

УДК 533.69

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ВИХРЕВОГО СЛЕДА ЗА МАШУЩИМ КРЫЛОМ, СОВЕРШАЮЩИМ КОЛЕБАНИЯ РАЗЛИЧНОГО ТИПА

© 2022 г. V. K. Vineeth\*, D. K. Patel\*\*

*School of Mechanical Engineering, Vellore Institute of Technology Vellore, India-632014*

*\*E-mail: vineeth.vk1019@gmail.com*

*\*\*E-mail: devendra21082@gmail.com*

Поступила в редакцию 27.06.2021 г.

После доработки 05.10.2021 г.

Принята к публикации 01.11.2021 г.

Выполнено сравнение характеристик следа за специально спроектированным крыловым профилем, совершающим угловые, вертикальные и смешанные (вертикально-угловые) колебания. Влияние параметров махового движения исследовано при постоянном числе Рейнольдса  $Re_c = 2640$  в диапазоне чисел Струхала  $St_A$ , вычисленных по амплитуде,  $0.1 \leq St_A \leq 0.4$ . Возникновение завихренности над и под профилем зависит от первоначального направления движения профиля и остается одним и тем же для всех типов рассмотренных машущих колебаний. Рассмотрена эволюция вихрей на передней и задней кромках. Вертикальные колебания профиля сильнее влияют на характеристики вихря на передней кромке. След за профилем, совершающим смешанные вертикально-угловые колебания, в основном определяется угловыми колебаниями при  $St_A < 0.24$  и вертикальными колебаниями при  $St_A > 0.24$ . Расчеты силовых характеристик показывают, что существования одной лишь обратной дорожки Кармана недостаточно, чтобы развить тягу на профиле. На характеристики следа существенным образом влияет периодическая компонента пульсаций скорости. Приведены данные по анизотропному полю напряжений, развивающемуся вокруг профиля вследствие периодических пульсаций скорости. При помощи собственно ортогонального разложения идентифицированы когерентные структуры, развивающиеся в следе, и выполнено качественное сравнение этих структур для различных типов машущих колебаний. Перенос энергии от машущего крыла в поток жидкости максимальный в случае вертикальных колебаний, далее следуют смешанные и, наконец, угловые колебания.

*Ключевые слова:* машущий профиль, угловые движения, вертикальные движения, ламинарное течение, когерентные структуры, коэффициенты сил

**DOI:** 10.31857/S0568528122020128

Механизмы махания, используемые насекомыми, птицами и рыбами, способны обеспечить весьма эффективное передвижение. Развитие беспилотных и микро(нано) летательных аппаратов требует применения очень сложных и эффективных машущих органов. В этой связи много внимания уделялось динамике машущего крылового профиля. Ранее широко исследовались различные механизмы махания, включая угловые, вертикальные и смешанные (вертикально-угловые) колебания. Так, угловые колебания изучались в работах [1–4], вертикальные в [3–8] и смешанные в [9–12]. Вихри за колеблющимся профилем образуют различные конфигурации в следе, такие как дорожки Кармана, обратные дорожки Кармана, отклоненные конфигурации и совершенно нерегулярные конфигурации. В работе [13] наблюдалось образование обратной дорожки Кармана за профилем, совершающим вертикально-угловые колебания, в диапазоне чисел Струхала от 0.25 до 0.35 и прямой дорожки при меньших числах Струхала (параметры машущего движения выражены в безразмерной форме). В [5] показано, что изменение картины течения в следе за профилем в вертикальном движении происходит в диапазоне безразмерной скорости вертикального движения (аналог числа Струхала) от 0.2 до 0.4. Структура отклоненного следа за профилем в вертикальном движении была визуализирована в работе [14], а аналогичная конфигурация за профилем, совершающим колебания смешанного типа, была обнаружена в [15].

В работе [16] показано, что изменение структуры течения за профилем, совершающим угловые колебания, происходит при числах Струхала в диапазоне от 0.1 до 0.3.

В работе [17] отмечается, что при кармановском расположении вихрей в следе след создает сопротивление движению тела, а при обратном расположении он создает тягу. Нарушение симметрии в обратной дорожке Кармана и возникновение отклоненного следа создают и тягу, и подъемную силу. В работе [18] были выявлены переходы в структуре следа за машущим профилем и визуализированы кармановский след, обратный кармановский след и отклоняющийся след. В [19] установлены переходы в следе за вертикально колеблющимся профилем, а в [20] – за профилем, совершающим колебания смешанного типа. В отклоненном следе вихри противоположного знака образуют диполи и распространяются в дальний след. Образование диполей за профилями, совершающими угловые и вертикальные колебания, отмечалось в работах [21] и [22]. Однако все эти работы выполнены для различных форм профилей, различных параметров машущего движения и при различных числах Рейнольдса. Поэтому сопоставление картин переходов в следе за одним и тем же профилем, производящим операции в одном и том же диапазоне параметров, но для различных видов машущего движения, может быть полезно для изучения аэродинамики профиля и возникающих полей течения.

В литературе также отмечались наличие множественных вихревых следов и их влияние на аэродинамические характеристики машущего профиля [23, 24]. В [24] наблюдался переход от сопротивления к тяге в следе с множественными вихрями, в противоположность следу с обратным расположением Кармана. В различных работах проводились измерения сил в следах за профилями, совершающими угловые [25], вертикальные [8] и смешанные колебания [10, 26]. Силовые измерения в работе [26] показали, что оптимальное производство тяги профилем, совершающим смешанные колебания, имеет место при числах Струхала от 0.25 до 0.40. Однако измерения сил были выполнены при различных рабочих числах Рейнольдса, в связи с чем их непосредственное сравнение невозможно. Сравнение различных типов машущих колебаний при одном и том же рабочем числе Рейнольдса было бы полезно для разработки и проектирования микроразмерных летательных аппаратов. Большинство из этих аппаратов предназначено для полетов при числах Рейнольдса от  $10^3$  до  $10^4$  [27]. Соответственно, в настоящей работе для исследования выбрано число Рейнольдса 2640. В литературе подчеркивалось, что оптимальные характеристики профиля достигаются в диапазоне чисел Струхала от 0.1 до 0.4 и именно этот диапазон рассмотрен в настоящей работе. Рассматриваются только периодические колебания, которые представляют собой наиболее распространенную форму двигательной активности биологических объектов.

## 1. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МЕТОДИКА

### 1.1. Геометрия и кинематика профиля

Рассматривается симметричный профиль с полукруглой передней кромкой и клиновидной задней кромкой. Отношение толщины твердого профиля к длине хорды  $D/C = 1/6$ . Угловые, вертикальные и смешанные (вертикально-угловые) колебания, совершаемые профилем, представлены на рис. 1. Угловые колебания профиля описываются уравнением

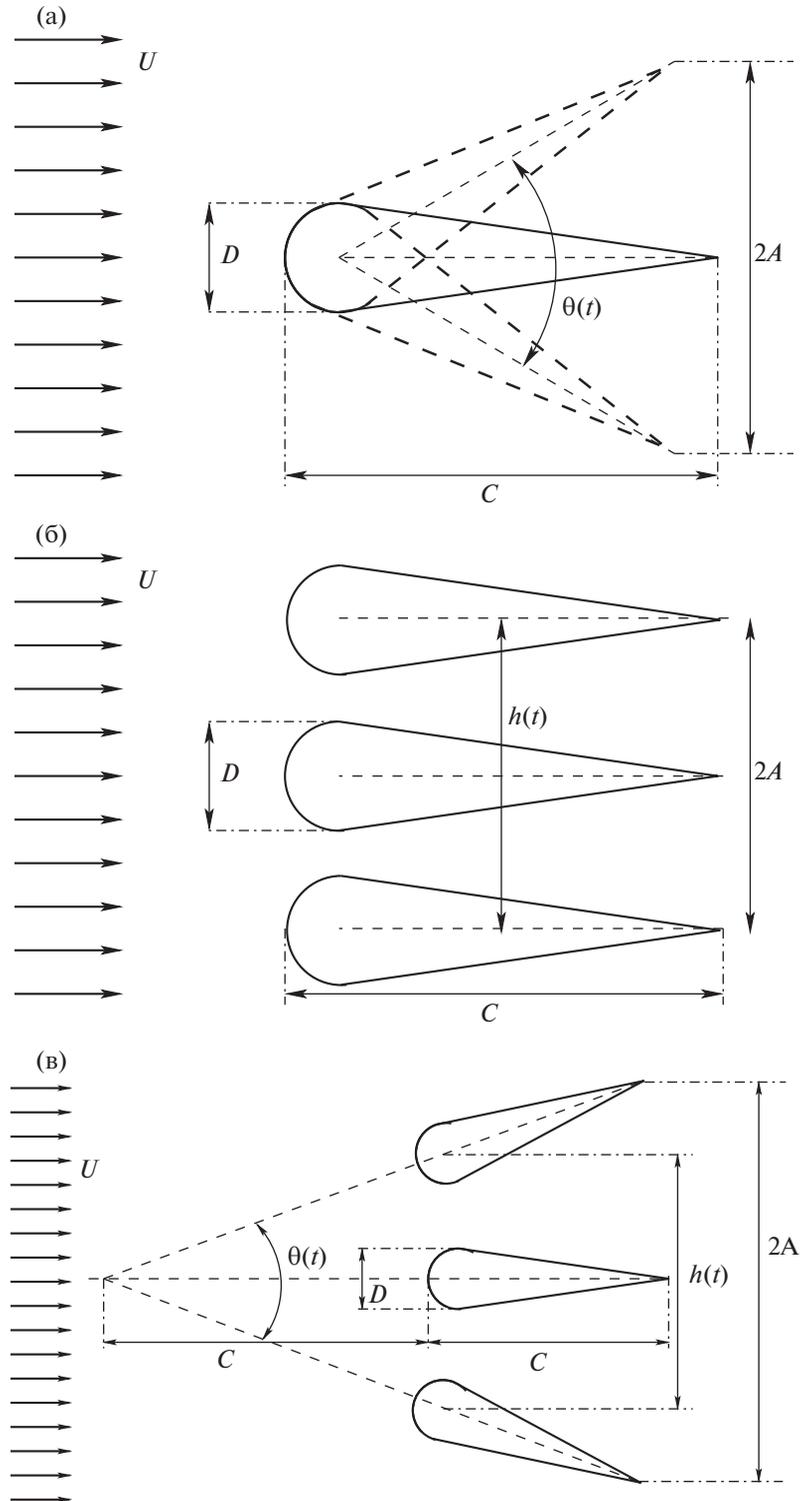
$$\theta(t) = \theta_0 \sin 2\pi f t \quad (1.1)$$

где  $\theta(t)$  – мгновенная амплитуда колебаний, а  $\theta_0$  – максимальная амплитуда;  $f$  – частота машущего движения и  $t$  – время. Вертикальное движение, совершаемое профилем, описывается уравнением

$$h(t) = A \sin 2\pi f t \quad (1.2)$$

где  $h(t)$  – мгновенная амплитуда вертикального колебания, а  $A$  – максимальная амплитуда. Уравнения (1.1) и (1.2), взятые вместе, описывают смешанные, вертикально-угловые колебания. Сдвиг по фазе между угловыми и вертикальными колебаниями не рассматривается. Частота и амплитуда машущего движения представляются в безразмерном виде, как число Струхала  $St_A$ , вычисленное по амплитуде

$$St_A = \frac{2A \times f}{U} \quad (1.3)$$



**Рис. 1.** Схематическое изображение геометрии профиля и кинематики машущих движений, угловых (а), вертикальных (б) и смешанных (в).

Профиль совершает машущее движение, находясь в равномерном набегающем потоке, имеющем скорость  $U$ , направленную по координате  $x$ . Число Рейнольдса  $Re_c$  определено по хорде профиля  $C$ , скорости потока  $U$  и кинематической вязкости жидкости  $\nu$

$$Re_c = \frac{U \times C}{\nu} \quad (1.4)$$

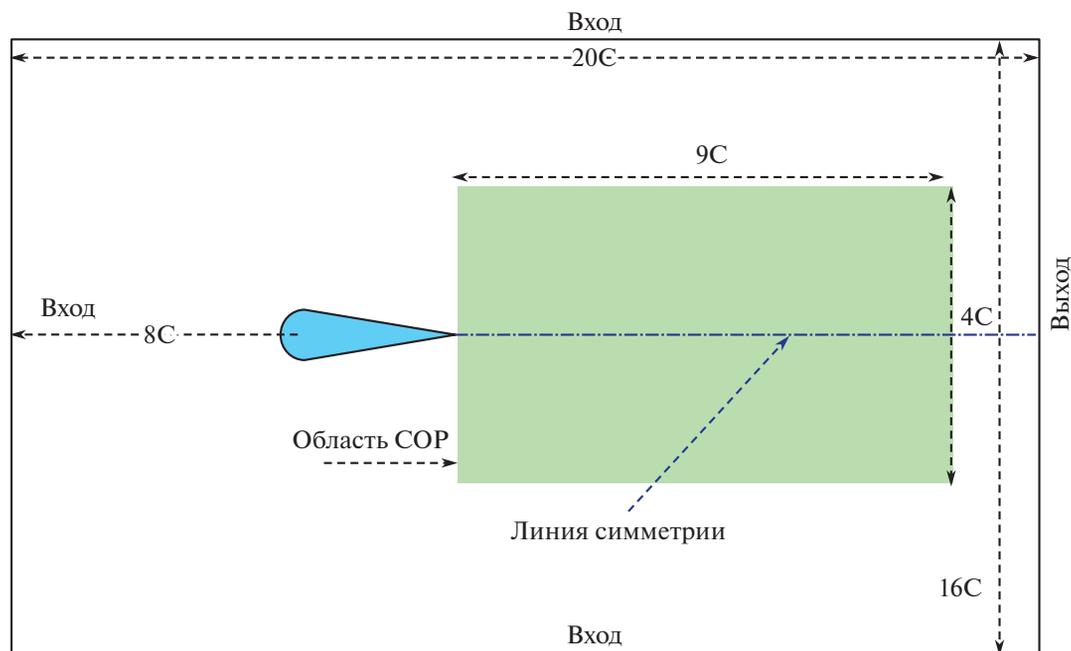


Рис. 2. Схематическое изображение расчетной области.

### 1.2. Численная процедура

Для исследования нестационарного двумерного обтекания машущего профиля ламинарным потоком несжимаемой жидкости используется произвольный лагранжево-эйлеров метод (ПЛЭ) [28]. При решении методом ПЛЭ уравнения Навье–Стокса зарисовываются в виде

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + [(\vec{u} - \vec{u}_m) \cdot \nabla] \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (1.6)$$

Здесь  $p$  — давление в потоке жидкости,  $\vec{u}$  — скорость течения и  $\vec{u}_m$  — скорость узла расчетной сетки. Плотность жидкости  $\rho$  остается постоянной в пространстве и во времени. Дискретизация по времени осуществляется при помощи неявной эйлеровой схемы второго порядка, а шаг по времени выбирается так, что максимальное число Куранта всегда остается меньше, чем 0.5. Адвективные и диффузионные члены уравнений дискретизируются при помощи противопоточной схемы второго порядка и центральной разностной схемы второго порядка соответственно. Взаимосвязь между давлением и плотностью обеспечивается использованием алгоритма PIMPLE с тремя петлями корректора. В настоящей работе используются одна внутренняя петля корректора и две внешних петли. Коррекция давления осуществляется при помощи алгоритма GAMG (обобщенный геометрически-алгебраический многосеточный корректор). Сделанный выбор солвера представляется удачным, так как он снимает необходимость предобуславливания. На каждом шаге по времени критерий сходимости для давления и скорости задается величиной  $10^{-8}$ . Моделирование машущего движения профиля осуществлялось при помощи открытого пакета OpenFOAM [29].

### 1.3. Граничные условия

Расчетная область, использованная в настоящей работе, изображена на рис. 2. Размеры расчетной области достаточно велики, чтобы исключить влияние границ на решение. Левая, верхняя и нижняя границы располагаются на расстоянии  $8C$  от профиля. Задняя граница находится на расстоянии  $12C$  от профиля. Левая, верхняя и нижняя границы расчетной области являются входными, а правая граница — выходная. На входной границе градиент давления задается нулевым, а скорость постоянной. На выходной границе задается атмосферное давление при нулевом градиенте скорости. Профиль рассматривается как движущаяся стенка, на которой ставятся

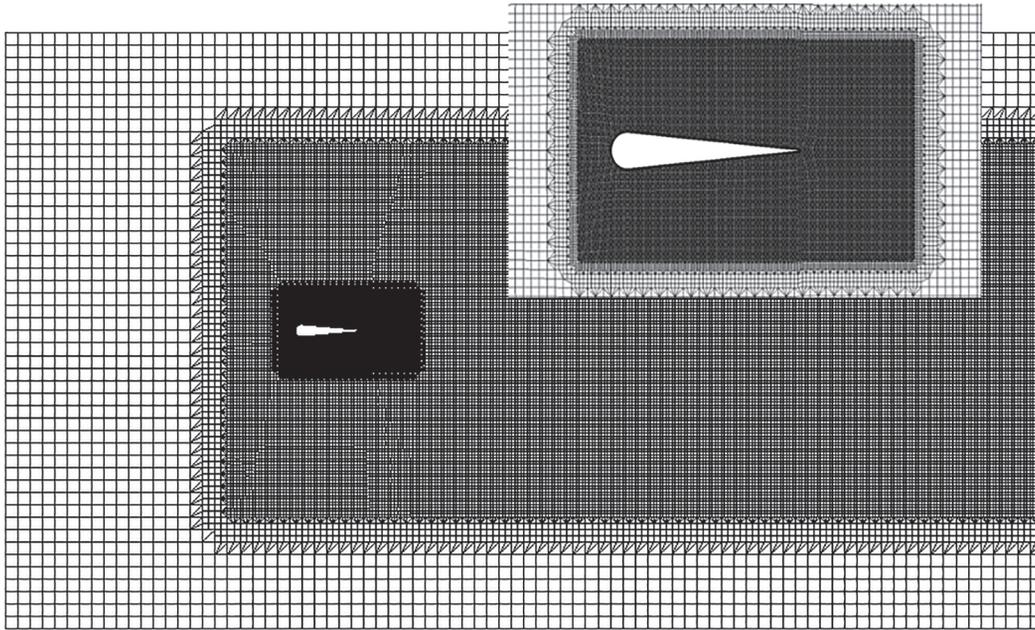
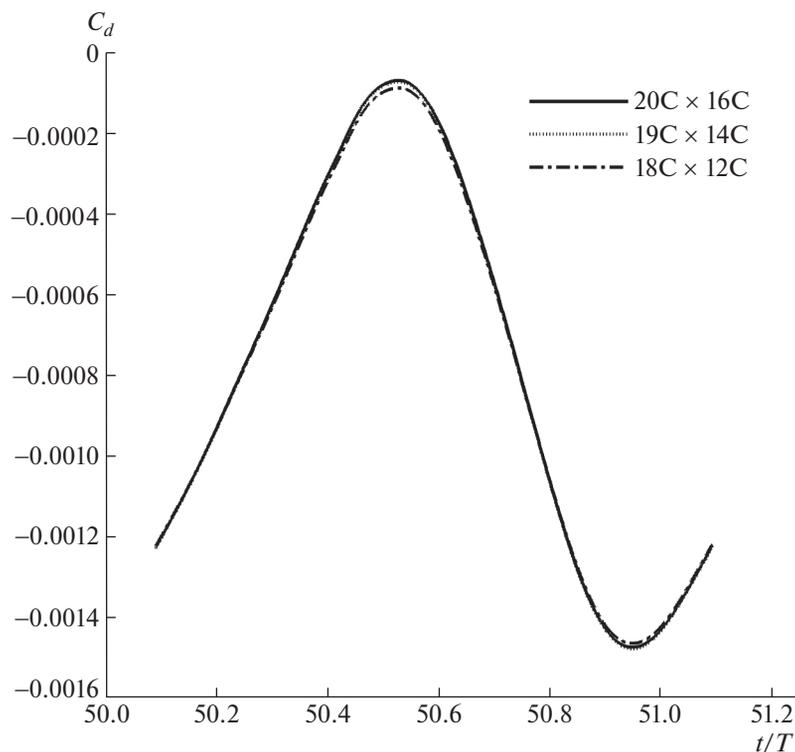


Рис. 3. Расчетная сетка (сетка в окрестности профиля представлена на вставке).

условия прилипания. Расчетная сетка, показанная на рис. 3, имеет сгущения вблизи профиля для правильного определения процессов в пограничном слое. Сетка имеет несколько уровней сгущения, так что максимальный объем ячейки сетки имеет место у дальней границы, а минимальный объем достигается вблизи профиля. Соответственно, минимальный (у профиля) и максимальный (у дальней границы) объемы сочной ячейки равны  $1.5 \times 10^{-13}$  и  $4.1 \times 10^{-9}$ . Максимальная неортогональность сетки равна 50.43 со средним по сетке значением 3.14. Максимальная скошенность сетки ограничена значением 0.71. Внутри расчетной области выбрана область размерами  $9C \times 4C$ , в которой выполняется собственно ортогональное разложение.

#### 1.4. Валидация численной методики

Размеры расчетной области выбраны согласно работам [30, 31], в которых исследовался случай двумерного машущего профиля. Для профиля, совершающего смешанные колебания, исследовалось влияние размеров расчетной области, которые варьировались в продольном и поперечном направлениях. Расстояния от профиля до выходной границы и до верхней и нижней границ увеличивались на расстояние порядка одной длины хорды. Расстояние от профиля до входной границы оставалось неизменным. Зависимость коэффициента сопротивления от времени, рассчитанная в областях размерами  $20C \times 16C$  и  $19C \times 14C$ , оказывается весьма близкой (рис. 4). Для профиля, совершающего смешанные колебания, исследовалось также влияние размеров сетки на решение. Количество узлов сетки в расчетной области увеличивалось, чтобы получить сетки с четырьмя различными плотностями узлов. Для каждого из этих случаев изучались зависимости от времени коэффициента сопротивления  $C_d$  и коэффициента подъемной силы  $C_l$  в течение одного полного цикла. Различные плотности сетки достигались сгущением ее узлов вблизи профиля. На рис. 5а и 5б представлены зависимости от времени коэффициентов сопротивления ( $C_d$ ) и подъемной силы ( $C_l$ ), полученные на различных сетках. Сделан вывод, что сетки с  $3.2 \times 10^5$  ячеек в расчетной области достаточно, чтобы уловить особенности течения вблизи профиля. Для оценки зависимости решения в следе от параметров сетки было рассмотрено поведение средней скорости течения  $U_{mean}$ . Распределения  $U_{mean}$  вдоль линии симметрии и перпендикулярно ей построены на рис. 6. Вдоль линии симметрии профиль  $U_{mean}$  построен до расстояния  $8C$  (рис. 6а), а распределение в перпендикулярном направлении построено на расстоянии  $8C$  от задней кромки профиля (рис. 6б). Распределения  $U_{mean}$  практически не отличаются друг от

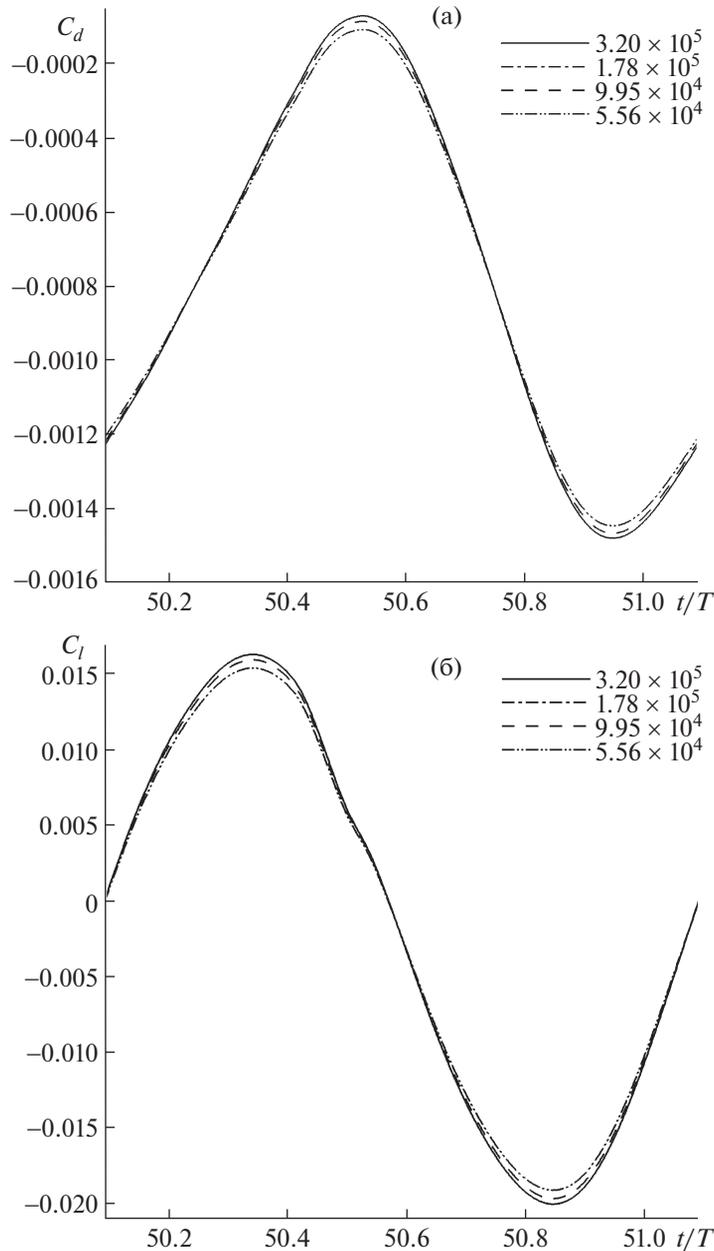


**Рис. 4.** Зависимость коэффициента сопротивления от безразмерного времени для областей трех различных размеров.

друга в расчетах на последовательных сетках с  $3.2 \times 10^5$  и  $1.78 \times 10^5$  ячейками. Для дальнейших расчетов была выбрана сетка с  $3.20 \times 10^5$  ячейками.

Структура следа, полученная в численных решениях настоящей работы, сравнивалась с экспериментальными данными, известными из литературы. Выполнена качественная оценка решений, соответствующих чисто угловым и чисто вертикальным движениям. Результаты визуализации течения в следе за машущим профилем, полученные в работе [32], сравниваются с распределениями завихренности, полученными в численном решении. В [32] получен нейтральный след (рис. 7а) в случае приведенной частоты  $k = 6.7$  и множественный вихревой след при  $k = 3.1$  (рис. 7в). Картины следа, полученные численно (рис. 7б и 7г), находятся в хорошем соответствии с экспериментальными картинками. Результаты визуализации с помощью красителей, полученные в [14] для профиля, совершающего вертикальные колебания, сравниваются с картинками течения в следе, полученными в численном решении, на рис. 8. В [14] след, создающий тягу, был получен для приведенной частоты  $k = 3$  (рис. 8а), а для более высокой частоты  $k = 12.5$  след был отклоненным (рис. 8в). Картины следа, создающего тягу, и отклоненного следа, полученные в данных расчетах (рис. 8б и 8г), находятся в хорошем соответствии с экспериментом.

Количественная валидация численных решений представлена на рис. 9. Зависимость осредненного по времени коэффициента тяги ( $\overline{C}_t$ ) от безразмерной частоты махания ( $f^* = \frac{f \times C}{U}$ ), полученная в настоящих расчетах, сравнивается с экспериментальными измерениями работ [33, 34]. Диапазон частот и значение числа Рейнольдса, рассмотренные в данной работе, отличаются от представленных в упомянутых экспериментальных исследованиях. Поэтому при сравнении экспериментальных и численных результатов для них используются различные масштабы. Масштабы для экспериментальных результатов нанесены на левой и нижней осях рисунка, а для численных результатов — на правой и верхней осях. Измеренные и рассчитанные коэффициенты тяги обнаруживают одну и ту же тенденцию при увеличении частоты маханий.



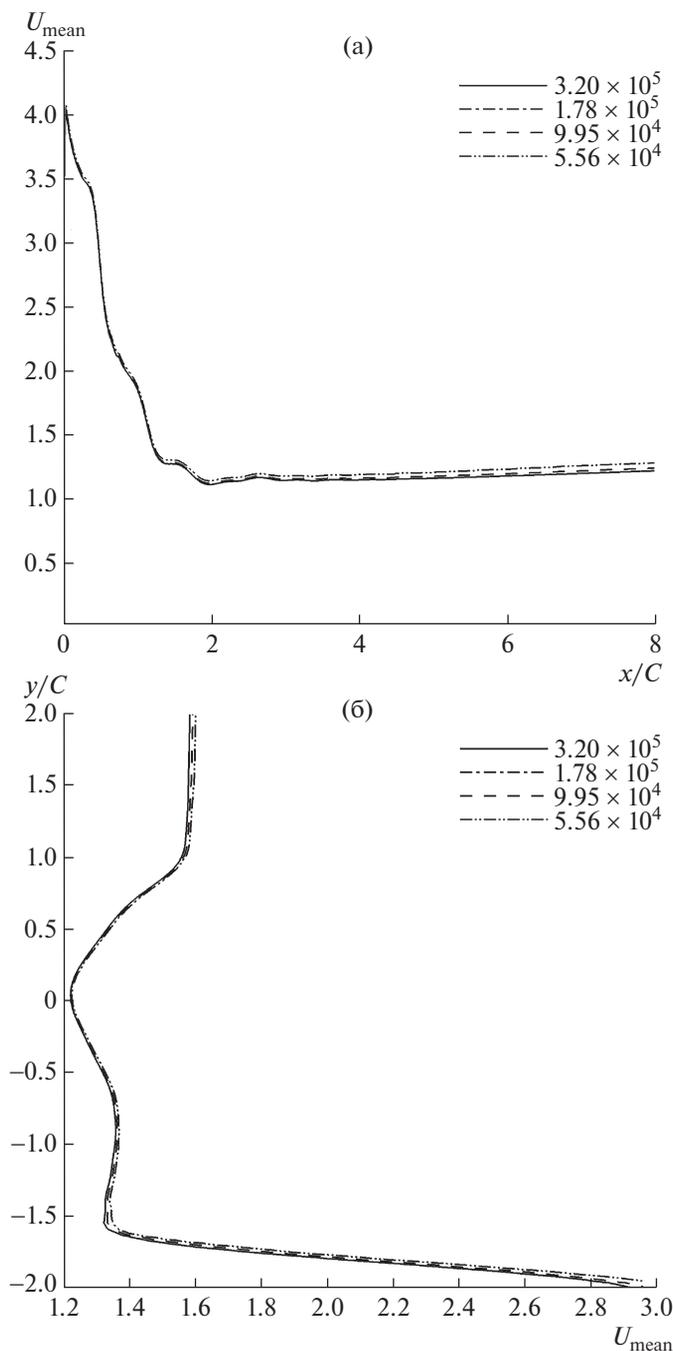
**Рис. 5.** Зависимость коэффициентов сопротивления (а) и подъемной силы (б), действующих на профиль, от безразмерного времени при различных размерах сетки.

## 2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Численно исследовано обтекание машущего профиля ламинарным потоком несжимаемой жидкости. Угловые, вертикальные и смешанные (вертикально-угловые) колебания профиля изучены в диапазоне чисел Струхала  $St_A$ , вычисленных по амплитуде, от 0.1 до 0.4. Скорость потока была неизменной:  $U = 1.54$  м/с, что соответствует числу Рейнольдса, вычисленному по длине хорды,  $Re_c = 2640$ .

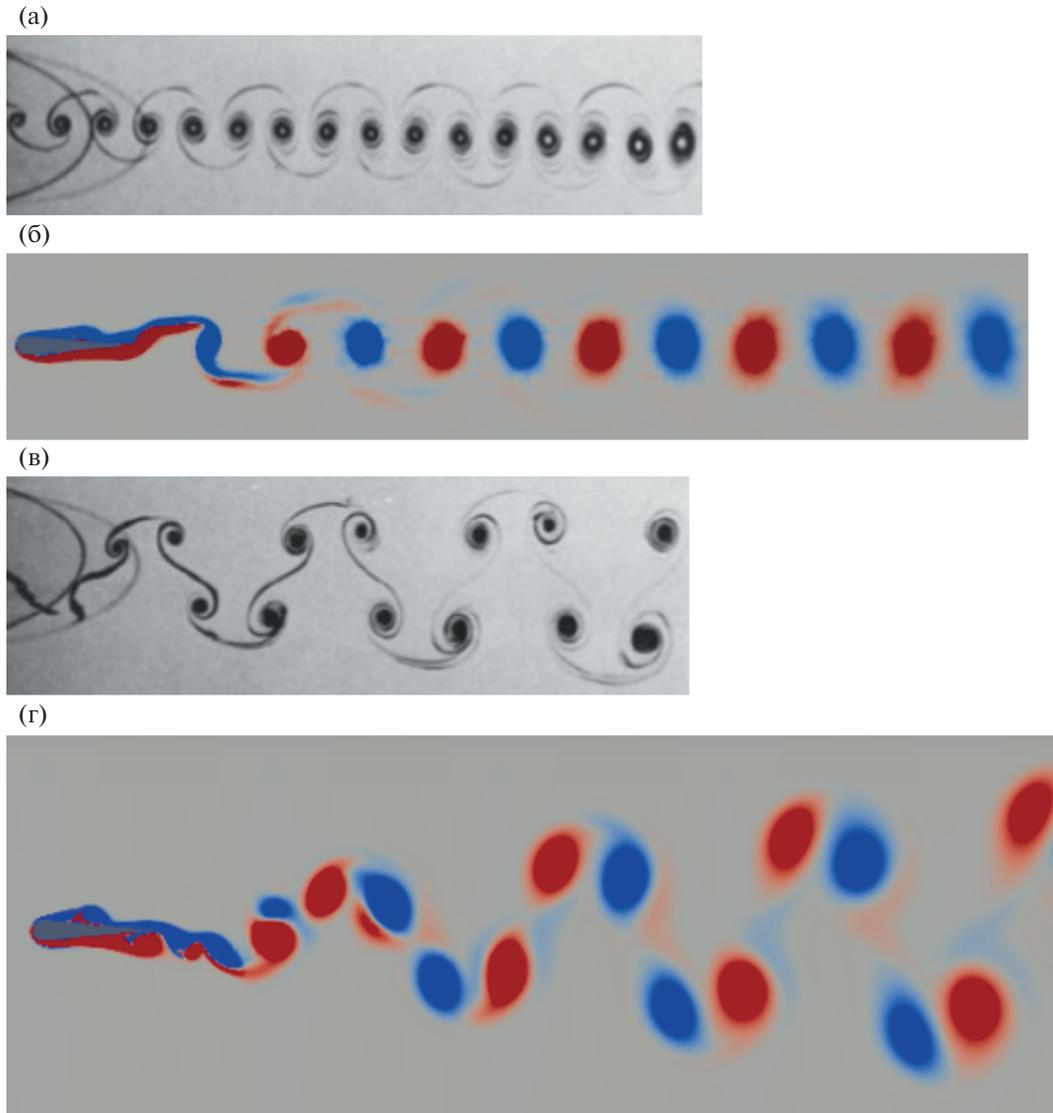
### 2.1. Структура следа

Структура следа визуализирована при помощи линий постоянных значений  $z$  – компоненты завихренности ( $\omega_z$ ). Сила, действующая на машущий профиль, зависит от структуры следа. Для



**Рис. 6.** Зависимость средней скорости ( $U_{mean}$ ) от расстояния вдоль линии симметрии (а) и перпендикулярно линии симметрии при  $x = 8C$  (б) при различных размерах сетки.

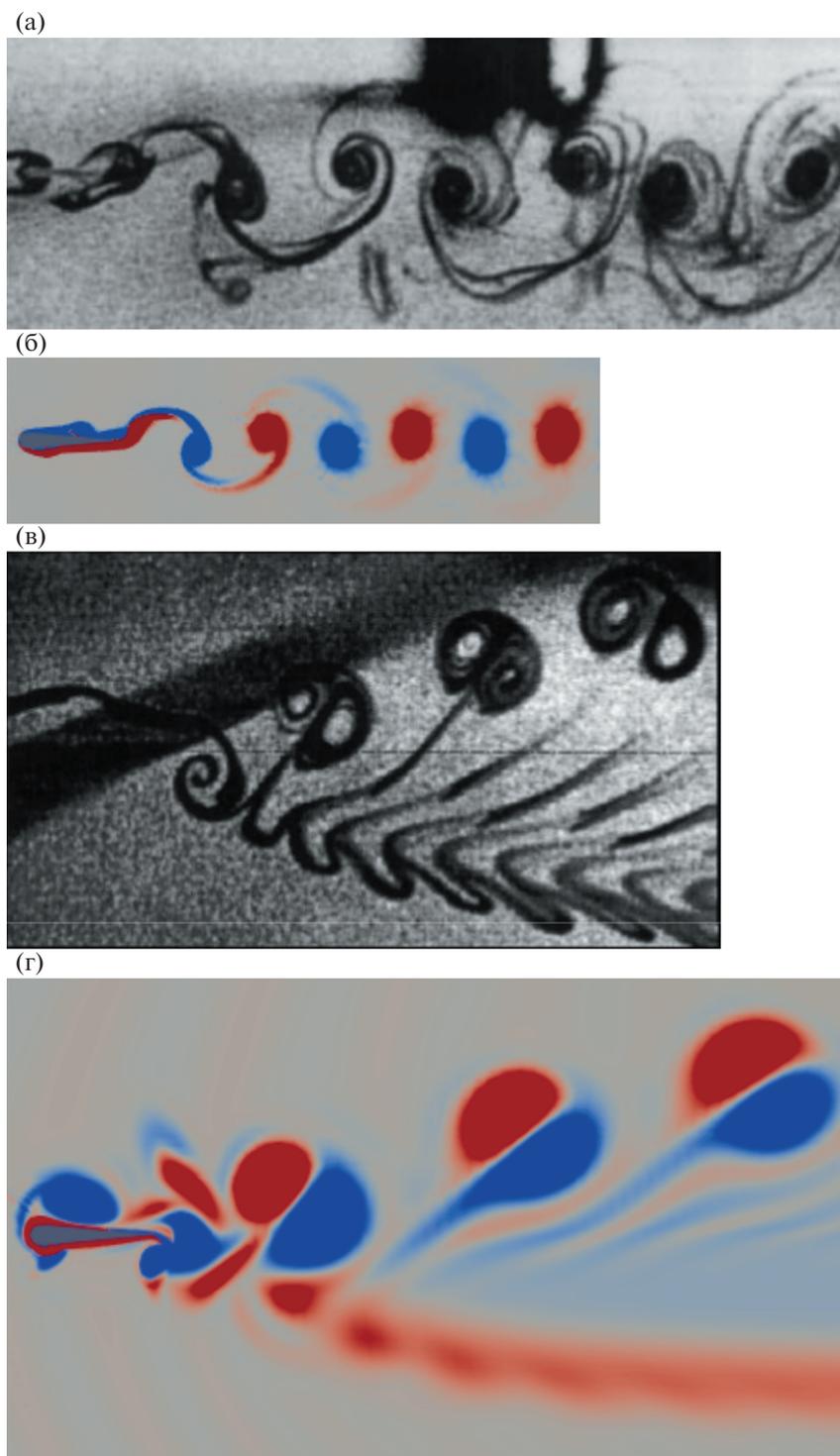
профиля, совершающего угловые колебания при различных значениях  $St_A$ , эта структура представлена на рис. 10. Красный цвет соответствует положительным значениям  $\omega_z$ , т.е. вращению против часовой стрелки, а синий цвет отрицательным значениям  $\omega_z$  (вращению по часовой стрелке). Распределения завихренности в поле течения, полученные в численных расчетах, позволяют идентифицировать структуру следа. Мгновенные изображения полей завихренности используются для того, чтобы представить расположение вихрей в следе. Классификация структур течений в следе проводится на основании направления завихренности, которое обеспечивает визуальное представление о расположении вихревой дорожки. Этот способ классификации мо-



**Рис. 7.** Сравнение рассчитанных картин течения в следе с экспериментальными результатами [32] для профиля, совершающего угловые колебания. Экспериментальная картина течения в следе для значений приведенной частоты  $k = 6.7$  (а) и  $3.1$  (в) и рассчитанная картина течения в следе для значений приведенной частоты  $k = 6.7$  (б) и  $3.1$  (г).

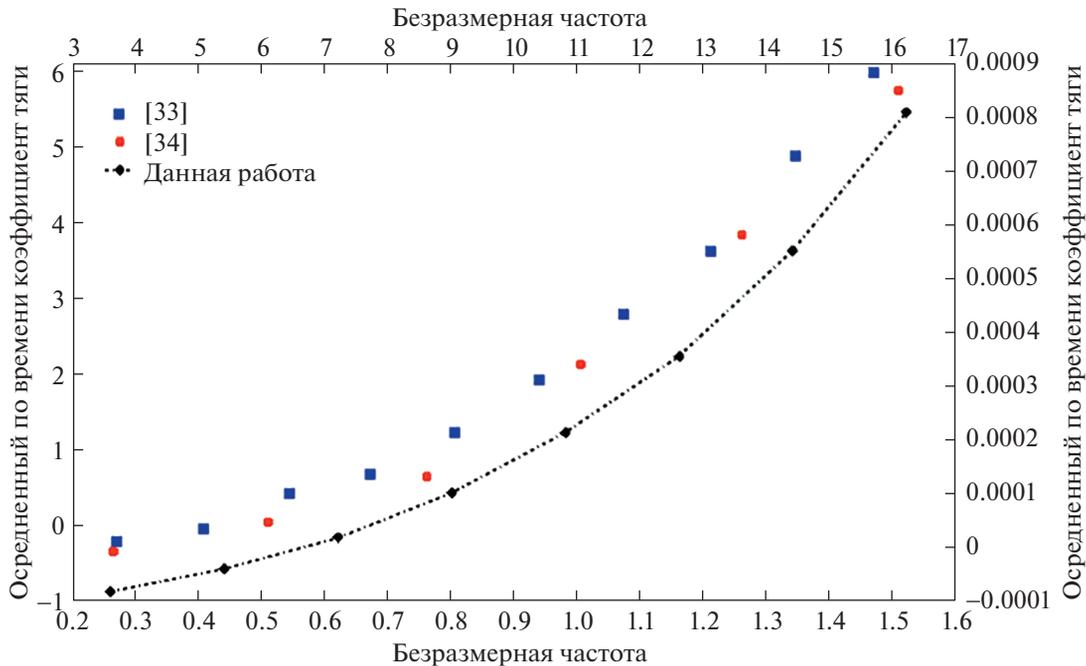
жет быть затруднителен в переходной области между прямой и обратной дорожками Кармана. В данной работе идентификация вихревой дорожки в переходной области осуществляется путем расчета завихренности в ядрах вихрей и ее сопоставлением со структурой следа по [35]. При  $St_A = 0.12$  вихри, образовавшиеся над и под профилем, выстраиваются вдоль линии симметрии (рис. 10а); такое их расположение называется нейтральным следом [36]. С ростом  $St_A$  структура следа меняется, как показано на рис. 10б. Вихри, образовавшиеся над профилем, смещаются вниз от линии симметрии и наоборот. Это расположение напоминает вихревую дорожку Кармана, но с противоположным направлением завихренности, и называется обратным следом Кармана. Дальнейшее увеличение  $St_A$  приводит к росту вихрей, тогда как их расположение в следе остается неизменным. Увеличение параметра махания делает вихри более интенсивными.

Структура следа за профилем, совершающим вертикальные колебания, показана на рис. 11. Обратная дорожка Кармана, показанная на рис. 11а, наблюдалась при  $St_A = 0.12$ . Вихрь у передней кромки отделяется от профиля, вместо того чтобы слиться с вихрем у задней кромки. Этот вихрь, значительно меньший в размерах, диффундирует в поле течения, приводя к образованию



**Рис. 8.** Сравнение рассчитанных картин течения в следе с экспериментальными результатами [14] для профиля, совершающего вертикальные колебания. Экспериментальная картина течения в следе для значений приведенной частоты  $k = 3.0$  (а) и  $12.5$  (в) и рассчитанная картина течения в следе для значений приведенной частоты  $k = 3.0$  (б) и  $12.5$  (г).

обратного следа Кармана. След за профилем отклоняется с ростом  $St_A$  ( $St_A = 0.18$ ); он представлен на рис. 11б. Вихри противоположного знака образуют пару, как раз перед отклонением следа. Направление отклонения следа зависит от образования вихревой пары. Пара, состоящая из вих-



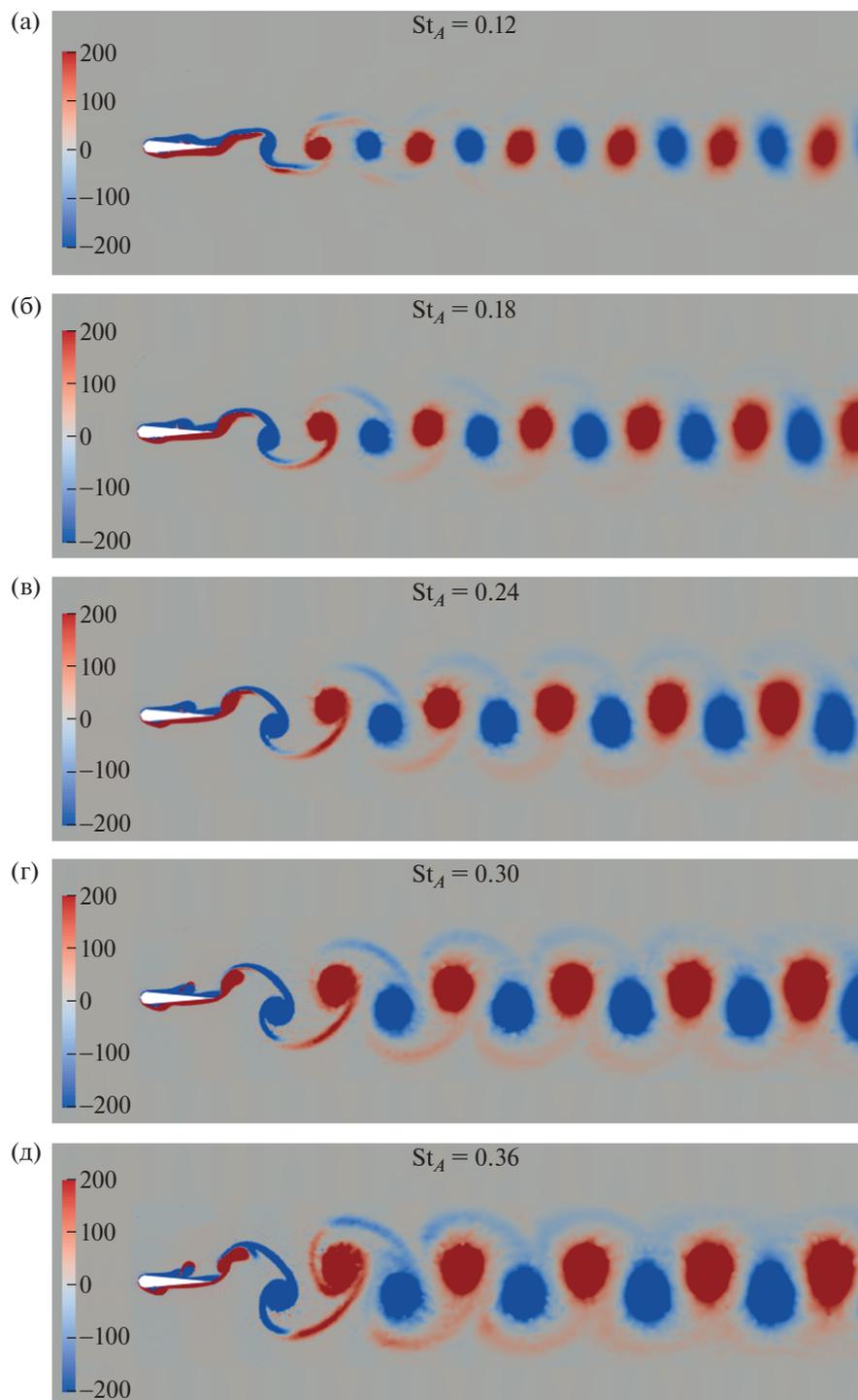
**Рис. 9.** Зависимость коэффициента тяги ( $C_t$ ) от безразмерной частоты машущего движения ( $f^*$ ) для профиля, совершающего смешанные (вертикально-угловые) колебания.

ря, вращающегося по часовой стрелке, и вихря, вращающегося в противоположном направлении, создает диполь, индуцирующий движение вверх и образование отклоненного вверх следа. Пара, состоящая из вихря, вращающегося против часовой стрелки, и вихря, вращающегося в противоположном направлении, создает другой диполь, индуцирующий движение вниз и образование отклоненного вниз следа. Направление отклонения следа меняется при дальнейшем увеличении  $St_A$  до 0.24 (рис. 11в). Явление изменения направления отклоненности следа при изменении параметров махания называется переключением струи [37]. След с отклоненным расположением подвергается возмущениям при дальнейшем росте  $St_A$  до 0.30 (рис. 11г). Вихри у передней кромки, образовавшиеся над профилем, проходят вокруг передней кромки в нижнюю часть профиля и наоборот. Эти вихри в конце концов диффундируют в поле течения и не сказываются на структуре следа. При  $St_A = 0.36$  наблюдается хаотическая структура следа (рис. 11д). Диполи, формирующиеся в хаотическом следе, рассеиваются, образуя полностью нерегулярные структуры.

Структура следа за профилем, совершающим смешанные колебания при различных значениях  $St_A$ , представлена на рис. 12. Обратное кармановское расположение в следе наблюдается при  $St_A = 0.12$  (рис. 12а). С ростом  $St_A$  вихри увеличиваются в размерах (рис. 12б и 12в). Вихри у передней кромки отделяются от профиля, медленно движутся к задней кромке и сливаются с вихрями, образовавшимися у задней кромки, образуя обратную дорожку Кармана. Дальнейшее увеличение  $St_A$  до 0.30 изменяет поведение вихрей у передней кромки. Вихри, образовавшиеся у передней кромки, вместо того чтобы слиться с вихрями у задней кромки, эжектируются в поток и со временем диффундируют в нем. Увеличение  $St_A$  до 0.36 приводит к росту размеров вихрей у передней кромки и им требуется больше времени, чтобы диффундировать в потоке. Вихри передней кромки, сравнительно небольшие в размерах, располагаются по обе стороны от вихревой дорожки, образованной вихрями с задней кромки. Вихри задней кромки деформируют вихри с передней кромки вскоре после их эжекции в поток, тем увеличивая их диффузию и способствуя установлению обратной дорожки Кармана.

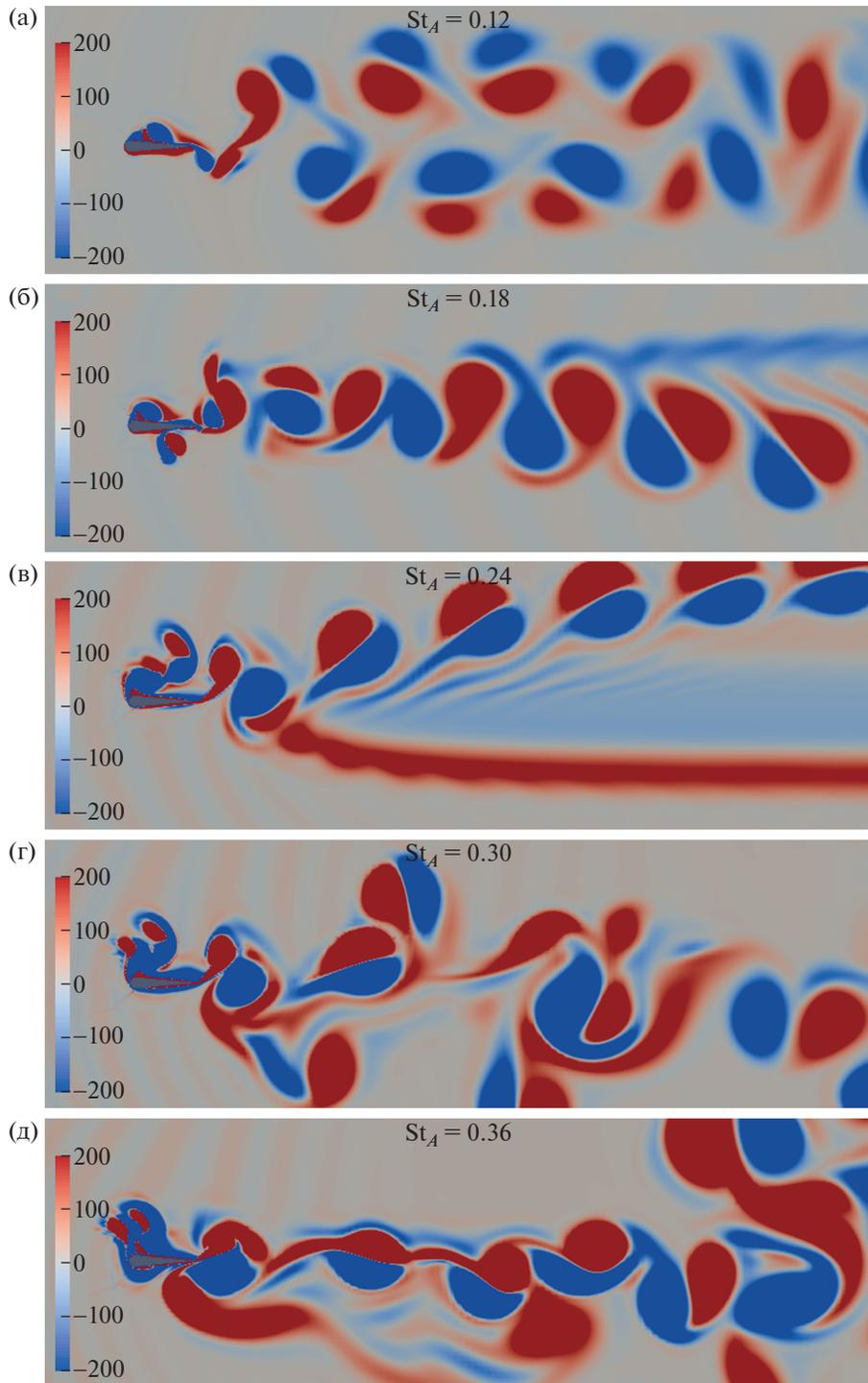
## 2.2. Вихри у передней и задней кромок

В настоящем исследовании профиль начинает машущие колебания со среднего положения (рис. 2), движется вверх до крайнего верхнего положения, далее опускается вниз до крайнего



**Рис. 10.** Структура следа за профилем, совершающим угловые колебания, визуализированная посредством  $z$ -компоненты завихренности ( $\omega_z$ ). Красный цвет соответствует положительным вихрям, вращающимся против часовой стрелки, а синий – отрицательным вихрям, вращающимся по часовой стрелке.

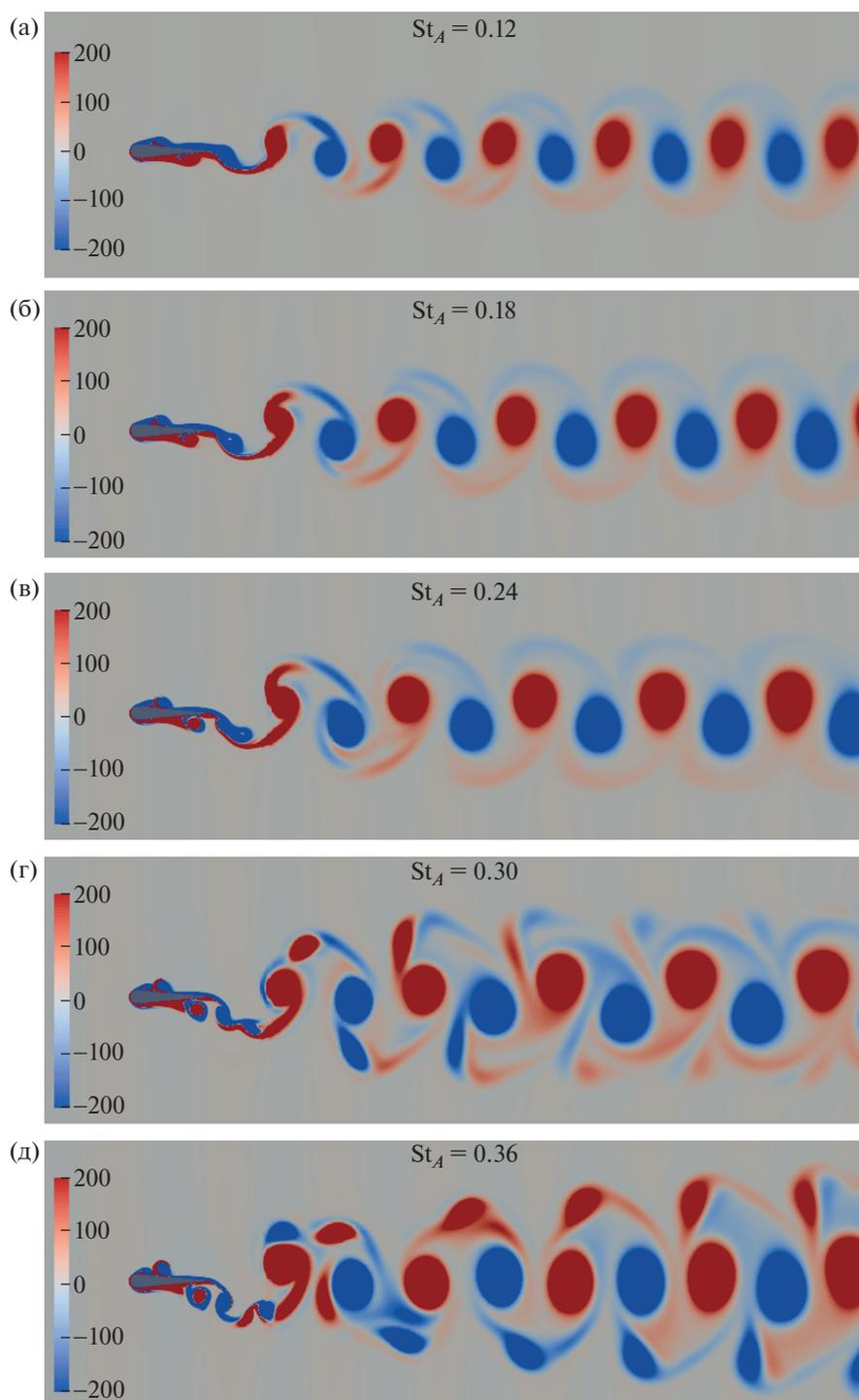
нижнего положения и, наконец, возвращается в среднее положение, завершая один цикл. При машущих колебаниях всех трех типов под профилем развивается положительная завихренность, а над профилем – отрицательная, а в конце хода профиля вверх и вниз срываются вихри. Отрицательные вихри отсоединяются в конце хода вверх, а положительные – в конце хода вниз. Та-



**Рис. 11.** Структура следа за профилем, совершающим вертикальные колебания, визуализированная посредством  $z$ -компоненты завихренности ( $\omega_z$ ). Красный цвет соответствует положительным вихрям, вращающимся против часовой стрелки, а синий – отрицательным вихрям, вращающимся по часовой стрелке.

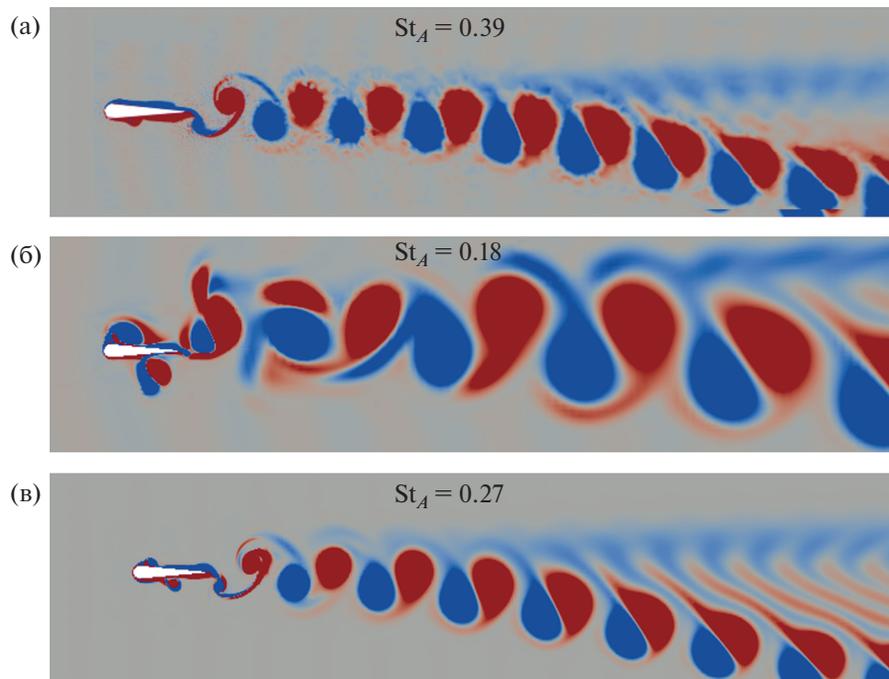
ким образом, в течение одного колебательного цикла возникают два вихря; такой тип следа называется  $2S$ -следом. Обозначение  $S$  соответствует единичному (single) вихрю, согласно [38].

При угловых колебаниях профиля вихрь с передней кромки сливается с вихрями с задней кромки и образует  $2S$ -след во всем исследованном диапазоне  $St_A$ . Однако при вертикальных ко-



**Рис. 12.** Структура следа за профилем, совершающим вертикально-угловые колебания, визуализированная посредством  $z$ -компоненты завихренности ( $\omega_z$ ). Красный цвет соответствует положительным вихрям, вращающимся против часовой стрелки, а синий – отрицательным вихрям, вращающимся по часовой стрелке.

лебаниях вихрь у передней кромки эволюционирует, вследствие чего меняется структура следа, что оказывает влияние на силу, действующую на профиль. Эти изменения могут быть объяснены быстрыми вариациями угла атаки при вертикальных колебаниях. В результате при больших значениях  $St_A$  вихри с передней кромки не сливаются с вихрями у задней кромки, а сносятся в поток.



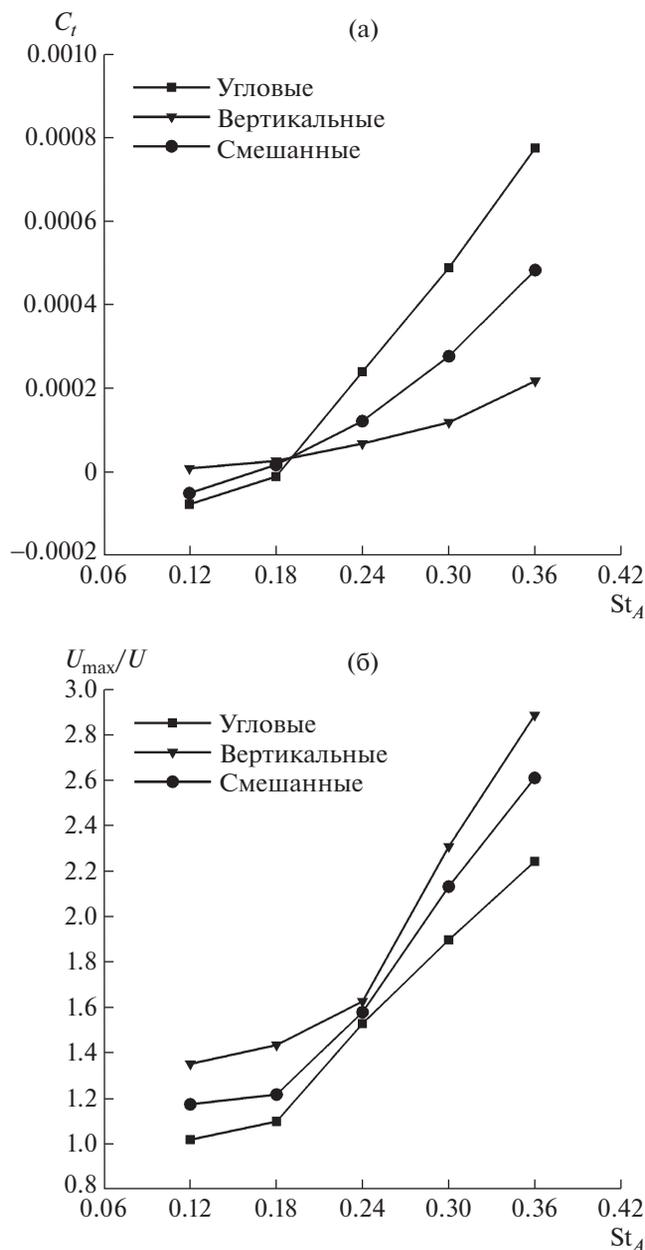
**Рис. 13.** Отклоненный след для машущих движений трех типов: угловые (а), вертикальные (б) и смешанные (в) колебания. Красный цвет соответствует положительным вихрям, вращающимся против часовой стрелки, а синий – отрицательным вихрям, вращающимся по часовой стрелке.

Однако вихри у передней кромки относительно невелики и диффундируют в потоке в исследованном диапазоне параметров. Поэтому дальний след преобразуется в обратный след Кармана. В смешанных колебаниях при малых значениях  $St_A$  характеристики вихрей у передней кромки подобны вихрям в случае угловых колебаний. Однако при более высоких значениях  $St_A$  поведение вихрей у передней кромки идентично случаю вертикальных колебаний. Представляется, что вихревая динамика в случае смешанных колебаний определяется угловыми колебаниями при малых  $St_A$  и вертикальными колебаниями при высоких  $St_A$ .

### 2.3. Отклоненный след

В отклоненном следе вихревая конфигурация отклоняется от линии симметрии. При симметричной структуре следа результирующая сила, действующая на профиль, параллельна линии симметрии (в направлении тяги или сопротивления). В отклоненном следе результирующая сила также наклонена к линии симметрии, что физически означает наличие у этой силы составляющих в направлении тяги и подъемной силы. Таким образом, диапазон параметров, в котором существует отклоненный след, важен практически. В настоящей работе параметр машущего движения постепенно увеличивался, чтобы определить то его значение, при котором след за профилем становится отклоненным (для всех типов колебаний). На рис. 13 представлены картины отклоненных следов, полученные для всех типов колебаний. След за профилем, совершающим угловые колебания, отклоняется при  $St_A = 0.39$ , а след за вертикально колеблющимся профилем отклоняется значительно ранее, при  $St_A = 0.18$ . Отклонение следа за профилем, совершающим смешанные колебания, происходит при сравнительно высоком значении  $St_A$  около 0.27, но это значение ниже, чем то значение, при котором отклоняется след за профилем в угловых колебаниях. Причиной этому влияние вертикальных колебаний, присутствующих в смешанных колебаниях профиля. Это обстоятельство также подтверждает наблюдение, согласно которому динамика вихрей в смешанных колебаниях определяется угловыми колебаниями при малых значениях  $St_A$  и вертикальными колебаниями при больших значениях  $St_A$ .

Здесь следует отметить неустойчивости, порождаемые образованием отклоненного следа (нарушением симметрии). Анализ устойчивости показал, что нарушение симметрии дорожки Кармана обусловлено узловатыми возмущениями [39], а такое же нарушение в случае обратной до-



**Рис. 14.** Зависимость коэффициента тяги ( $C_t$ ) (а) и отношения  $U_{max}/U_0$  (б) от числа Струаля  $St_A$ , вычисленного по амплитуде.

рожки связано с изгибными возмущениями [40]. Сдваивание вихрей приводит к образованию диполя, и результирующий момент, производимый диполем, может действовать как изгибная неустойчивость по отношению к симметричной обратной дорожке Кармана. Таким образом, образование диполя можно рассматривать как фактор, инициирующий отклонение следа. Как уже сказано выше (раздел 2.1), направление отклонения определяется порядком, в котором происходит образование вихревой пары.

#### 2.4. Аэродинамические силы

Сила, действующая на профиль, зависит от структуры следа; она может быть силой сопротивления или тяги. Структура следа, производящего сопротивление, близка к вихревой дорожке Кармана, а структура следа, производящего тягу, близка к обратной вихревой дорожке Кармана. В настоящей работе рассчитаны средние силы, действующие на профиль при различных типах колебаний и проведено их сравнение. Данные для вычисления осредненной силы берутся после отбрасывания данных, соответствующих начальному промежутку времени. На рис. 14а пред-

ставлена зависимость коэффициента тяги ( $C_t$ ) от числа Струхаля, вычисленного по амплитуде колебаний ( $St_A$ ), для машущих колебаний различных типов. Отрицательные значения  $C_t$  соответствуют коэффициенту сопротивления. На вертикально колеблющийся профиль сила тяги действует при всех рассмотренных значениях  $St_A$ . Однако переход к хаотической структуре следа (рис. 11г и 11д) ограничивает рост силы тяги с увеличением  $St_A$ . На профиль, совершающий угловые и смешанные колебания, сила сопротивления действует при  $St_A = 0.12$ . Однако структура следа в этих случаях соответствует обратной дорожке Кармана (рис. 10а и 12а), т.е., существование обратной дорожки Кармана недостаточно для того, чтобы считать след производящим тягу. С ростом  $St_A$  сила сопротивления превращается в тягу. Поведение аэродинамической силы, действующей на профиль, совершающий смешанные колебания, следует тенденциям, проявляемым профилем в угловых колебаниях при малых значениях  $St_A$  и вертикально колеблющимся профилем при более высоких значениях  $St_A$ . Переход от сопротивления к тяге для профиля, совершающего угловые колебания, происходит приблизительно при  $St_A = 0.18$ . Однако переход в структуре течения в следе происходит значительно ранее, т.е. переход в структуре следа предшествует переходу от сопротивления к тяге.

Максимальная продольная скорость ( $U_{max}$ ) в следе за машущим профилем является важным параметром, влияющим на максимальное значение силы, действующей на профиль. Рассмотрим влияние параметров махания на  $U_{max}$  при различных видах колебаний, сделав это в безразмерном виде. За масштаб для  $U_{max}$  выбрана скорость набегающего потока ( $U$ ). На рис. 14б представлена зависимость отношения  $U_{max}/U$  от частоты  $St_A$ . Эта зависимость построена для расстояния  $x = 2C$  от задней кромки. Это положение выбрано на основании того наблюдения, что влияние машущих движений профиля ослабевает в дальнем следе [35]. Величина  $U_{max}/U$  максимальна в случае вертикальных колебаний и минимальна для угловых колебаний. При  $St_A = 0.24$  величина  $U_{max}/U$  практически одинакова для колебаний всех типов. Поведение  $U_{max}/U$  при смешанных колебаниях очень близко к случаю угловых колебаний, когда  $St_A$  меньше 0.24, и ближе к поведению  $U_{max}/U$  при вертикальных колебаниях, когда  $St_A$  выше 0.24. Итак, значение  $St_A = 0.24$  можно рассматривать как критическое значение, при котором угловые и вертикальные типы колебаний меняются ролями в определении характера смешанных вертикально-угловых колебаний.

**2.4.1. Взаимозависимость конфигурации следа и возникающих сил.** В табл. 1 дана классификация следов по признаку силы, действующей на профиль, совершающий колебания различных типов. Это могут быть силы сопротивления и тяги. В случае нейтрального следа на профиль не действуют ни тяга, ни сопротивление. Картины завихренности показывают, что для профиля, совершающего угловые колебания, структура следа, соответствующая  $St_A = 0.12$ , подобна структуре нейтрального следа (рис. 10а), а структура, соответствующая  $St_A = 0.18$ , подобна структуре обратной дорожки Кармана (рис. 10б). Нейтральный след не оказывает силового воздействия на профиль. С другой стороны, след в виде обратной дорожки Кармана должен создавать силу тяги. Однако результаты расчетов показывают, что для обоих значений  $St_A$  на профиль действует сила сопротивления. Эта нестыковка между структурой следа и создаваемой силой имеет место и в случае смешанных колебаний при  $St_A = 0.12$ . Это означает, что при малых величинах параметров махания структура следа может и не быть признаком типа силы, действующей на профиль. Существенно, что должно существовать такое критическое значение  $St_A$ , выше которого структура следа и сила, действующая на профиль, взаимозависимы, а ниже этого значения сила, действующая на профиль, не определяется структурой следа. Данные табл. 1 показывают, что это критическое значение может различаться для машущих колебаний различных типов.

## 2.5. Напряжения Рейнольдса

Нестационарные переменные в периодическом течении состоят из средней, периодической и случайной компонент [41]. Математически это можно выразить следующим образом

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' + \tilde{\phi} \quad (2.1)$$

где  $\phi$  – нестационарная переменная,  $\bar{\phi}$  – ее средняя компонента,  $\phi'$  – периодическая компонента и  $\tilde{\phi}$  – случайная компонента. Средняя ( $\bar{\phi}$ ) и периодическая ( $\phi'$ ) компоненты присутствуют как

**Таблица 1.** Классификация течений в следе по признаку силы, действующей на профиль, совершающий машущие движения различных типов при различных значениях  $St_A$ 

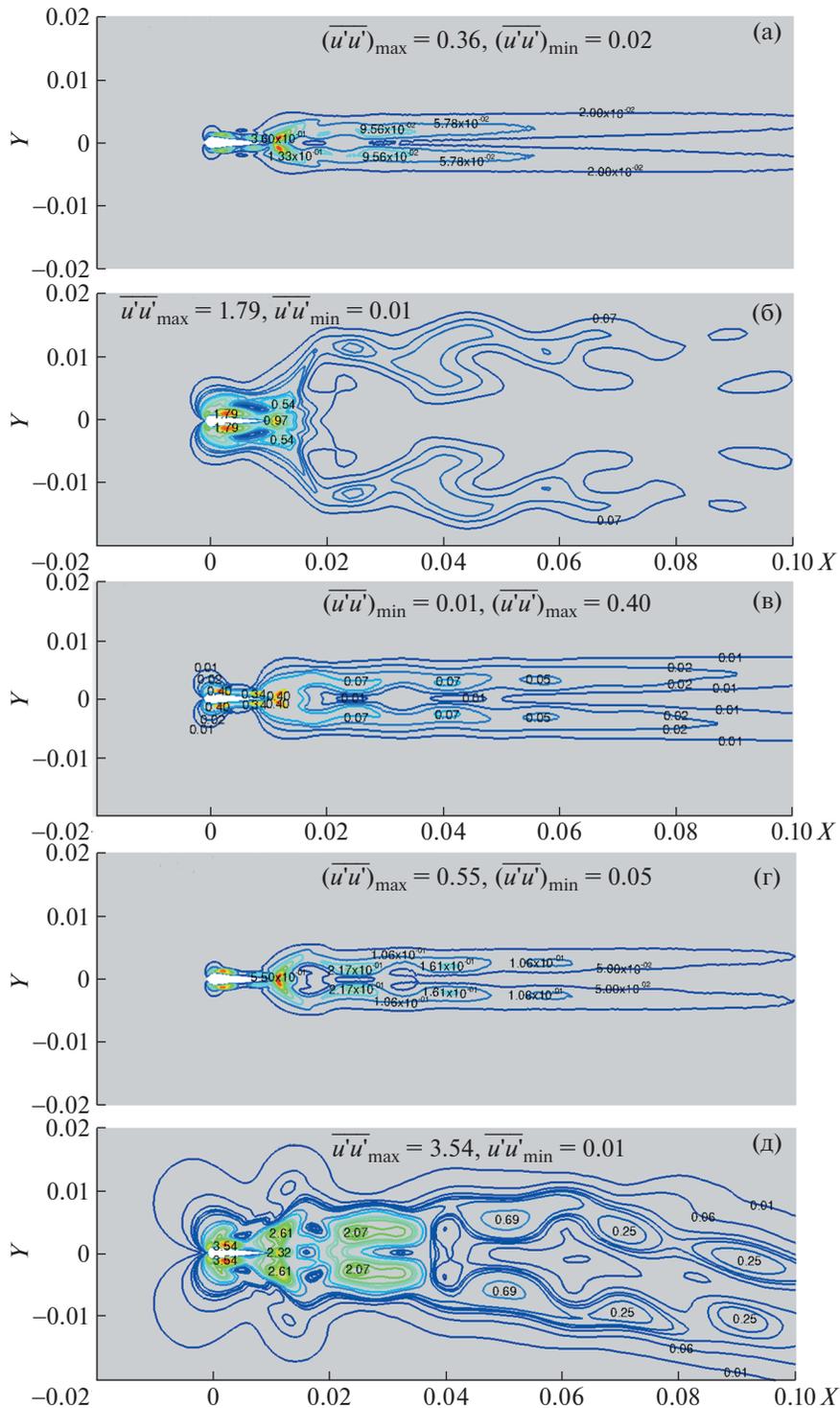
$St_A$	Угловые колебания	Вертикальные колебания	Смешанные колебания
0.12	Сопrotивление	Тяга	Сопrotивление
0.18	Сопrotивление	Тяга	Тяга
0.24	Тяга	Тяга	Тяга
0.30	Тяга	Тяга	Тяга
0.36	Тяга	Тяга	Тяга

в ламинарном, так и в турбулентном течении, а случайная компонента ( $\tilde{\phi}$ ) имеет место только в турбулентном течении. В настоящей работе рассматриваются лишь случай ламинарных течений и нестационарность определяется лишь периодической компонентой ( $\phi'$ ). Нормальные осредненные напряжения в направлениях  $x$  и  $y$  обозначаются  $\overline{u'u'}$  и  $\overline{v'v'}$  соответственно.

На рис. 15 представлены изолинии величины  $\overline{u'u'}$  для различных типов машущего движения при различных  $St_A$ . При  $St_A = 0.12$  картина изолиний  $\overline{u'u'}$  симметрична для всех трех типов машущих колебаний (рис. 16а–16в), что указывает на периодичность течения. За задней кромкой картина изолиний  $\overline{u'u'}$  разделяется на две части относительно линии симметрии. При вертикальных движениях максимальное значение  $\overline{u'u'}$  ( $(\overline{u'u'})_{\max}$ ) достигается у передней кромки (рис. 15б), где поток испытывает максимальные возмущения, а вихрь у передней кромки существенно усиливает напряжения Рейнольдса. Напротив, при угловых движениях максимум достигается вблизи задней кромки (рис. 15а), поскольку у передней кромки поток подвергается меньшим возмущениям и влияние вихря у передней кромки сравнительно невелико. Вертикальные движения порождают существенные нагрузки в поле течения (рис. 15б) по сравнению с другими типами машущих колебаний (рис. 15а и 15в). Распределение  $\overline{u'u'}$  в случае смешанных колебаний определяется взаимодействием между угловыми и вертикальными колебаниями.

Величина  $\overline{u'u'}$  растет с увеличением  $St_A$  (рис. 15г–15е). Малые изменения  $St_A$  приводят к значительным изменениям в поле  $\overline{u'u'}$ . При этом рост величины  $\overline{u'u'}$  с ростом  $St_A$  имеет один и тот же порядок для машущих колебаний всех типов. Пиковые значения  $\overline{u'u'}$  достигаются на пути распространения вихря. Пиковые значения  $\overline{u'u'}$  по обеим сторонам от линии симметрии указывают на вращение жидкости относительно среднего течения [41]. Величина  $\overline{u'u'}$  близка к нулю вдоль линии симметрии, так как вдоль этой линии вихрь не распространяется. Изолинии  $\overline{u'u'}$  для профиля, совершающего вертикальные колебания, отклоняются в дальнем следе (рис. 15д) подобно изолиниям завихренности (рис. 11б). Однако в следе за профилем, совершающим угловые (рис. 15г) и смешанные (рис. 15е) колебания, отклонение не наблюдается. Дальнейшее увеличение  $St_A$  до 0.36 приводит к динамическому росту величины  $\overline{u'u'}$  в случае вертикальных движений (рис. 15з) по сравнению с машущими движениями других типов (рис. 15ж и 15и). Отклонение следа за вертикально колеблющимся профилем при  $St_A = 0.36$  (рис. 15з) указывает на апериодичность, развивающуюся в потоке.

На рис. 16 представлены изолинии величины  $\overline{v'v'}$  для различных типов машущего движения при различных  $St_A$ . Для всех  $St_A$  величина  $\overline{v'v'}$  выше, чем величина  $\overline{u'u'}$ . Так же как и для  $\overline{u'u'}$ , максимальное значение  $\overline{v'v'}$  ( $(\overline{v'v'})_{\max}$ ) для вертикально колеблющегося профиля достигается вблизи передней кромки (рис. 16б). В то же время для других типов колебаний положение  $(\overline{v'v'})_{\max}$  находится в окрестности задней кромки (рис. 16а и 16в). Пиковые значения  $\overline{v'v'}$  достигаются вдоль линии симметрии, а не по ее сторонам, как это имеет место в случае  $\overline{u'u'}$ . Это означает, что пиковые значения  $v'$ , как положительные, так и отрицательные, в любом сечении находятся на линии симметрии. В случае профиля, совершающего угловые и смешанные колеба-



**Рис. 15.** Изолинии  $\overline{u'u'}$  за профилем, совершающим колебания различных типов: угловые (а, г, ж), вертикальные (б, д, з) и смешанные (в, е, и).

ния, с ростом до  $St_A = 0.18$  положение  $(\overline{v'v'})_{\max}$  отходит от задней кромки (рис. 16г и 16е). Это положение, при котором вихри пересекают линию симметрии с образованием обратной дорожки Кармана. Для вертикально колеблющегося профиля положение  $(\overline{v'v'})_{\max}$  остается вблизи передней кромки (рис. 16д), что указывает на важность вихря с передней кромки в случае этих ко-

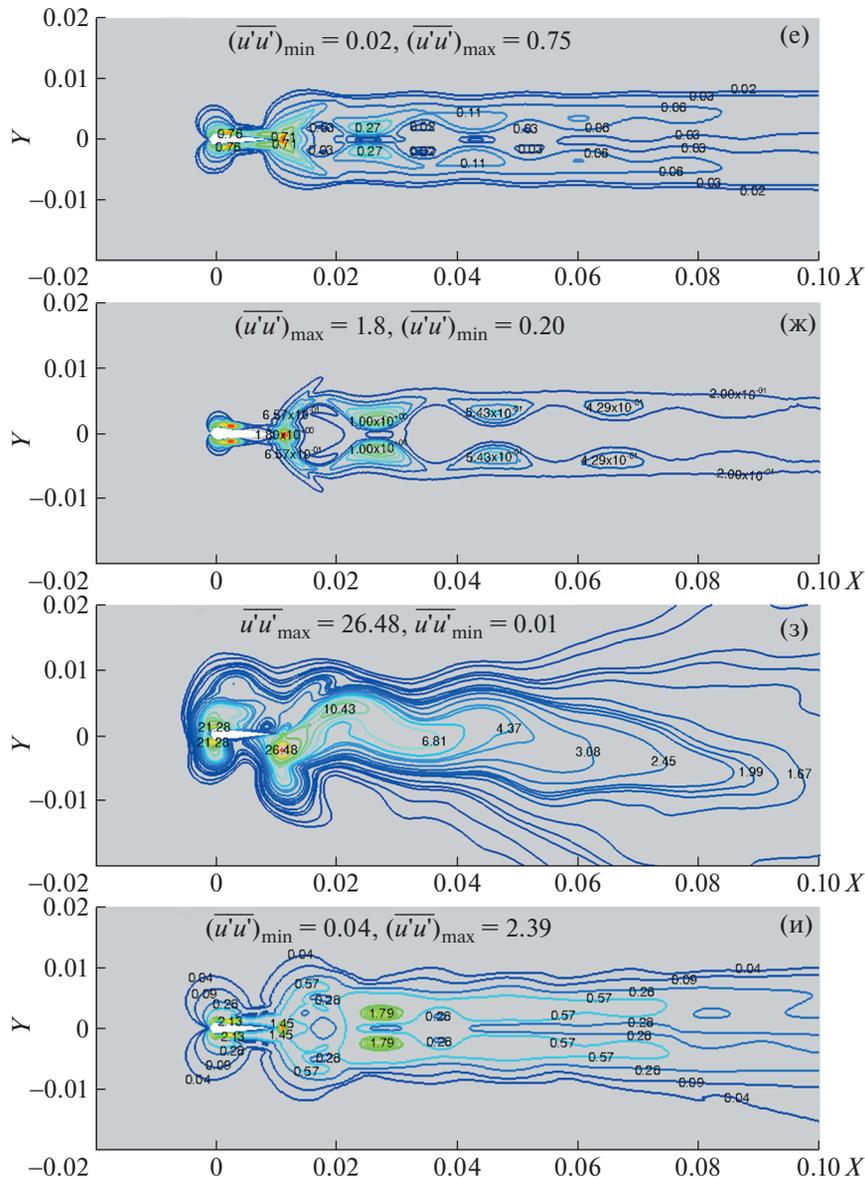
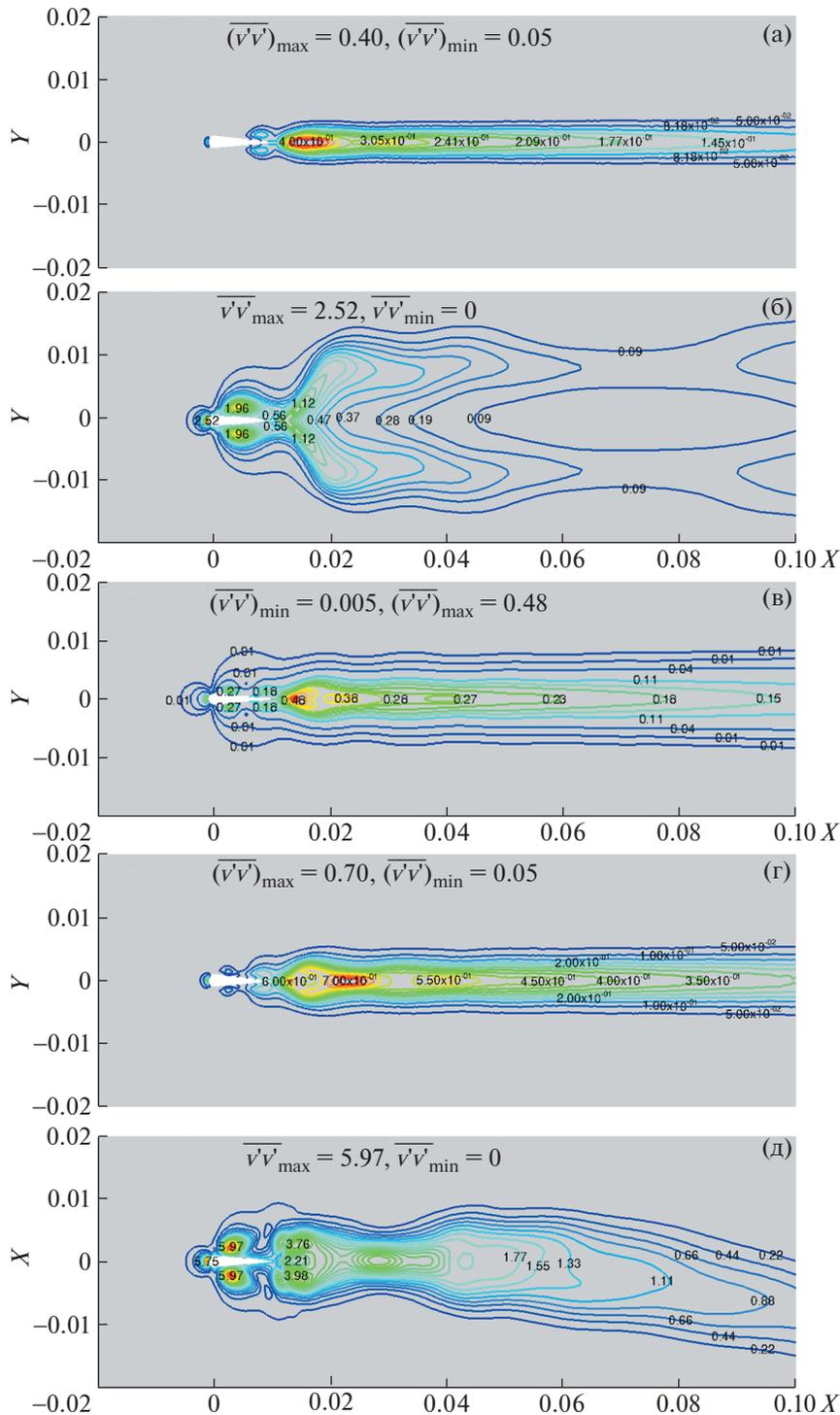


Рис. 15. Окончание

лебаний. Расстояние между задней кромкой профиля и положением  $(\overline{v'v'})_{\max}$  увеличивается с ростом  $St_A$  (рис. 16ж и 16з). С ростом  $St_A$  вихри у задней кромки становятся ярче выраженными и их отрыв от профиля замедляется. Задержка в отрыве вихрей от задней кромки приводит к тому, что они отделяются на больших расстояниях (в направлении  $y$ ) от линии симметрии. Таким образом, вихри пересекают линию симметрии дальше от задней кромки, со смещением максимума  $(\overline{v'v'})_{\max}$ . Данные на рис. 16б подтверждают апериодичность, развивающуюся в потоке с ростом  $St_A$ .

Высокие значения  $\overline{u'u'}$  и  $\overline{v'v'}$  в ближнем следе указывают на значительное перемешивание в жидкости. Однако величины  $\overline{u'u'}$  и  $\overline{v'v'}$  убывают в движущемся потоке вследствие диссипации кинетической энергии. Изолинии напряжений показывают, что максимальные напряжения имеют место для вертикально колеблющегося профиля; за ним следует профиль в смешанном движении. Для профиля, совершающего угловые колебания, возникающие напряжения минимальны. Препятствие, создаваемое для потока машущим профилем, определяет распределение



**Рис. 16.** Изолинии  $\overline{v'v'}$  за профилем, совершающим колебания различных типов: угловые (а, г, ж), вертикальные (б, д, з) и смешанные (в, е, и).

напряжений в поле течения. Энергия, рассеиваемая в потоке машущим профилем, максимальна в случае вертикальных колебаний и минимальна для угловых колебаний. Изолинии напряжений также показывают, что периодические пульсации скорости коррелированы в течение махательного цикла и существенно влияют на течение через компоненты напряжений, развивающиеся в поле течения.

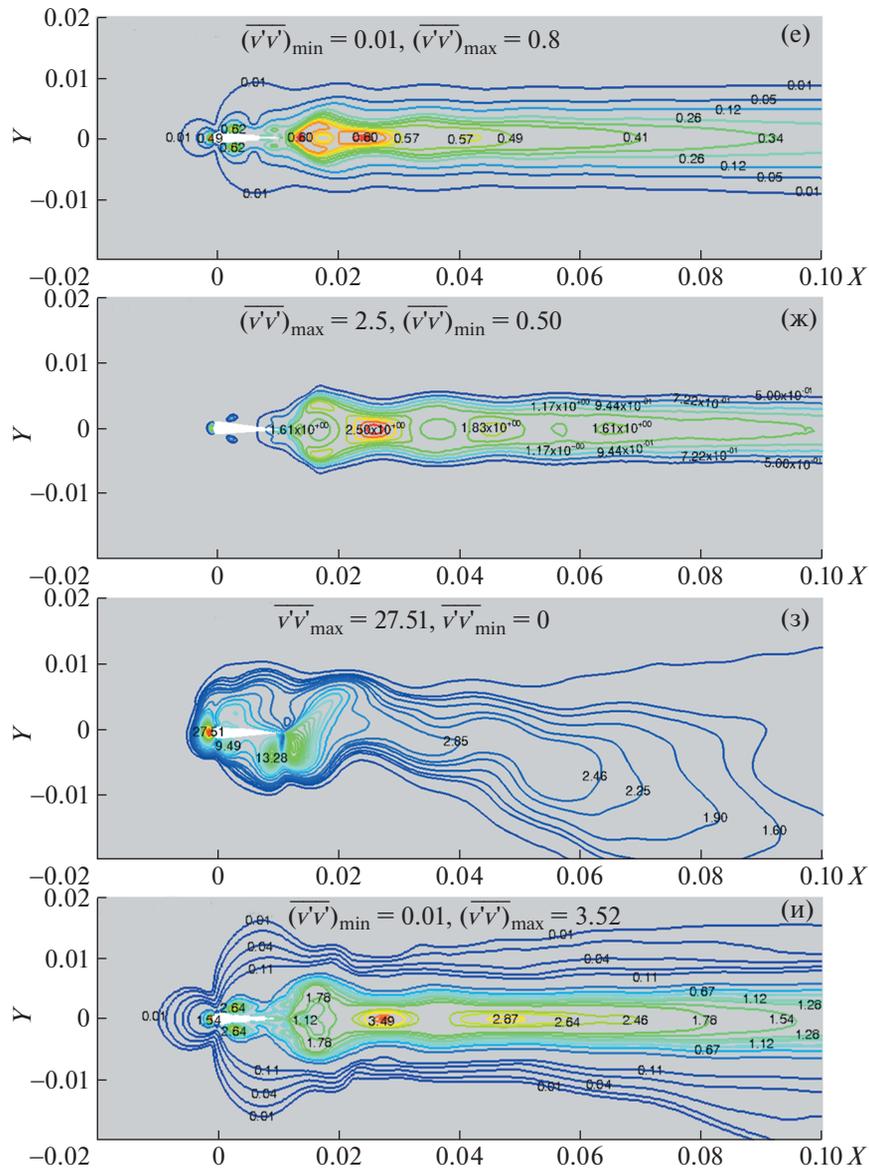


Рис. 16. Окончание

2.6. Собственно ортогональное разложение

Базисные когерентные структуры в следе за машущим профилем исследуются при помощи собственно ортогонального разложения (СОР). Это разложение разбивает поле течения на многочисленные ортогональные моды по признаку обладаемой ими энергии. Анализ этих мод дает возможность понять основные особенности течения. Этот анализ осуществляется методом мгновенных изображений, предложенным в [42]. При этом поле скорости представляется через собственные моды в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^l a_n(t) \phi_n(x)$$

где  $\phi_n(x)$  означает ортогональные собственные моды,  $a_n(t)$  – коэффициенты, зависящие от времени, и  $n$  – номер мгновенного изображения. Величина  $N$  есть полное количество изображений, используемых для выделения СОР-мод. Статистическая стационарность обеспечивается выбором достаточно большого количества изображений.

Матрица скоростей  $R$  строится из мгновенных изображений скорости  $(u_1, u_2, \dots, u_N)$ , полученных в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_N$ .

$$R = [u_1, u_2, \dots, u_N]$$

Мгновенные изображения скорости представляют собой столбцы матрицы  $U$ . Тогда собственные векторы  $(u_j)$  и собственные значения  $(\lambda_j)$  вычисляются для корреляционной матрицы  $S$  в виде

$$S = R^T R$$

При помощи собственных векторов  $(u_j)$  и собственных значений  $(\lambda_j)$  СОР-моды вычисляются следующим образом

$$\phi_j = U u_j / \sqrt{\lambda_j}$$

Собственные значения соответствуют кинетическим энергиям, содержащимся в каждой моде. Как правило, матрица корреляции  $S$  имеет размерность  $m \times m$  ( $m$  – количество узлов сетки), что требует больших вычислительных мощностей для вычисления собственных векторов. Преимущество метода мгновенных изображений состоит в том, что необходимое количество этих изображений ( $n$ ) значительно меньше, чем число узлов сетки ( $n \ll m$ ). Поэтому работа с матрицей  $n \times n$  при вычислении собственных векторов приносит значительный выигрыш при вычислениях.

**2.6.1. Когерентные структуры.** СОР анализ выполнен в малой области размерами  $9C \times 4C$ , как показано на рис. 2. Размеры этой области выбраны так, чтобы эффективно уловить динамику течения в ближнем следе. При помощи метода мгновенных изображений отобрано 640 изображений через равные промежутки времени в течение 20 последовательных махательных циклов. Сравнительное исследование результатов СОР-анализа выполнено для рассмотренных машущих колебаний при различных значениях  $St_A$ . Для сравнительного исследования выбрана мода, содержащая наибольшее количество энергии (мода 1). На рис. 17 представлены результаты для моды 1 СОР за машущим крылом, совершающим угловые (слева) и вертикальные (справа) колебания. Когерентные структуры расположены в антисимметричном порядке относительно линии симметрии, т.е. структуры с противоположным направлением вращения чередуются по обеим сторонам от линии симметрии.

Когерентные структуры за профилем, совершающим угловые колебания, являются более компактными и концентрированными (рис. 17а), тогда как за вертикально колеблющимся профилем они более разбросаны (рис. 17б). Такое разбросанное расположение связано с более интенсивным переносом энергии от вертикально колеблющегося профиля к потоку жидкости. Когерентные структуры за профилем, совершающим угловые колебания, раздвигаются с увеличением  $St_A$  (рис. 17в, д, ж, и). Однако они не проявляют никакой тенденции к апериодичности. Когерентные структуры за профилем, совершающим вертикальные колебания, отклоняются (рис. 17г) вместе с отклонением следа. Но моды, обладающие более низкими энергиями (не представлены здесь), не испытывают отклонения, т.е. рост  $St_A$  не оказывает на них влияния. Это означает, что отклоненное среднее течение само обладает структурами, чьи характеристики полностью отличны от характеристик среднего течения [43]. Дальнейшее увеличение  $St_A$  до 0.24 приводит к отклонению в высоко энергетических модах (рис. 17е), так же как низко энергетические моды и все СОР моды ответственны за характер среднего течения. При  $St_A = 0.30$  апериодичность, развивающаяся в потоке, начинает влиять на эволюцию когерентных структур (рис. 17з, к). Структуры в поле течения подвергаются случайным возмущениям и становятся полностью непредсказуемыми. Для краткости когерентные структуры за машущим крылом здесь не представлены. Качественно они подобны структурам в следе и указывают на периодичность в течении.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено ламинарное обтекание машущего профиля, совершающего колебания различных типов, двумерным равномерным потоком несжимаемой жидкости. Исследование проведено при фиксированном числе Рейнольдса  $Re_c = 2640$  и числах Струхала  $St_A$  в диапазоне от 0.1 до 0.4. Выполнено сравнение характеристик следа за профилем, совершающим угловые, вертикальные и смешанные колебания. При машущем движении профиля под и над его поверхностью

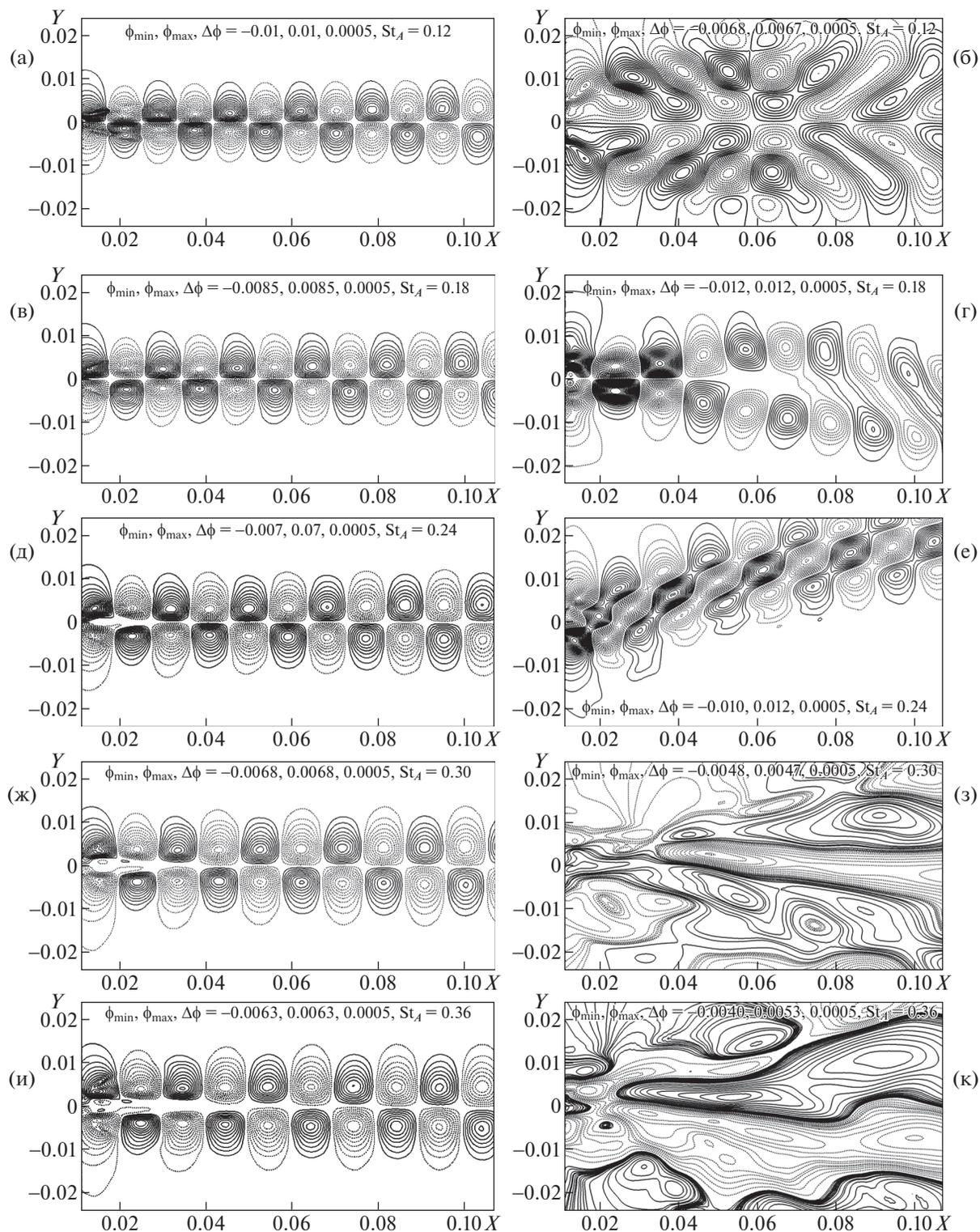


Рис. 17. Когерентные структуры моды 1 в следе за профилем, совершающим угловые (слева) и вертикальные (справа) колебания, определенные посредством собственно ортогонального разложения.

развиваются положительная и отрицательная завихренности соответственно. Механизм образования вихрей одинаков для всех трех типов рассмотренных колебаний и зависит от начального направления движения профиля. Для различных параметров махания наблюдались обратный

след Кармана, отклоненный след и хаотический след. След за вертикально колеблющимся профилем отклоняется от симметричного положения значительно ранее, чем при машущих движениях двух других типов. Отклонение следа связано с эволюцией вихрей у передней кромки профиля. Фактором, влияющим на начало отклонения следа, может быть образование диполя. В целом имеет место ситуация, когда образование обратного следа Кармана способствует развитию тяги, действующей на профиль. Однако измерения сил показывают, что образование обратного следа Кармана предшествует созданию тяги на профиле.

Динамика вихрей в случае смешанных колебаний профиля определяется угловыми колебаниями при малых значениях  $St_A$  и вертикальными колебаниями при больших значениях  $St_A$ . Измерения скорости в следе показывают, что переход от одного определяющего влияния к другому происходит приблизительно при  $St_A = 0.24$ . Измерения сил показывают, что должно существовать критическое значение  $St_A$ , ниже которого структура следа и сила, действующая на профиль, независимы друг от друга. В исследованном диапазоне параметров периодическая компонента пульсаций скорости развивает неизотропное поле напряжений вокруг машущего профиля. В следе за машущим профилем величина  $\overline{v'v'}$  преобладает над  $\overline{u'u'}$ . Анализ компонент напряжений показывает, что увеличение  $St_A$  оказывает большее влияние на вертикально колеблющийся профиль, чем для двух других типов машущих движений. Также он показывает, что энергия, переносимая от машущего профиля в поток, максимальна в случае вертикально колеблющегося профиля, далее следует случай смешанных колебаний и, наконец, угловых. Периодические компоненты пульсаций скорости скоррелированы во все моменты времени и вносят существенный вклад в картину течения. Качественная структура мод, полученных при собственно ортогональном разложении решений, показывает, что при периодических колебаниях профилей в потоке развивается апериодичность.

Работа выполнена при поддержке Совета по научным и промышленным исследованиям Правительства Индии.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oshima H., Ramaprian B.* Velocity measurements over a pitching airfoil // *AIAA J.* 1997. V. 35. № 1. P. 119–126.
2. *Sarkar S., Venkatraman K.* Numerical simulation of thrust generating flow past a pitching airfoil // *Computers Fluids.* 2006. V. 35. № 1. P. 16–42.
3. *Deng J., Sun L., Shao X.* Dynamical features of the wake behind a pitching foil // *Phys. Rev. E* 2015. V. 92. № 6. P. 063013.
4. *Ashraf I., Agrawal A., Khan M.H., Srivastava A., Sharma A., et al.* Thrust generation and wake structure for flow across a pitching airfoil at low Reynolds number // *Sadhana.* 2015. V. 40. № 8. P. 2367–2379.
5. *Lai J., Platzer M.* Jet characteristics of a plunging airfoil // *AIAA J.* 1997. V. 37. № 12. P. 1529–1537.
6. *Lewin G.C., Haj-Hariri H.* Modeling thrust generation of a two-dimensional heaving airfoil in a viscous flow // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 492. P. 339–362.
7. *Ashraf M., Young J., Lai J.* Oscillation frequency and amplitude effects on plunging airfoil propulsion and flow periodicity // *AIAA J.* 2012. V. 50. № 11. P. 2308–2324.
8. *Martín-Alcántara A., Fernandez-Feria R., Sanmiguel-Rojas E.* Vortex flow structures and interactions for the optimum thrust efficiency of a heaving airfoil at different mean angles of attack // *Phys. Fluids.* 2015. V. 27. № 7. P. 073602.
9. *Guglielmini L., Blondeaux P.* Propulsive efficiency of oscillating foils // *Europ. J. Mech. -B/Fluids.* 2004. V. 23. № 2. P. 255–278.
10. *Moriche M., Flores O., Garcia-Villalba M.* On the aerodynamic forces on heaving and pitching airfoils at low Reynolds number // *J. Fluid Mech.* 2017. V. 828. P. 395–423.
11. *Floryan D., Van Buren T., Rowley C. W., Smits A. J.* Scaling the propulsive performance of heaving and pitching foils // *J. Fluid Mech.* 2017. V. 822. P. 386–397.
12. *Zheng H., Xie F., Zheng Y., Ji T., Zhu Z.* Propulsion performance of a two-dimensional flapping airfoil with wake map and dynamic mode decomposition analysis // *Phys. Rev. E.* 2019. V. 99. № 6. P. 063109.
13. *Triantafyllou M., Triantafyllou G., Gopalkrishnan R.* Wake mechanics for thrust generation in oscillating foils // *Phys. Fluids A: Fluid Dyn.* 1991. V. 3. № 12. P. 2835–2837.
14. *Jones K., Dohring C., Platzer M.* Experimental and computational investigation of the Knoller–Betz effect // *AIAA J.* 1998. V. 36. № 7. P. 1240–1246.
15. *Vandenbergh N., Zhang J., Childress S.* Symmetry breaking leads to forward flapping flight // *J. Fluid Mech.* 2004. V. 506. P. 147–155.
16. *Schnipper T., Andersen A., Bohr T.* Vortex wakes of a flapping foil // *J. Fluid Mech.* 2009. V. 633. P. 411–423.

17. Jones K., Platzer M. Numerical computation of flapping-wing propulsion and power extraction / 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 1997. P. 826.
18. Godoy-Diana R., Aider J.L., Wesfreid J.E. Transitions in the wake of a flapping foil // Phys. Rev. E. 2008. V. 77. № 1. P. 016308.
19. Badrinath S., Bose C., Sarkar S. Identifying the route to chaos in the flow past a flapping airfoil // Europ. J. Mech. -B/Fluids. 2017. V. 66. P. 38–59.
20. Bose C., Sarkar S. Investigating chaotic wake dynamics past a flapping airfoil and the role of vortex interactions behind the chaotic transition // Phys. Fluids. 2018. V. 30. № 4. P. 047101.
21. Godoy-Diana R., Marais C., Aider J.L., Wesfreid J.E. A model for the symmetry breaking of the reverse Bénard–von Kármán vortex street produced by a flapping foil // J. Fluid Mech. 2009. V. 622. P. 23–32.
22. Cleaver D.J., Wang Z., Gursul I. Bifurcating flows of plunging airfoils at high Strouhal numbers // J. Fluid Mech. 2012. V. 708. P. 349–376.
23. Medjroubi W., Stoevesandt B., Peinke J. Wake classification of heaving airfoils using the spectral/hp element method // J. Comput. Appl. Math. 2012. V. 236. № 15. P. 3774–3782.
24. Andersen A., Bohr T., Schnipper T., Walther J.H. Wake structure and thrust generation of a flapping foil in two-dimensional flow // J. Fluid Mech. 2017. V. 812.
25. Mackowski A., Williamson C. Direct measurement of thrust and efficiency of an airfoil undergoing pure pitching // J. Fluid Mech. 2015. V. 765. P. 524–543.
26. Anderson J., Streitlien K., Barrett D., Triantafyllou M. Oscillating foils of high propulsive efficiency // J. Fluid Mech. 1998. V. 360. P. 41–72.
27. Huq A.A., Sankar R.A., Lakshmanan C., Rukesh C., Kulkarni D., Subramanya M., Rajani B. Numerical prediction of aerofoil aerodynamics at low Reynolds number for MAV application // NAL PD CF 910.
28. Ferziger J.H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics. Vol. 3. Springer, 2002.
29. OpenFOAM, The Open Source CFD Toolbox User Guide (2017).
30. Zheng Z.C., Wei Z. Study of mechanisms and factors that influence the formation of vortical wake of a heaving airfoil // Phys. Fluids. 2012. V. 24. № 10. P. 103601.
31. Wei Z., Zheng Z.C. Mechanisms of deflection angle change in the near and far vortex wakes behind a heaving airfoil / 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. 2013, p. 840.
32. Koochesfahani M.M. Vortical patterns in the wake of an oscillating airfoil // AIAA J. 1989. V. 27. № 9. P. 1200–1205.
33. Van Buren T., Floryan D., Smits A.J. Scaling and performance of simultaneously heaving and pitching foils // AIAA J. 2019. V. 57. № 9. P. 3666–3677.
34. Bose C., Gupta S., Sarkar S., Dynamic interlinking between near- and far-field wakes behind a pitching–heaving airfoil // J. Fluid Mech. 2021. V. 911. A31.
35. Vineeth V.K., Patel D.K., Roy S., Goli S., Roy A. Investigations into transient wakes behind a custom airfoil undergoing pitching motion // Europ. J. Mech. -B/Fluids. 2019. V. 85. P. 193–213.
36. Ohmi K., Coutanceau M., Loc T.P., Dulieu A. Vortex formation around an oscillating and translating airfoil at large incidences // J. Fluid Mech. 1990. V. 211. P. 37–60.
37. Heathcote S., Gursul I. Jet switching phenomenon for a periodically plunging airfoil // Phys. Fluids. 2007. V. 19. № 2. P. 027104.
38. Williamson C.H., Roshko A. Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder // J. Fluids Struct. 1988. V. 2. № 4. P. 355–381.
39. Dynnikova G.Y., Dynnikov Y.A., Guvernuyuk S. Mechanism underlying Kármán vortex street breakdown preceding secondary vortex street formation // Phys. Fluids. 2016. V. 28. № 5. P. 054101.
40. Dynnikova G.Y., Dynnikov Y.A., Guvernuyuk S., Malakhova T. Stability of a reverse Kármán vortex street // Phys. Fluids. 2021. V. 33. № 2. P. 024102.
41. Saha A.K., Muralidhar K., Biswas G. Vortex structures and kinetic energy budget in two dimensional flow past a square cylinder // Computers Fluids. 2000. V. 29. № 6. P. 669–694.
42. Sirovich L. Turbulence and the dynamics of coherent structures. i. coherent structures // Quart. Appl. Math. 1987. V. 45. № 3. P. 561–571.
43. Vineeth V.K., Patel D.K. Propulsion performance and wake transitions of a customized heaving airfoil // Intern. J. Modern Phys. C. 2021. V. 32. № 9. P. 1–28.