ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 4, с. 52–59

УДК 532.59

КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В СОСУДЕ С ТРЕУГОЛЬНЫМ ОСНОВАНИЕМ

© 2022 г. В. А. Калиниченко

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

E-mail:kalin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 26.01.2022 г.
После доработки 27.02.2022 г.
Принята к публикации 15.03.2022 г.

Обсуждаются результаты экспериментов по возбуждению стоячих поверхностных гравитационных волн в призматическом сосуде с поперечным сечением в виде треугольника. Принципиальным отличием от волновых движений жидкости в прямоугольном сосуде является отсутствие пространственной симметрии профиля максимального развития и увеличение высоты стоячей волны к вершине клиновидного сосуда. Для описания эксперимента используются численно-аналитическая модель длинных волн в сосуде переменной ширины и линейная модель стоячих волн в цилиндре с основанием в виде кругового сектора с малым центральным углом.

Ключевые слова: стоячие волны, параметрический резонанс, основание сосуда, волновой профиль, приближение длинных волн

DOI: 10.31857/S0568528122040053

Задача о стоячих волнах в сосуде с треугольным основанием по постановке близка рассмотрению волн в цилиндрических резервуарах, основание которых представляет собой сектор окружности с малым центральным углом. В 1960-х годах для уменьшения интенсивных колебаний ракетного топлива в цилиндрических баках с круглым основанием была предложена установка диаметральных перегородок, обеспечивших переход к бакам с основанием в виде секторных цилиндрических баков. Собственная частота колебаний жидкости в таких резервуарах увеличивается, а динамические нагрузки на конструкцию снижаются. Ряд экспериментов был посвящен оценке частотного и силового факторов; см., например, [1, 2]. Отметим, что резервуары с углом сектора меньше $\pi/4$ в экспериментах не использовались.

В данной работе экспериментально исследуются гравитационные волны Фарадея в клиновидном сосуде, малый угол при вершине которого составляет $\pi/36$. Сравнение проводится с волнами в прямоугольном сосуде. Отметим, что указанная геометрия ранее использовалась в [3], однако какие-либо количественные оценки не проводились. Рассматриваемые колебания жидкости имеют практическое приложение к явлению сейш в водоемах сложной геометрии [4] и распространению приливных волн в сильно сходящихся руслах [5, 6].

1. ПОСТАНОВКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Эксперименты проводились на электромеханическом вибростенде Динамики и структуры осциллирующих течений [7], входящем в состав Уникальных исследовательских установок “ГФК ИПМех РАН”. Волновые движения исследовались в режиме основного резонанса Фарадея [3, 8], когда частота вертикальных колебаний сосуда вдвое превышает частоту возбуждаемых волн ($\Omega \sim 2\omega$). При фиксированной амплитуде сосуда $s = 0.7$ см вариации Ω обеспечивали возбуждение соответствующей волновой моды номера n и высоты H.

Исследовались третья и четвертая моды ($n = 3, 4$) гравитационных волн в сосудах с прямоугольным основанием 60 × 5.2 см и с основанием в форме удлиненного прямоугольного треугольника с катетами $l = 60$ и $b = 5.2$ см и углом при вершине $\alpha = \pi/36 = 5°$ (рис. 1). Сосуды заполнялись водой до глубины $h = 3.8$–4 см – рис. 1. Отметим значительный капиллярный подъем воды в вершине клина (рис. 1а). Данный эффект [9] характерен для жидкости между двумя вер-

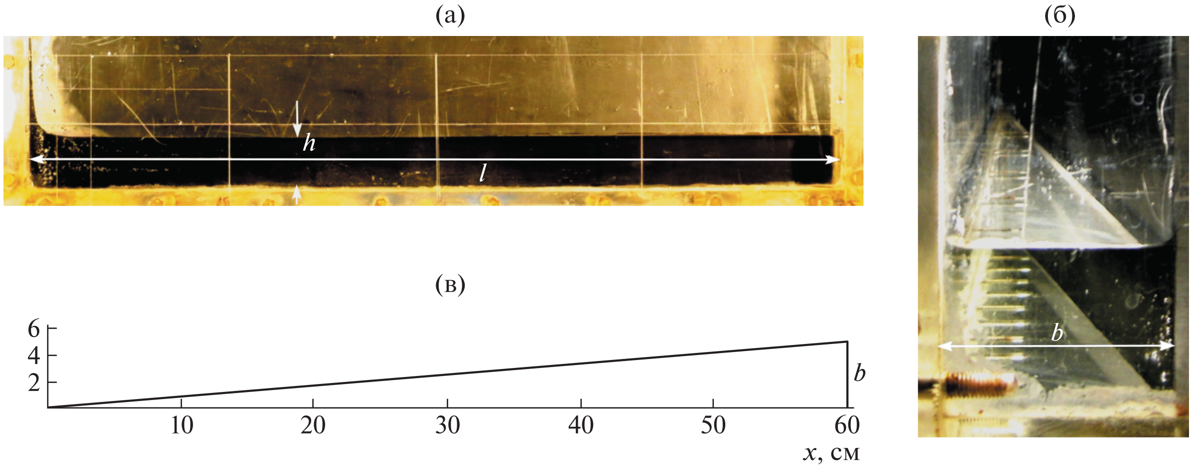

Рис. 1. Сосуд с треугольным основанием – фронтальное изображение (а), вид с торца (б) и в плане (в).

тикальными плоскостями, расположенными под малым углом, и в описываемых экспериментах не исследовался.

Волновая картина регистрировалась цифровой камерой Canon PowerShot SX50HS (скорость видеосъемки 30 и 120 кадров в секунду). Разрешение видеоизображения составляло 0.15 мм/пиксель. Последующая обработка видеокадров производилась при использовании программы ImageJ. Все эксперименты проводились при комнатной температуре 21–22°C.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Рассмотрим сначала двумерные стоячие волны в прямоугольном сосуде – рис. 2. Из анализа профилей (а, б) волн максимального развития следует, что пучности волн не меняют своего положения; узлы совершают малые горизонтальные колебания; ординаты вершин и подошв волн постоянны вдоль сосуда. Таким образом, имеем стоячую регулярную нелинейную волну постоянной высоты.

Используя модель [10, 11] нелинейных поверхностных волн Фарадея в прямоугольном сосуде, можно построить профиль свободной поверхности ($b = 0$) в переменных Лагранжа (a, b, t)

$$\begin{cases} x = a - H\dfrac{\mathrm{ch}kh}{2\mathrm{sh}\kappa h}\sin ka\cos\psi + H^2k\dfrac{\sin 2ka}{32\mathrm{sh}^2kh}(1+\cos 2\psi) - \dfrac{3}{64}H^2k\dfrac{\mathrm{ch}2kh}{\mathrm{sh}^4kh}\sin 2ka\cos 2\psi + \\ + \dfrac{1}{16}H^2k\dfrac{\mathrm{ch}2kh}{\mathrm{sh}^2 2kh}\sin 2ka, \\ y = \dfrac{H}{2}\cos ka\cos\psi + H^2k\dfrac{\mathrm{sh}\,2kh}{32\mathrm{sh}^2kh}(1+\cos 2\psi) + \dfrac{3}{64}H^2k\dfrac{\mathrm{sh}2kh}{\mathrm{sh}^4kh}\cos 2ka\cos 2\psi - \\ - \dfrac{1}{16}H^2k\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 2kh}\cos 2ka, \\ \psi = \omega t/2, \quad \lambda = \pi n/l, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad a \in [0,l], \quad b \in [-h,0] \end{cases} \tag{2.1}$$

Согласно рис. 2в,г имеем полное количественное соответствие данных эксперимента и модели.

На рис. 3 показаны профили третьей (а) и четвертой (б) волновых мод, возбуждаемых в клиновидном сосуде. Волны имели периоды $T_{3,4} = 0.645$ и 0.540 с и соответствующие частоты $\omega_{3,4} = 2\pi/T_{3,4} = 9.593$ и 11.635 с$^{-1}$. Представленные видеокадры полностью отражают особенности волновых движений жидкости в течение одного периода.

Прежде всего рассматриваемые волны классифицируются как стоячие, поскольку их пучности не перемещаются по горизонтали. Волны – нелинейные, что проявляется в колебаниях узлов стоячей волны, в заострении гребней и уплощении ложбин. Для обеих мод (рис. 3) отметим нарушение пространственной симметрии профиля максимального развития при $t = 0$ относитель-

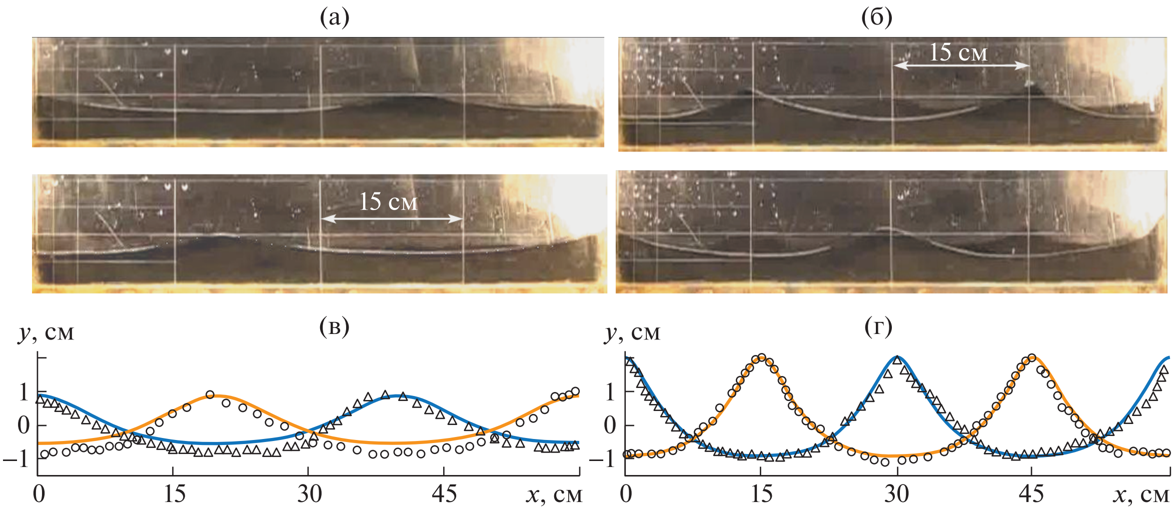

Рис. 2. Профили волн максимального развития для третьей (а) и четвертой (б) мод ($n = 3$ и 4) в прямоугольном сосуде. (в, г) Сравнение экспериментальных (точки) и рассчитанных по (2.1) (кривые) профилей. Здесь период волн $T_{3,4} = 0.706$ и 0.590 с; частота $\omega_{3,4} = 2\pi/T_{3,4} = 8.900$ и 10.650 с$^{-1}$; высота волн $H_{3,4} = 1.4$ и 2.9 см.

но вертикали, проведенной через вершину волны. Ординаты вершин и подошв волновых мод в этот момент возрастают от правой к левой стенке сосуда, на которой смещение свободной поверхности максимально. Волны – регулярные, поскольку характеризуются временной периодичностью профиля. Частоты $\omega_{3,4} = 9.578$ и 11.635 с$^{-1}$ наблюдаемых волновых мод больше соответствующих значений $\omega_{3,4} = 8.900$ и 10.650 с$^{-1}$ для волн в прямоугольном сосуде. Обработка волновых профилей рис. 3 показала, что размах колебаний свободной поверхности воды на правой стенке сосуда для обеих мод составляет величину $H \sim 1.7$ см. На левой стенке (вершина клиновидного сосуда) имеем $H \sim 7$ см для третьей моды (рис. 3а) и $H \sim 8$ см для четвертой моды (рис. 3б). Таким образом, рассматриваемая геометрия сосуда обеспечивает четырехкратное возрастание высоты стоячей гравитационной волны.

В работе [3] для четвертой моды в аналогичном клиновидном сосуде был выявлен режим прогрессивно-стоячих волн, при котором в левой половине сосуда наблюдается бегущая волна (перемещение пучностей волны, эллиптические траектории частиц-трассеров), а в правой – стоячая волна. При этом размах колебаний свободной поверхности воды на правой стенке сосуда составлял $H \sim 4$ см, а в вершине клина – $H > 16$ см. Поскольку в настоящих экспериментах значения H существенно ниже, можно предположить, наблюдавшийся в [3] особый режим колебаний воды связан с проявлением нелинейных эффектов, характерных для волн большой амплитуды.

В условиях настоящего эксперимента отношение глубины жидкости к длине волны составляло величину $h/\lambda \sim 0.1$, что позволяет для интерпретации результатов использовать приближение длинных волн и рассмотреть задачу о собственных колебаниях идеальной несжимаемой жидкости в протяженном канале переменного прямоугольного сечения. Уравнение волновых движений жидкости имеет вид [12]

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{g}{d(x)} \frac{\partial}{\partial x}\left(S(x)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

Здесь $\eta = \eta(x,t)$ – возвышение жидкости, $d(x)$ – переменная ширина сосуда, g – ускорение силы тяжести, $S = S(x) = d(x)h$ – площадь поперечного сечения сосуда, перпендикулярного горизонтальной оси x, h – постоянная глубина жидкости. Для стоячих волн на торцевых стенках сосуда $x = 0, l$ выполняются краевые условия непротекания

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{x=l} = 0, \quad t \ge t_o$$

(а) (б)

Рис. 3. Стоячие гравитационные волны на свободной поверхности воды в клиновидном сосуде: а–б – третья и четвертая волновые моды $n = 3, 4$ (по результатам видеосъемки 120 к/с). Здесь период волн $T_{3,4} = 0.656$ и 0.540 с; частота $\omega_{3,4} = 2\pi/T_{3,4} = 9.578$ и 11.635 с$^{-1}$.

Если $\eta(x,t) = W(x)e^{i\omega t}$, то рассматриваемая краевая задача на собственные значения λ_n и функции приводится к виду

$$\frac{d}{dx}\left(d^*(x^*)\frac{dW_n}{dx^*}\right) + d^*(x^*)\lambda_n W_n = 0, \quad W_n'(0) = W_n'(1) = 0 \tag{2.2}$$

Здесь x^* и d^* – горизонтальная координата и ширина сосуда, нормированные на l, b соответственно. Искомый параметр λ_n связан с частотой ω соотношением $\lambda_n = \omega^2 l^2/(gh) = (\pi n)^2$.

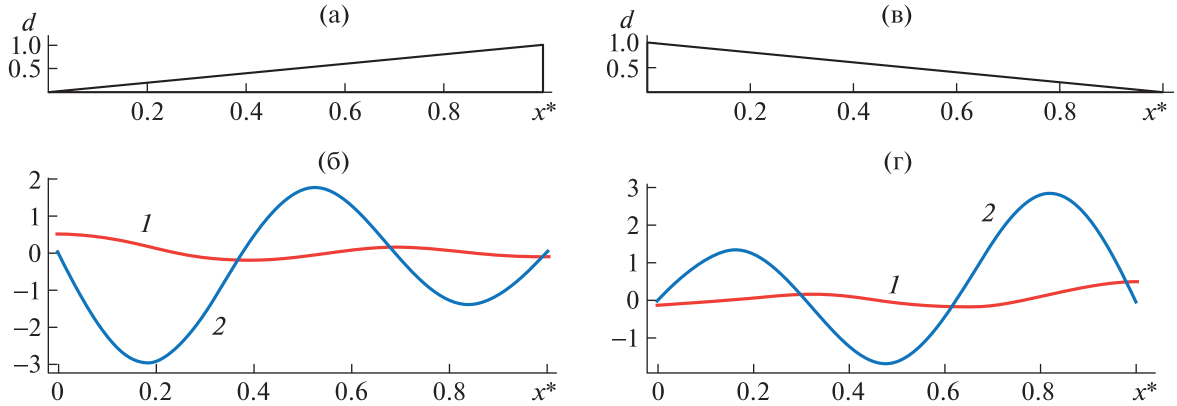

Рис. 4. (а, в) Сосуды с треугольным основанием $d^*(x^*) = b_0/b + x^*$, $d^*(x^*) = 1 - (b - b_0)x^*/b$ и (б, г) собственные функции $W_3(x^*)$ (*1*) и их производные $W_3'(x^*)$ (*2*) для третьей волновой моды: (б) – $W(0) = 0.5$, $W(1) = -0.1$; (г) – $W(0) = -0.1$, $W(1) = 0.5$; $b_0 = 0.01$ см, $b = 5.2$ см.

Для определения собственных значений λ_n и функций $W_n(x)$ задачи (2.2) с граничными условиями типа Неймана (второго рода) применим теорию Штурма–Лиувилля и алгоритм ускоренной сходимости [13], апробированный в экспериментах со стоячими волнами в прямоугольном сосуде, имеющем локальные нерегулярности дна и стенок [14]. Детальное описание метода и особенностей его использования также приводится в [14].

В расчетах для исключения локальной особенности в вершине клинообразного основания использовались функции $d^*(x^*) = b_0/b + x^*$ и $d^*(x^*) = 1 - (b - b_0)x^*/b$, описывающие ширину сосуда – рис. 4а, в. Отметим, что диапазон значений $b_0 = 0.0001$–0.01 см вполне соответствует точности задания $d \simeq 0$ в вершине клина, поскольку в условиях эксперимента ширина сосуда в вершине не равна нулю из-за неидеальности склейки стенок сосуда. Необходимость рассмотрения двух зависимостей $d^*(x^*)$ обусловлена тем обстоятельством, что для эксперимента более важными являются задание смещения свободной поверхности на широкой торцевой стенке сосуда и численная оценка высоты волна в вершине клина. В случае $d^*(x^*) = b_0/b + x^*$ задаются параметры волны при $x^* = 0$ (вершина клина), и модель дает оценки $W(1)$ при выполнении условия $W'(1) = 0$ – рис. 4б. При $d^*(x^*) = 1 - (b - b_0)x^*/b$ (рис. 4г) определяется $W(1)$ при $W'(1) = 0$. Приведенные на (б, г) графики (*2*) подтверждают выполнение граничного условия $W'(1) = 0$ для двух функций $d^*(x^*)$, описывающих ширину сосуда. Последнее свидетельствует о возможности получения численных оценок смещения жидкости в вершине клина при известной амплитуде волны на торцевой стенке. С целью сопоставления с экспериментом для рассчитанных таким образом размерных зависимостей $W_n(x)$ можно использовать пространственную инверсию и сдвиг по координате x. Результаты численно-аналитической модели для двух конфигураций основания сосуда (рис. 4б, г) полностью совпадают при $b_0 = 0.01$ см.

Использованная в настоящей работе численно-аналитическая модель длинных волн позволяет оценить частоты стоячих волн при изменении формы основания сосуда от прямоугольного к треугольному. Пусть ширина сосуда описывается функцией $d(x) = b - (b - b_0)x/l$; введем безразмерную частоту

$$\omega^* = \frac{\lambda_n}{(\pi n)^2} = \frac{\omega^2 l^2}{g h_0 (\pi n)^2}$$

определяемую собственным значением λ_n задачи (2.2). Величина λ_n зависит от b_0; соответствующие рассчитанные зависимости ω^* от b_0/b для третьей и четвертой волновых мод ($n = 3, 4$) приведены на рис. 5. При $b_0 = b = 5.2$ см имеем сосуд постоянной ширины и $\omega^* = 1$. При уменьшении b_0 от 5.2 см до 0 частота ω^* экспоненциально растет и достигает максимума при $b_0/b = 0$. Отметим, что для третьей моды $n = 3$ частота возрастает на интервале $b_0/b < 0.5$ (данные *1*), в случае

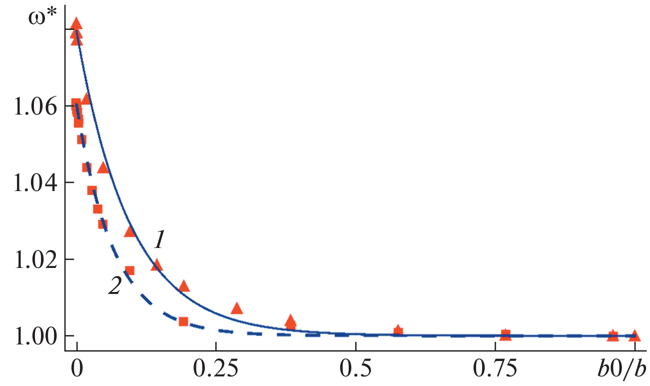

Рис. 5. Увеличение частоты стоячих волн при переходе от сосуда с прямоугольным основанием к клиновидному сосуду: *1, 2* – $n = 3, 4$. Аппроксимирующие расчетные данные *1*, *2* функции: $1 + Ae^{-Bx}$ ($A, B = \mathrm{const}$).

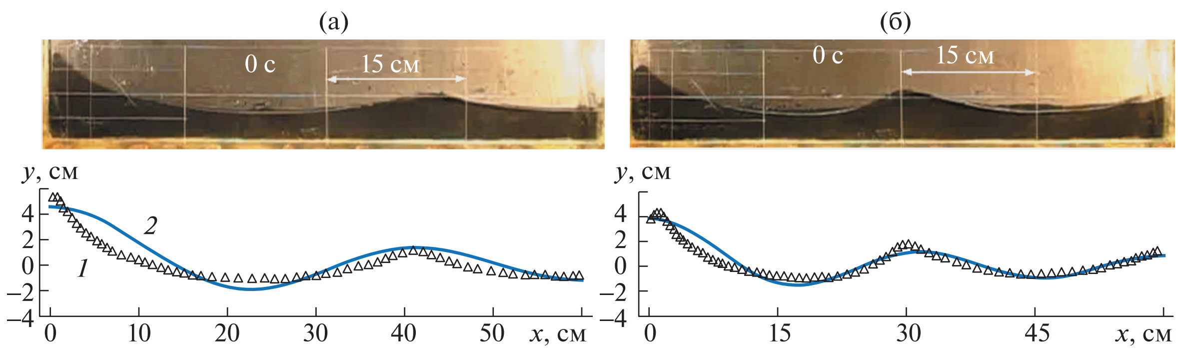

Рис. 6. Экспериментальные – *1* и рассчитанные – *2* волновые профили: (а, б) – $n = 3, 4$.

$n = 4$ – при $b_0/b < 0.25$ (данные *2*). Отметим, что при переходе к клиновидному сосуду частота третьей моды увеличивается на 8%, для четвертой моды – на 6%.

На рис. 6 представлены волновые профили, наблюдаемые в эксперименте и рассчитанные в приближении длинных волн методом ускоренной сходимости. Видно неплохое соответствие опытных *1* и расчетных *2* данных. Для обеих мод модель достаточно точно определяет горизонтальные положения и высоты гребней и подошв волн, причем наивысшие значения гребня волны ($x = 0$, вершина клина) рассчитывались при задании смещения свободной поверхности на торцевой стенке сосуда ($x = 60$ см) – данные *2*.

Основание призматического сосуда в виде треугольника с малым углом при вершине (а) можно рассматривать как сектор окружности с центральным углом α (б) – рис. 7. Согласно [14], в полярных координатах (r, θ) потенциал скорости стоячей волны определяется как

$$\Phi = A\,\mathrm{ch}\,m(y + h)\mathrm{J}_{s\pi/\alpha}(mr)\cos\frac{s\pi}{\alpha}\theta\cos\omega t$$

Здесь α – центральный угол сектора; $\mathrm{J}_{s\pi/\alpha}(mr)$ – функция Бесселя первого рода порядка $s\pi/\alpha$; m – положительные корни уравнения

$$\left(\mathrm{dJ}_{s\pi/\alpha}(mr)/\mathrm{d}r\right)_{r=l} = 0$$

В нашем случае $s \equiv 0$ – рассматриваются только радиальные волны, а профиль стоячей волны в сосуде с основанием в форме кругового сектора определяется соотношением

$$\eta\,(r) = A_0\mathrm{J}_0(m_n r)\cos\omega_n t \tag{2.3}$$

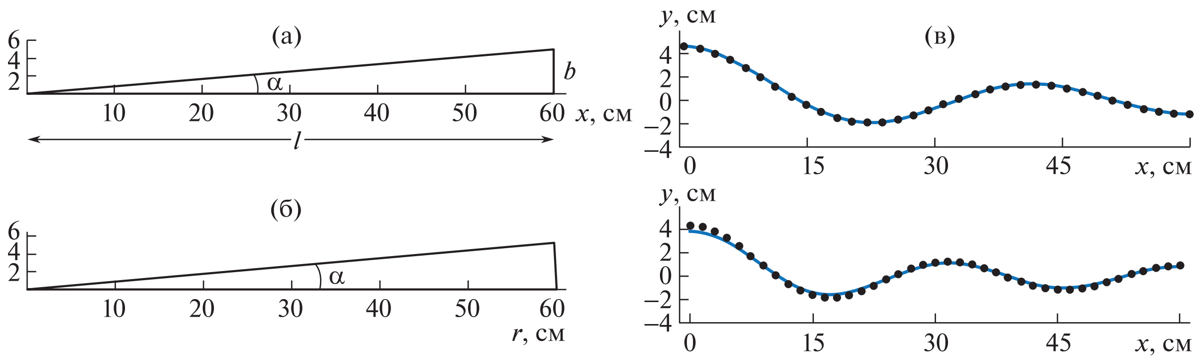

Рис. 7. Основание сосуда в виде треугольника (а) и кругового сектора (б) с малым углом $\alpha = \pi/36$ при вершине; (в) – волновые профили третьей и четвертой мод, рассчитанные с использованием алгоритма ускоренной сходимости (точки) и по (2.3) (кривые).

где A_0 – смещение свободной поверхности жидкости в точке $r = 0$; m_n – корень трансцендентного уравнения

$$J_0'(m_n l) = 0$$

и

$$\omega_n^2 = m_n g \,\mathrm{th}\, m_n h$$

В условиях эксперимента $l = 60$ см, $\alpha = \pi/36$ и $h = 4$ см; для третьей и четвертой волновых мод ($n = 3, 4$) получаем

$$m_{3,4} = 0.170,\ 0.222\ \text{см}^{-1}$$

$$\omega_{3,4} = 9.910,\ 12.441\ \text{с}^{-1}$$

На рис. 7в представлены профили третьей и четвертой мод, рассчитанные по формуле (2.3) (кривые) и в приближении длинных волн методом ускоренной сходимости (точки). Видно, что эти два подхода приводят к абсолютно совпадающим профилям стоячей гравитационной волны. Отметим, что если модель стоячих волн для кругового сектора требует задания смещения свободной поверхности жидкости в центре кругового сектора ($r = 0$), то алгоритм ускоренной сходимости позволяет это смещение оценить по смещению свободной поверхности воды на торцевой стенке клина. С другой стороны, модель стоячих волн в сосуде с основанием в виде кругового сектора допускает проведение кинематического анализа волн в линейном приближении, а также при учете более высоких приближений оценку нелинейных эффектов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены новые экспериментальные данные по возбуждению стоячих поверхностных гравитационных волн в клиновидном сосуде. Показано их принципиальное отличие от волновых движений жидкости в прямоугольном сосуде – отсутствие пространственной симметрии для профиля максимального развития и возрастание амплитуды волны к острию клина.

В приближении длинных волн сформулирована и численно решена задача о стоячих волнах в сосуде переменной ширины при использовании алгоритма ускоренной сходимости. Результаты расчета адекватно описывают экспериментальные волновые профили для третьей и четвертой мод.

Для интерпретации данных эксперимента успешно использована линейная аналитическая модель стоячих волн в цилиндрическом сосуде с основанием в виде кругового сектора с малым центральным углом. Показано, что для проведенных опытов эта модель продуктивно дополняет численные оценки длинноволнового приближения.

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А20-120011690131-7. Эксперименты проводились на стенде ДСО (уникальная научная установка Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abramson H.N., Chu W.H., Kana D.D.* Some studies of nonlinear lateral sloshing in rigid containers // *J. Appl. Mech.* 1966. V. 33 (4). P. 777–784. https://doi.org/10.1115/1.36251827
2. *Микишев Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968, 532 с.
3. *Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я.* Возбуждение прогрессивно-стоячих волн Фарадея // ДАН. 2011. Т. 438. № 4. С. 475–479.
4. *Wilson B.* Seiches // *Advances in Hydroscience*. 1972. V. 8. P. 1–94. https://doi.org/10.1016/b978-0-12-021808-0.50006-1
5. *Friedrichs C.T., Aubrey D.G.* Tidal propagation in strongly convergent channels // J. Geophys. Res. 1994. V. 99 (C2). P. 3321–3336. https://doi.org/10.1029/93jc03219
6. *Дроздова Ю.А., Куликовский А.Г.* Об описании длинных нелинейных волн в каналах // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 5. С. 136–145.
7. Стенд “Исследования динамики и структуры осциллирующих течений” (ДСО). УИУ “ГФК ИПМех РАН”: http://www.ipmnet.ru/uniqequip/gfk/#aboutDSO
8. *Калиниченко В.А.* Эксперименты по подавлению интенсивных колебаний жидкости плавающей пластиной // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 6. С. 74–83. https://doi.org/10.31857/s0568528121060050
9. *Higuera F.J., Medina A., Liñán A.* Capillary rise of a liquid between two vertical plates making a small angle // Phys. Fluids. 2008. V. 20 (10). https://doi.org/10.1063/1.3000425
10. *Нестеров С.В.* Параметрическое возбуждение волн на поверхности тяжелой жидкости // Морские гидрофиз. исследования. 1969. № 3 (45). С. 87–97.
11. *Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А.* Экспериментальное исследование поверхностных волн при резонансе Фарадея // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 1. С. 122–129.
12. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 303 с.
13. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* High-precision methods in eigenvalue problems and their applications. Boca Raton: CRC Press, 2005. 255 p.
14. *Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Со А.Н.* Стоячие поверхностные волны в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями стенок и дна // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 2. С. 65–74. https://doi.org/10.7868/S0568528117020104
15. *Wehausen J.V., Laitone E.V.* Surface waves. *in* Encyclopedia of Physics. Springer Verlag, 1960. V. IX. P. 446–778. https://doi.org/10.1007/978-3-642-45944-3_6