абсциссы K контрольных точек кроме предпоследней (x_{K-1}), фиксировались. При построении оптимальных профилей у первых трех точек они, как на рис. 3, были нулевыми, а у точек с k от 3 до (K – 2) задавались формулой $x_k = 0.85(k-2)/(K-3)$. Это обеспечивало равномерное разбиение ими отрезка оси x от $x_a = 0$ до $x_K = x_b = 0.85$ – абсциссы точки b, заданной вместо θ_m и S_m, которые находились в процессе оптимизации. Предпоследняя контрольная точка с изменяющейся координатой x_{K-1} лежит на наклонной прямой с $dy/dx = \mathrm{tg}\theta_\mathrm{m}$ между (K – 2)-й и K-й точками. Поэтому в процессе счета справедливы неравенства: $0.85(K-4)/(K-3) < x_{K-1} < 0.85$.

При построении оптимальных головных частей первые три контрольные точки также были на оси y; у последней точки (b) $x_K = 1$; ординаты трех последних контрольных точек $y_k = y_b = 1/l$ при $k = K-2$, $K-1$, K, реализуя плавную стыковку с полубесконечной горизонтальной образующей, а абсциссы точек с k от 3 до $K-1$ находились в процессе оптимизации (были "свободными").

Все оптимальные профили и головные части строились прямым методом, который ранее развивался и применялся при профилировании оптимальных форм в до-, транс- и сверхзвуковых потоках в [12–17]. При этом оптимальные параметры КББ – оставшиеся не заданными ("свобод-

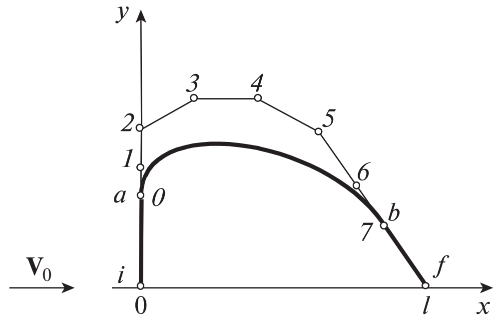

Рис. 3. К построению полигона КББ, задающего выпуклый участок оптимального контура; *0*–*7* – контрольные точки полигона.

ными") координаты контрольных точек, обеспечивающие близкие к нулю значения введенных в (2.1) и (2.2) функционалов I и c_x, находил двухкритериальный "генетический алгоритм (ГА)". В нем наряду с I при заданном M_0 у профиля минимизировался c_x, а у головной части – удлинение $l = 1/y_f$.

В ГА "начальную популяцию" контуров создает случайный выбор свободных параметров. Из них отбираются "решения-родители", такие, что среди всех оставшихся нет лучших по обоим критериям. Решения-родители образуют "Парето-оптимальный фронт" – совокупность лучших из всех построенных по этим критериям решений. Новые контуры генерирует вариация ("мутация") параметров случайно выбранного родителя. Для более близкого приближения решения к оптимальному в процессе оптимизации амплитуда мутаций постепенно уменьшается.

Величины I и c_x при стационарном обтекании каждого сгенерированного ГА профиля и головной части находились установлением по времени при численном решении уравнений течения идеального газа ("уравнений Эйлера"). Записанные в дивергентной форме нестационарные уравнения Эйлера интегрировались схемой Годунова [18] повышенного согласно [19, 20] порядка аппроксимации (на гладких решениях). В плоскости xy расчет велся в области, ограниченной окружностью: для профилей $r \equiv (x^2 + y^2)^{1/2} = 15$, а для головных частей $r = 100y_f$ с параметрами невозмущенного потока в примыкающем к окружности слое "вспомогательных" ячеек [21]. Ячейки разностной сетки, адаптированной к обтекаемым телам, увеличивались линейно по r. Чтобы избежать связанного с этим роста времени установления, интегрирование уравнений велось по неявной схеме [22] с числом Куранта cu = 10–20. Расчеты, выполненные с увеличением r и числа ячеек разностной сетки N, показали, что в представляемых ниже примерах $r = 15$ и $N = 6.2 \times 10^3$ для профилей и $r = 100y_f$ и $N = 6.4 \times 10^3$ для головных частей обеспечивали необходимую точность результатов. При таких r и N для профиля время 2780 прямых расчетов составило 85 ядрочасов, а для головной части время 10^3 прямых расчетов – около 70 ядрочасов.

3. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО М* ПРОФИЛЕЙ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ГОЛОВНЫХ ЧАСТЕЙ

Все расчеты выполнены для $\gamma = 7/5 = 1.4$ с заданием выпуклых звуковых участков симметричных профилей кривыми Бернштейна–Безье 11-го порядка ($K = 11$), а головных частей – КББ 5-го порядка ($K = 5$). При представлении полей параметров координаты x и y будем относить к хорде профиля, а для головных частей – к радиусу цилиндра.

В табл. 1 собраны координаты контрольных точек полигона КББ, которая определила форму оптимального звукового участка симметричного профиля, реализовавшего наибольшее число

Таблица 1. Координаты контрольных точек полигона КББ профиля

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_k	0	0	0	0.106	0.212	0.318	0.421	0.53	0.636	0.744	0.842	0.85
$y_k \times 10^4$	137	142	367	485	521	526	618	548	519	463	349	332

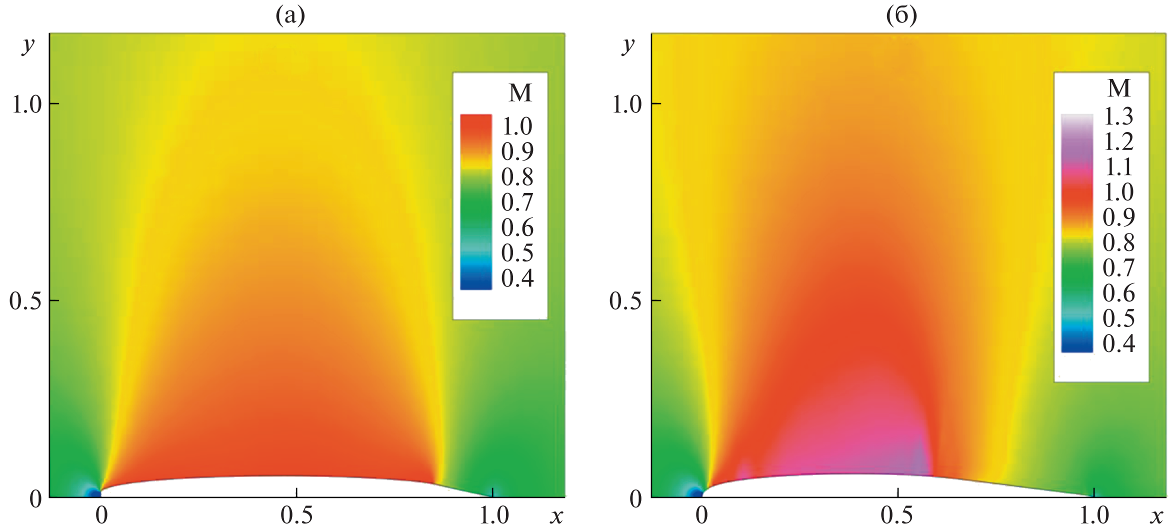

Рис. 4. Поля чисел Маха над профилями: оптимальным по $M^* = 0.8$ при $\mathrm{tg}\theta_m = -0.22$ и $S_m = 0.04212$ (а) и NACA0012 с $S = 0.04208$ (б) в набегающем потоке с $M_0 = 0.8$.

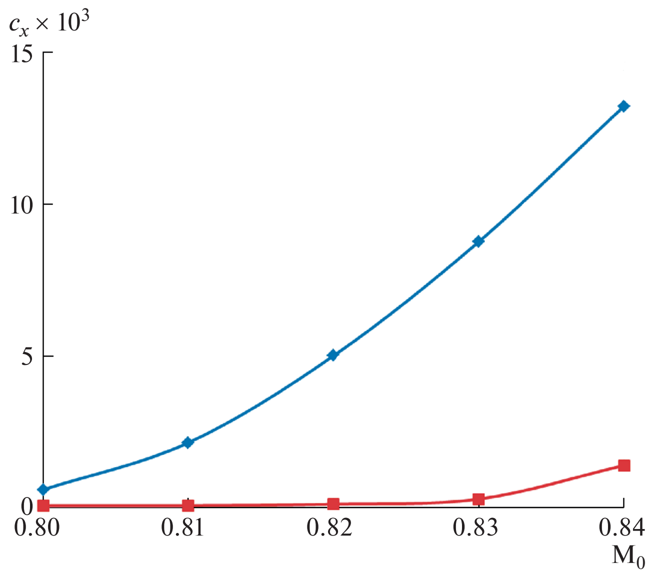

Рис. 5. Рост c_x с увеличением M_0 профилей: оптимального по $M^* = 0.8$ (нижняя кривая) и NACA0012 (верхняя кривая).

Маха набегающего потока $M_0 = M^* = 0.8$ при $\mathrm{tg}\theta_m = -0.22$ и $S_m = 0.04212$. Максимальное число Маха, получившееся в расчете на этом участке $M^m = 1.005$, а коэффициент волнового сопротивления $c_x = 6 \times 10^{-5}$. Столь малая величина c_x – свидетельство высокой точности счета. Обратим внимание на близость точки с $k = 1$ к точке с $k = 0$ и точки с $k = K - 1$ к точке с $k = K$. Отмеченная близость отражает стремление ГА с КББ увеличить кривизну звукового контура при приближении к его начальной и конечной точкам. Из-за того, что в параметрическое представление КББ (2.3) входят только положительные целочисленные степени t и $(1 - t)$, кривизна найденных звуковых участков не может стать бесконечной, как требуется согласно [7–11]. Тем не менее она при фиксированном порядке КББ возрастает максимально возможно.

На рис. 4а показано поле чисел Маха вблизи оптимального профиля, а на рис. 4б – вблизи симметричного профиля NACA0012 практически той же площади $S = 0.04208$ при набегающем потоке с $M_0 = 0.8$. При на порядок большем $c_x = 5.9 \times 10^{-4}$ в таком набегающем потоке его сопротивление с ростом M_0 растет намного быстрее, чем у оптимального профиля (верхняя и нижняя кривые на рис. 5 с $c_x = 0.0132$ и 0.00138 при $M_0 = 0.84$). Здесь и ниже значки – результаты расчета,

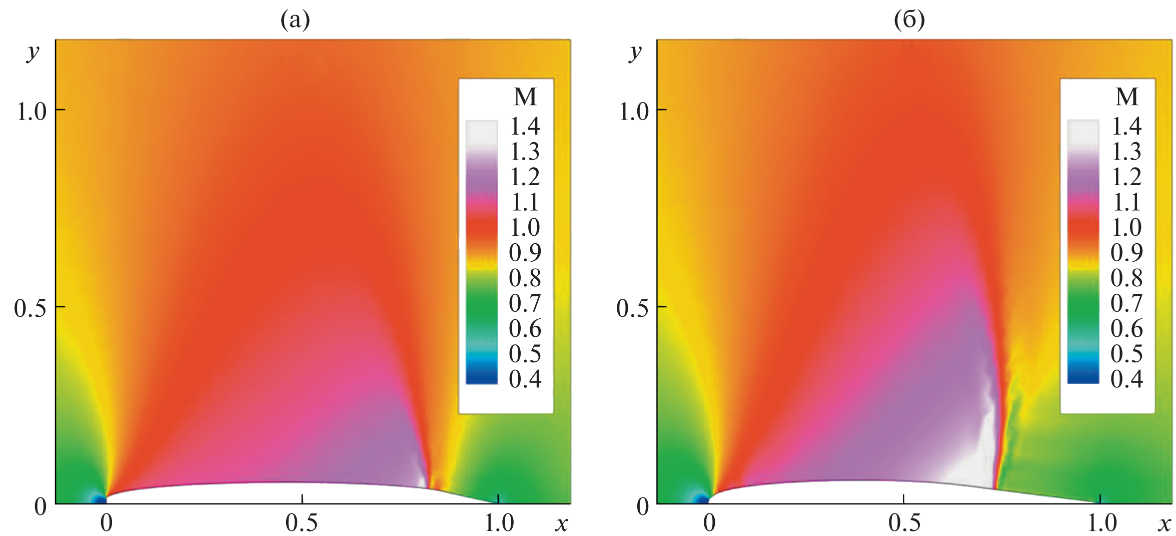

Рис. 6. Поля чисел Маха над профилями: оптимальным по M* = 0.8 (а) и NACA0012 (б) в набегающем потоке с $M_0 = 0.84$.

соединенные гладкими кривыми. Поля чисел Маха вблизи этих профилей при $M_0 = 0.84$ представлены на рис. 6.

В табл. 2 приведены координаты контрольных точек полигонов КББ, которые определили форму оптимальных звуковых участков осесимметричных головных частей, реализующих наибольшие числа Маха набегающего потока $M_0 = M^* = 0.8$, 0.9 и 0.96 при удлинениях $l = x_b/y_b = x_5/y_5 = x_5$. Как и у оптимального профиля, близость координат точек с $k = 0$ и 1 и с $k = 4$ и 5 при $K = 5$ и с $k = 5$ и 6 при $K = 6$ демонстрирует стремление метода максимально возможно увеличить кривизну построенных контуров в начальной и конечной точках их звуковых участков. Величины c_x и I у оптимальных головных частей получились в 20–40 раз больше, чем у оптимального профиля. Тем не менее во всех примерах они не превышают 5×10^{-3}. Почти не изменив c_x, повышение порядка КББ при M* = 0.96 заметно повлияло лишь на отличие от звуковой скорости газа на выпуклом участке контура (см. ниже).

Поля чисел Маха вблизи оптимальных по M* осесимметричных головных частей в набегающих потоках с $M_0 = M^*$ представлены на рис. 7. Сечения стыковки их контуров и горизонтальных образующих цилиндров даны вертикальными отрезками. Максимальные значения числа Маха M^m,

Таблица 2. Координаты контрольных точек полигонов КББ головных частей

$M_0 = M^*$	k	0	1	2	3	4	5	6	$c_x \times 10^3$	$I \times 10^3$
0.8	x_k	0	0	0	0.640	1.565	1.567		2.33	4.71
	y_k	0.5613	0.5618	0.764	1	1	1			
0.9	x_k	0	0	0	1.678	3.38	3.57		1.41	4.29
	y_k	0.3982	0.4020	0.747	1	1	1			
0.96	x_k	0	0	0	0.265	7.52	7.89		1.10	3.77
	y_k	0.2606	0.2645	0.374	1	1	1			
0.96	x_k	0	0	0	3.625	7.25	7.82	8.02	1.09	2.85
	y_k	0.2548	0.2637	0.777	0.992	1	1	1		

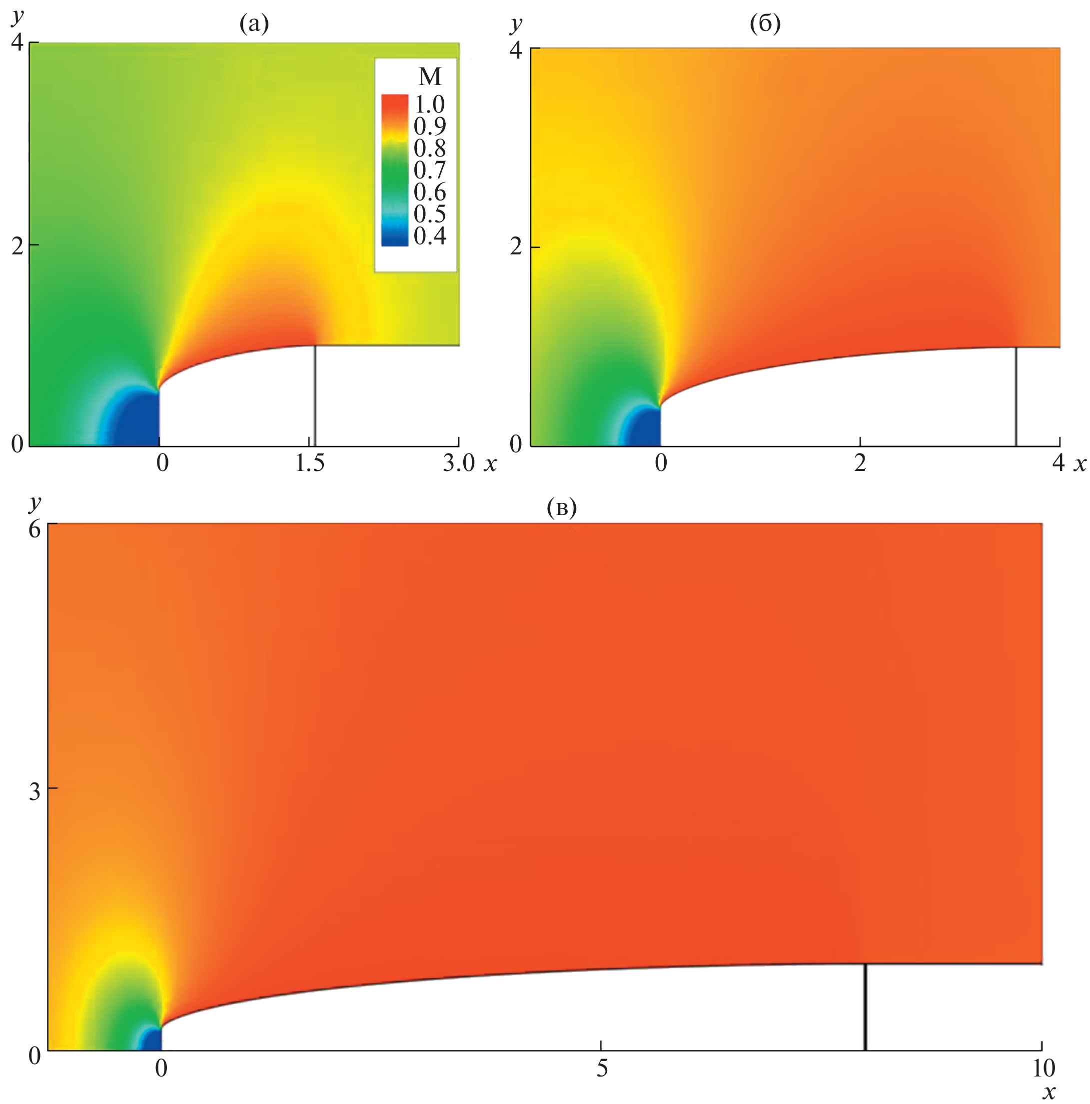

Рис. 7. Поля чисел Маха при $M_0 = M^*$ вблизи оптимальных головных частей трех удлинений: $l = 1.567$, $M^* = 0.8$, $M^m = 1.002$ (а); $l = 3.57$, $M^* = 0.9$, $M^m = 1.0001$ (б) и $l = 7.89$, $M^* = 0.96$, $M^m = 1.027$ при $K = 5$ и 1.002 при $K = 6$ (в).

которые во всех рассчитанных примерах получались на выпуклых участках контура, указаны в подписи к рис. 7.

С ростом $M_0 > M^*$ волновое сопротивление оптимальных по M^* головных частей растет. Монотонное увеличение c_x оптимальной головной части с $M^* = 0.8$ демонстрирует на рис. 8 кривая *1*. Кривая *2* дает $c_x = c_x(M_0)$ головной части [23], реализующей минимум полного сопротивления при том же удлинении $l = 1.567$ в потоке с $M_0 = 0.9$. В нем c_x головной части [23] естественно меньше c_x головной части, оптимальной по $M^* = 0.8$. Намного лучше, однако, она только в малой окрестности $M_0 = 0.9$, которая начинается с $M_0 > 0.88$. При $M_0 = 0.9$ волновое сопротивление головной части [23] меньше в 3.6 раза, а уже при $M_0 = 0.93$ – лишь в 1.3 раза.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При существенном упрощении по сравнению с [3–10] процедуры построения оптимальных по M^* конфигураций авторам не удалось расширить их круг в направлении построения пусть не оптимальных, но хотя бы близких к оптимальным несущих профилей. В итоге ставшие легко до-

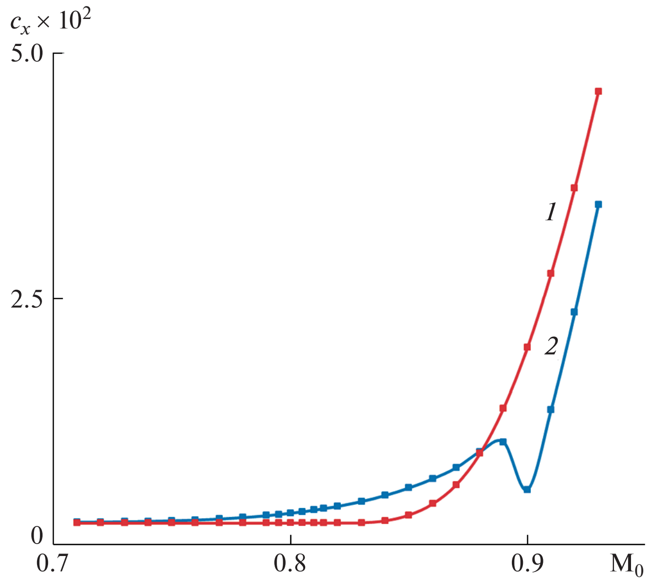

Рис. 8. Зависимость c_x от M_0 головных частей удлинения $l = 1.567$: *1* – оптимальной по $M^* = 0.8$ и *2* – минимального полного сопротивления при $M_0 = 0.9$, построенной в [23].

ступными оптимальные по M* конфигурации по-прежнему ограничены симметричными профилями, телами вращения и головными и кормовыми частями при том, что все они обтекаются только под нулевым углом атаки. Тем не менее хочется верить, что легкость проб поможет найти структуру принципиально иных оптимальных по M* двумерных конфигураций.

Авторы благодарны К.С. Пьянкову за предоставленные программы, консультации и обсуждения и С.А. Таковицкому – за информацию о головных частях минимального сопротивления.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов № 19-01-00671 и 20-01-00100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gilbarg D., Shiffman M.* On Bodies Achieving Extreme Values of the Critical Mach Number. I // J. Ration. Mech. and Analysis. 1954. V. 3. № 2. P. 209–230.
2. *Крайко А.Н.* Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 941–950.
3. *Fisher D.D.* Calculation of Subsonic Cavities with Sonic Free Streamlines // J. Math. Phys. 1963. V. 42. № 1. P. 14–26.
4. *Брутян М.А., Ляпунов С.В.* Оптимизация формы симметричных плоских тел с целью увеличения критического числа Маха // Учен. зап. ЦАГИ. 1981. Т. 12. № 5. С. 10–22.
5. *Щербаков С.А.* Расчет головной или кормовой части плоского тела, обтекаемого дозвуковым потоком с максимально возможным критическим числом Маха // Учен. зап. ЦАГИ. 1988. Т. 19. № 4. С. 10–18.
6. *Schwendeman D.W., Kropinski M.C.A., Cole J.D.* On the Construction and Calculation of Optimal Nonlifting Critical Airfoils // ZAMP. 1993. Bd 44. P. 556–571.
7. *Зигангареева Л.М., Киселев О.М.* О расчете кавитационного обтекания кругового конуса дозвуковым потоком сжимаемой жидкости // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 93–107.
8. *Зигангареева Л.М., Киселев О.М.* Отрывное обтекание диска идеальным газом и тела с наибольшими критическими числами Маха // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 3. С. 166–172.
9. *Зигангареева Л.М., Киселев О.М.* О полубесконечных телах вращения, обтекаемых с максимальным критическим числом Маха // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 97–107.
10. *Зигангареева Л.М., Киселев О.М.* О плоских конфигурациях, обтекаемых потоком идеального газа с максимальным критическим числом Маха // ПМТФ. 1998. № 5. С. 106–115.
11. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И.* О кривизне граничных линий тока течений идеального газа в точках схода и присоединения // ПММ. 2022. Т. 96. Вып. 3.
12. *Крайко А.Н.* Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: Торус пресс, 2010. 440 с.

13. *Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Многокритериальная многодисциплинарная оптимизация лопатки рабочего колеса вентилятора на основе генетического алгоритма // ТВФ. 2010. № 3. С. 58–67.
14. *Крайко А.А., Пьянков К.С., Тилляева Н.И. и др.* Оптимизация биротативного вентилятора с учетом напряженно-деформированного состояния на основе генетического алгоритма // ТВФ. 2014. № 1. С. 22–34.
15. *Крайко А.А., Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Профилирование двусторонних несимметричных плоских сопел максимальной тяги // Изв. РАН МЖГ. 2016. № 1. С. 115–120.
16. *Тилляева Н.И.* Сравнение эффективности штыревых и комбинированных кольцевых сопел // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 4. С. 140–152.
17. *Крайко А.Н., Пьянков К.С., Тилляева Н.И., Шаповалов В.А.* Внутренние скачки уплотнения при сверхзвуковом обтекании контуров оптимальных тел и сопел // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 6. С. 121–138.
18. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
19. *Колган В.П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Учен. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
20. *Тилляева Н.И.* Обобщение модифицированной схемы С.К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки // Учен. зап. ЦАГИ. 1986. Т. 17. № 2. С. 18–26 = Газовая динамика. Избр. В 2-х Т. Изд. 2-е, исправ. Т. 2 / Ред.-составители А.Н. Крайко, А.Б. Ватажин и А.Н. Секундов. М.: Физматлит, 2005. С. 201–210.
21. *Гринь В.Т., Крайко А.Н., Славянов Н.Н.* Решение задачи о запуске сопла, вмонтированного в торец ударной трубы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 6. С. 117–123.
22. *Браилко И.А., Попов Е.Н.* Расчеты стационарных двух- и трехмерных вязких течений в межлопаточных каналах турбин // Тр. НПО Энергомаш им. акад. В.П. Глушко. 2002. № 20. 448 с. С. 4–22.
23. *Мазуров А.П., Таковицкий С.А.* Носовая часть тела вращения с минимальным аэродинамическим сопротивлением в диапазоне больших дозвуковых скоростей // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 1. С. 90–100.