ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 3, с. 56–64

УДК 532.546:536.421

ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ С ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗДЕЛА ГАЗ–НЕФТЬ В РАМКАХ ПОДХОДА БРИНКМАНА

© 2022 г. Г. Г. Цыпкин[a],*, В. А. Шаргатов[a],**

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**E-mail: tsypkin@ipmnet.ru*

***E-mail: shargatov@mail.ru*

Поступила в редакцию 28.11.2021 г.
После доработки 21.12.2021 г.
Принята к публикации 21.12.2021 г.

Рассматривается задача об устойчивости вертикального течения в нефтяном коллекторе с газовой шапкой, когда движение нефти подчиняется уравнению Бринкмана. Выведены граничные условия на подвижной границе газонефтяного контакта и получено базовое решение. Методом нормальных мод исследована устойчивость поверхности раздела газ–нефть. Проведено исследование полученного дисперсионного соотношения. Найдены условия устойчивости течения при всех значениях параметров и показано, что в линейном приближении скорость роста коротковолновых возмущений стремится к нулю при возрастании волнового числа.

Ключевые слова: поверхность раздела газ–нефть, вертикальное течение, уравнение Бринкмана, устойчивость, метод нормальных мод

DOI: 10.31857/S056852812203015X

На нефтяные коллекторы с газовой шапкой приходится значительная доля газовых и нефтяных месторождений [1]. Добыча нефти из таких месторождений обладает определенными особенностями и отличается от разработки чисто нефтяных коллекторов. Так, снижение давления в области, насыщенной нефтью, вызывает движение границы газонефтяного контакта. Движение этой поверхности раздела может быть неустойчивым, что приводит к газовому пробою к добывающей скважине и формированию в пласте и призабойной области неподвижной нефти [2]. В других случаях разрушение в результате неустойчивости поверхности газонефтяного контакта может вызвать дробление потока и формирование остаточной неподвижной нефти в месторождении [3]. На основании этого можно сделать вывод, что определяющим фактором многих процессов является неустойчивость фильтрационных течений.

В последние годы были проведены аналитические и численные исследования неустойчивости поверхностей раздела при фильтрации в геотермальных системах, грунтах и горных породах [4–7]. В этих работах в основе математического описания процесса фильтрации в пористых средах был положен закон Дарси. Найдено, что во многих важных для приложений случаях переход к неустойчивости реализуется для всех значений волнового числа одновременно или при бесконечно больших волновых числах. При этом наиболее быстрорастущей модой неустойчивого течения является мода, соответствующая бесконечно малому линейному размеру. В этом случае можно сделать вывод о неприменимости математической модели, основанной на законе Дарси, для описания как самого перехода к неустойчивости, так и последующего развития течения с разрушением поверхности раздела, приводящим к образованию “пальцев”.

В [8] в рамках теории фильтрации Дарси исследовалась устойчивость поверхности раздела газ–нефть при падении давления в области, насыщенной нефтью. Был найден критерий устойчивости поверхности и показано, что при изменении параметров переход в неустойчивый режим осуществляется одновременно при всех волновых числах. Естественно предположить, что закон Дарси, хорошо описывающий течения с большим характерным масштабом длины, может не всегда давать адекватное математическое описание мелкомасштабных явлений. В этих случаях при исследовании фильтрационных течений вместо закона Дарси предлагается использовать уравнение Бринкмана [9].

Интерес к уравнению Бринкмана, как обобщенной форме уравнения фильтрации Дарси, возник во многом вследствие попыток сформулировать корректные граничные условия на поверхности контакта течения свободной жидкости и течения в пористой среде [10–12]. Свойства уравнения Бринкмана и граничных условий на поверхности контакта свободной жидкости и пористой среды исследовались в работах [13, 14]. Анализ влияния инерционных членов на течение контактирующих свободной жидкости и жидкости в пористой среде в рамках уравнения Бринкмана представлен в [15]. В работе [16] приведены данные экспериментов по устойчивости поверхности раздела между двух смешивающихся жидкостей, проведенных для вертикальной ячейки Хеле-Шоу. Проведено сравнение с результатами исследований линейной устойчивости для течения, подчиняющего уравнению Бринкмана. Устойчивость плоскопараллельного течения свободной жидкости над насыщенной пористой средой рассматривалась в [17]. Дан сравнительный анализ результатов с использованием двух подходов. В одном случае использовалась модель Бринкмана с граничными условиями Очоа-Тапиа–Уитекера, а в другом – уравнения Дарси-Форхгеймера с граничными условиями Биверса-Джозефа.

Эволюция бесконечно малых и конечных локализованных возмущений для движущегося фронта фазового перехода изучалась в [18, 19] в приближении Дарси. Развитие гравитационной неустойчивости в двухслойной жидкости постоянной и переменной вязкости в пористой среде численно исследовалось в [20, 21] также с использованием закона Дарси. Уравнение Бринкмана использовалось в [22] для моделирования течения микрополярной жидкости в пористой среде.

В настоящей работе в рамках обобщенного уравнения фильтрации Бринкмана проведено исследование устойчивости контактной поверхности газ–нефть при понижении давления в области, насыщенной нефтью.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение нефти в пористой среде для случая, когда горизонтальный пласт, насыщенный нефтью, сверху граничит с газовой шапкой, а снизу – с высокопроницаемым пропластком или трещиной. Предполагается, что движение нефти описывается обобщенным уравнением фильтрации Бринкмана. Пусть нижняя граница пласта имеет вертикальную декартову координату $z = 0$, а верхняя – $z = L$. Бесконечный в горизонтальном измерении пласт включает в себя область Ω_f, содержащую нефть при $0 < z < S(x, t)$ и область Ω_g с координатами $S(x, t) < z < L$, насыщенную газом. Считаем, что объем газа достаточно большой и можно пренебречь его движением и считать давление в нем постоянным. Тогда на контактной поверхности газ–нефть $z < S(x, t)$ давление постоянно и равно P_G. Растворением газа в нефти и дегазацией нефти пренебрегаем. При откачке нефти из высокопроницаемого пропластка, соответствующего границе $z = 0$, можно считать, что давление в нем изменяется мгновенно на всем протяжении и равно постоянной величине P_F.

Нефть предполагается несжимаемой и ее движение описывается уравнением Бринкмана с учетом силы тяжести

$$\operatorname{div}\vec{V} = 0 \tag{1.1}$$

$$-\nabla\left(P + \rho g z\right) + \mu_e \Delta\vec{V} - \frac{\mu}{k}\vec{V} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь P – давление, ρ – плотность, g – ускорения свободного падения, μ – вязкость, μ_e – эффективная вязкость, k – проницаемость, $\vec{V}$ – вектор скорости фильтрации.

Найдем базовое решение, которое предполагается исследовать на устойчивость. Используем условие несжимаемости жидкости (1.1) и применим операцию дивергенции к уравнению (1.2). В результате получаем уравнение Лапласа для давления

$$\Delta P = 0 \tag{1.3}$$

Если контактная поверхность нефть–газ является плоской и в момент времени t имеет z-координату $H(t) > 0$, то уравнению (1.3), а также граничным условиям

$$P(x, 0, t) = P_F, \tag{1.4}$$

$$P(x, H(t), t) = P_G \tag{1.5}$$

удовлетворяет решение

$$P_b(x,z,t) = \frac{(P_G - P_F)z}{H(t)} + P_F \tag{1.6}$$

Из уравнения (1.2) находим, что

$$V_{z,b}(x,z,t) = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{P_G - P_F}{H(t)} + \rho g\right), \tag{1.7}$$

$$V_{x,b}(x,z,t) = 0, \tag{1.8}$$

где $V_{x,b}$ и $V_{z,b}$ – x - и z-компоненты скорости $\vec{V}$ для базового решения.

Если процессы растворения газа в нефти и дегазации нефти не учитываются, то скорость перемещения контактной поверхности в направлении внешней нормали совпадает с нормальной компонентой скорости фильтрации $\vec{V}(H(t))$, поэтому для базового решения справедливо уравнение

$$\frac{dH(t)}{dt} = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{P_G - P_F}{H(t)} + \rho g\right), \tag{1.9}$$

из которого получаем

$$t = \frac{\mu}{k}\left(\frac{P_G - P_F}{\rho^2 g^2}\ln\left(\frac{\rho g H_0 + P_F - P_G}{\rho g H(t) + P_F - P_G}\right) - \frac{H(t) - H_0}{\rho g}\right), \tag{1.10}$$

где H_0 – z-координата контактной поверхности при $t = 0$. Соотношение (1.10) определяет неявную функцию $H(t)$.

На поверхности раздела выполняется условие равенства нормальных составляющих напряжений, которое имеет вид

$$P(x, s(x,t), t) - 2\mu_e\left(\frac{\partial}{\partial n}V_n(x,z,t)\right) = P_G \tag{1.11}$$

Здесь V_n – нормальная к поверхности $S(x, t)$ компонента скорости $\vec{V}$, $\left(\frac{\partial V_n}{\partial n}\right)$ – производная этой компоненты по направлению нормали к поверхности $S(x, t)$.

Условие для касательного напряжения, которое равно нулю (см., например, [23]), может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial n}V_\tau(x,z,t) + \frac{\partial}{\partial \tau}V_n(x,z,t) = 0, \tag{1.12}$$

где V_τ – касательная к поверхности $S(x, t)$ компонента скорости $\vec{V}$, $\left(\frac{\partial}{\partial n}V_\tau\right)$ – производная этой компоненты по направлению нормали, $\left(\frac{\partial}{\partial \tau}V_n\right)$ – производная нормальной компоненты скорости в направлении касательной.

2. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Будем искать решение задачи о линейной устойчивости в виде

$$S(x,t) = H(t) + s(x,t) \tag{2.1}$$

$$P(x,z,t) = P_b(x,z,t) + p(x,z,t) \tag{2.2}$$

$$V_x(x,z,t) = u(x,z,t), \tag{2.3}$$

$$V_z(x,z,t) = V_{z,b}(x,z,t) + v(x,z,t), \tag{2.4}$$

где $p(x, z, t)$, $u(x, z, t)$, $v(x, z, t)$, $s(x, t)$ – малые возмущения давления, горизонтальной и вертикальной компонент скорости, а также положения границы раздела нефть–газ соответственно.

В силу линейности уравнения (1.3) для $p(x, z, t)$ справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x,z,t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} p(x,z,t) = 0 \tag{2.6}$$

Будем искать решение для $p(x, z, t)$ в виде

$$p(x,z,t) = \Pi(z) f(t) \exp(iKx),$$

тогда из уравнения (2.6) получаем

$$-K^2\Pi(z) + \frac{d^2}{dz^2}\Pi(z) = 0 \tag{2.7}$$

Общее решение уравнения (2.7) запишем как

$$\Pi(z) = C_1 \exp(Kz) + C_2 \exp(-Kz) \tag{2.8}$$

С учетом того, что возмущения возникают на свободной поверхности и затухают на нижней границе низкопроницаемого слоя, вторым слагаемым в правой части выражения (2.8) можно пренебречь, тогда

$$\Pi(z) = C_1 \exp(Kz) \tag{2.9}$$

Решение для $u(x, z, t)$ и $v(x, z, t)$ будем искать в виде

$$u(x,z,t) = U(z) f(t) \exp(iKx), \tag{2.10}$$

$$v(x,z,t) = V(z) f(t) \exp(iKx) \tag{2.11}$$

Подставляя (2.2), (2.3) и (2.4) в уравнение (1.2), с учетом (2.9), (2.10) и (2.11) получаем

$$U(z) = -icC_1Ke^{Kz} - K^2U(z)m_e + \left(\frac{d^2}{dz^2}U(z)\right)m_e \tag{2.12}$$

$$V(z) = -cC_1Ke^{Kz} - K^2V(z)m_e + \left(\frac{d^2}{dz^2}V(z)\right)m_e \tag{2.13}$$

где $c = k/\mu$, $m_e = c\mu_e$.

Для общего решения уравнения (2.12)

$$U(z) = -icC_1K \exp(Kz) + C_3 \exp(-\sqrt{K^2 + 1/m_e}z) + C_4 \exp(\sqrt{K^2 + 1/m_e}z)$$

также при достаточно большой толщине нефтесодержащего пласта можно пренебречь членом в правой части, который убывает при увеличении z и записать решение в виде

$$U(z) = -icC_1K \exp(Kz) + C_u \exp(\sqrt{K^2 + 1/m_e}z) \tag{2.14}$$

Аналогично из уравнения (2.13) получаем:

$$V(z) = -cC_1K \exp(Kz) + C_v \exp(\sqrt{K^2 + 1/m_e}z) \tag{2.15}$$

Из условия несжимаемости жидкой фазы (1.1) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,z,t) + \frac{\partial}{\partial z}v(x,z,t) = 0 \tag{2.16}$$

Воспользовавшись соотношениями (2.10) и (2.11), из уравнения (2.16) получаем, что

$$iKU(z) + \frac{d}{dz}V(z) = 0 \tag{2.17}$$

Подставляя (2.14) и (2.15) в уравнение (2.17), находим уравнение, связывающее коэффициенты C_u и C_v:

$$iC_uK \exp(\sqrt{K^2 + 1/m_e}z) + C_v\sqrt{K^2 + 1/m_e} \exp(\sqrt{K^2 + 1/m_e}z) = 0 \tag{2.18}$$

Из (2.18) получаем

$$C_u = i\frac{\sqrt{K^2 + 1/m_e}}{K}C_v \tag{2.19}$$

Линеаризованное уравнение получено из (1.11) в предположении того, что

$$s(x,t) = C_\eta f(t)e^{iKx} \tag{2.20}$$

и выполняется условие $\partial s/\partial x \ll 1$, имеет вид

$$\begin{gathered} C_1(2K^2 + 1/m_e)\exp(KH(t)) + C_\eta\frac{P_G - P_F}{H} - \\ - C_v\frac{2\sqrt{m_e}}{c}\sqrt{K^2 + 1/m_e}\exp(\sqrt{K^2 + 1/m_e}H(t)) = 0 \end{gathered} \tag{2.21}$$

В линейном приближении нормальная скорость контактной поверхности может быть найдена из уравнения

$$C_v\exp(\sqrt{K^2 + 1/m_e}H(t)) - cC_1K\exp(KH(t)) - C_\eta\frac{f'(t)}{f(t)} = 0 \tag{2.22}$$

Из уравнения (1.12) в линейном приближении получаем

$$\frac{\partial}{\partial z}u(x,z,t) + \frac{\partial}{\partial x}v(x,z,t) = 0 \tag{2.23}$$

Используя соотношения (2.14), (2.15) и (2.19), преобразуем уравнение (2.23) к виду

$$\left(\frac{i}{K}(K^2 + 1/m_e) + iK\right)\exp(\sqrt{K^2 + 1/m_e}H(t))C_v - 2icC_1K^2\exp(KH(t)) = 0 \tag{2.24}$$

и получаем однородную систему уравнений (2.21), (2.22) и (2.24) относительно неизвестных C_1, C_v, C_η. Система имеет нетривиальное решение, если детерминант матрицы коэффициентов равен нулю

$$\text{Det} \equiv \begin{vmatrix} (2K^2+1)e_k & -\frac{2}{c}2\sqrt{m_e}f_ke_H & \frac{P_G - P_F}{H(t)} \\ -cKe_k & e_H & -\frac{f(t)}{f(t)} \\ -2ice_kK^2 & \frac{if_k^2e_H}{m_eK} + iKe_H & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.25}$$

Здесь $e_H = \exp(\sqrt{K^2 + 1/m_e}H(t))$, $e_K = \exp\left(KH(t)\right)$, $f_k = \sqrt{K^2 + 1/m_e}$.

Из (2.25) находим

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{Kc(P_G - P_F)(K^2m_e - f_k)}{H(t)(2K^4m_e^2 - 4k^3m_e^{3/2}f_k + 2K^2f_k^2m_e + K^2m_e + f_k^2)}$$

или

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{Kc(P_G - P_F)}{H(t)(2K^4m_e^2 - 4k^3m_e^{3/2}\sqrt{K^2m_e + 1} + 2K^2\sqrt{K^2m_e + 1}m_e + 2K^2m_e + 1)} \tag{2.26}$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ

Если эффективная вязкость μ_e равна нулю, соответственно $m_e = 0$, то из дисперсионного соотношения (2.26) следует, что в приближении Дарси это соотношение приводится к виду

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{Kc\left(P_G - P_F\right)}{H(t)} \tag{3.1}$$

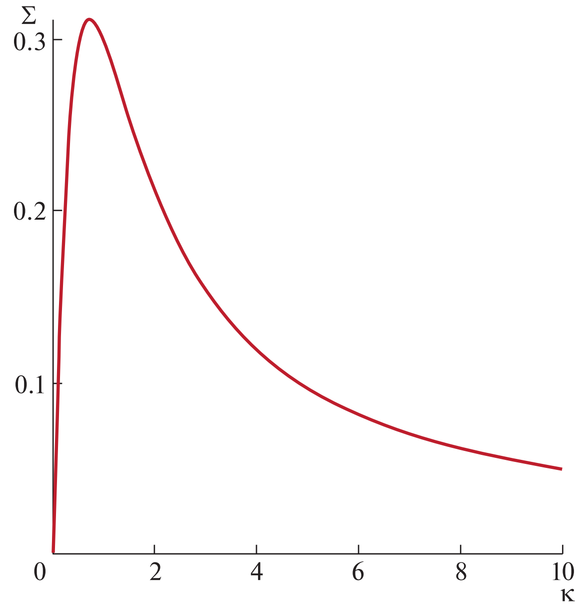

Рис. 1. График зависимости безразмерного параметра Σ от безразмерного волнового числа κ, где $P_k = P_G - P_F$.

Условие затухания возмущений на контактной границе, следующее из соотношения (3.1), совпадает с условием, которое получается при использовании закона Дарси [6, 7]. В случае неустойчивости, когда $P_G > P_F$, скорость роста амплитуды возмущений неограниченно увеличивается с ростом волнового числа $K \to \infty$.

Рассмотрим поведение $f'(t)$ при неограниченном росте волнового числа $K \to \infty$, когда $m_e \neq 0$. Из формулы (2.26) получаем

$$\frac{f'(t)}{f(t)} \approx \frac{c\left(P_G - P_F\right)}{2m_e H(t) K} \tag{3.2}$$

Следовательно, в приближении Бринкмана скорость затухания или роста коротковолновых возмущений стремится к нулю при $K \to \infty$, как в устойчивом ($P_F > P_G$), так и в неустойчивом случае ($P_F < P_G$).

Если воспользоваться условием квазистационарности процесса, которое следует из того, что характерное время движения границы газонефтяного контакта много больше характерного времени перераспределения давления, то можно пренебречь зависимостью H от t в правой части уравнения (2.26) и полагать, что поверхность раздела неподвижна. Аналогичные условия квазистационарности справедливы для многих задач теории фильтрации с поверхностями разрывов [3, 24]. Тогда

$$f(t) = \exp(\sigma t)$$

и соотношения (2.26), (3.1) и (3.2) принимают вид

$$\sigma = \frac{Kc(P_G - P_F)}{H(2K^4 m_e^2 - 4k^3 m_e^{3/2}\sqrt{K^2 m_e + 1} + 2K^2\sqrt{K^2 m_e + 1}m_e + 2K^2 m_e + 1)} \tag{3.3}$$

$$\sigma = \frac{Kc\left(P_G - P_F\right)}{H} \tag{3.4}$$

$$\sigma \approx \frac{c\left(P_G - P_F\right)}{2m_e H K}$$

соответственно.

На рис. 1 для соотношения (3.3) представлен график зависимости безразмерного параметра $\Sigma = \dfrac{\sigma H\sqrt{m_e}}{cP_k}$ от безразмерного волнового числа $\kappa = K\sqrt{m_e}$, где $P_k = P_G - P_F$. Видно, что скорость

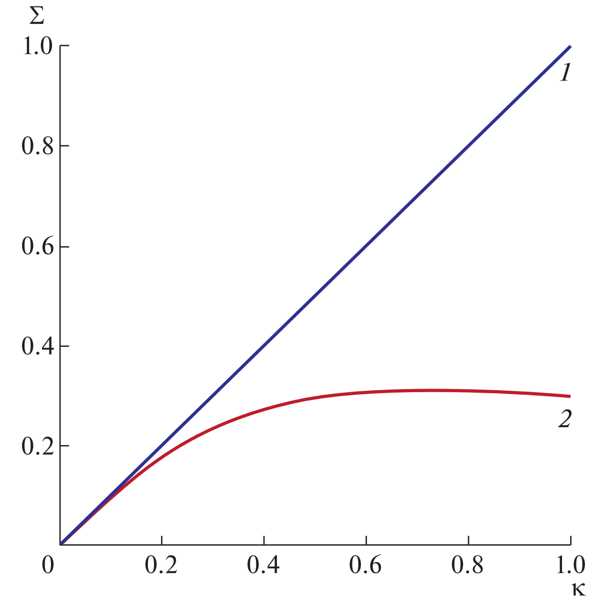

Рис. 2. График зависимости безразмерного параметра Σ от безразмерного волнового числа κ: *1* – закон Дарси; *2* – приближение Бринкмана.

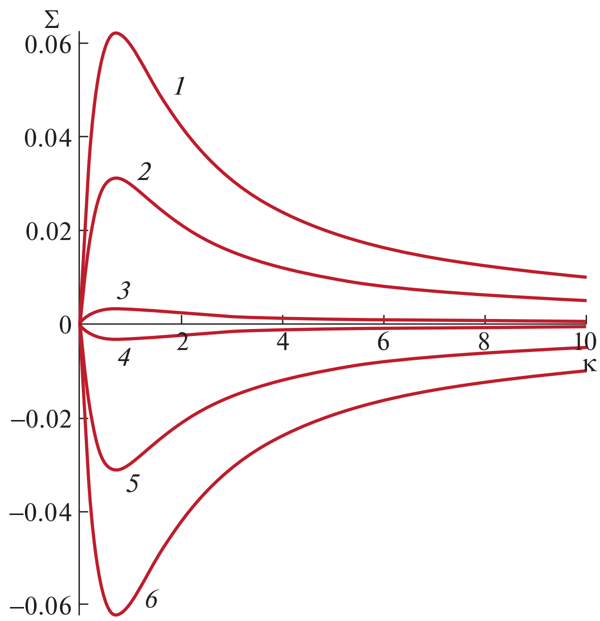

Рис. 3. График зависимости безразмерного параметра Σ от волнового числа κ: *1*–*6* – $P_F = (0.8, 0.9, 0.99, 1.01, 1.1, 1.2)\ P_G$.

роста возмущений имеет максимум, который достигается при $K\sqrt{m_e} \approx 0.72$ и стремится к нулю с ростом волнового числа $K \to \infty$.

На рис. 2 представлено сравнение безразмерной скорости роста возмущений при малых безразмерных волновых числах для уравнений фильтрации Дарси (кривая *1*) и Бринкмана (кривая *2*). Видно, что при $K\sqrt{m_e} \ll 1$ уравнение Дарси хорошо описывает поведение физической системы, а при больших волновых числах ошибка от использования закона Дарси становится существенной.

Из формулы (3.3) следует, что поскольку выражение, стоящее в знаменателе, всегда положительно, то переход к неустойчивости происходит при смене знака разницы между давлением в газовой шапке P_G и давлением в высокопроницаемом пропластке P_F. На рис. 3 показана зависимость безразмерной скорости роста или затухания возмущений $\frac{\sigma H\sqrt{m_e}}{cP_k}$ от безразмерного волнового числа $K\sqrt{m_e}$ при фиксированном P_G и различных значениях P_F. Видно, что переход к неустойчивости происходит при $P_G = P_F$ одновременно при всех значениях волнового числа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы динамика и устойчивость вертикального течения, возникающего в нефтяном коллекторе с газовой шапкой. Течение нефти описывалось с помощью обобщенного уравнения фильтрации Бринкмана. Представлен закон движения плоской горизонтальной границы раздела нефть–газ. Методом нормальных мод исследована устойчивость течения по отношению к бесконечно малым возмущениям плоской границы. Показано, что такие возмущения растут, если давление в газовой шапке больше, чем давление в высокопроницаемом пропластке, из которого происходит отбор нефти. Если плоская граница раздела покоится, то давление в газовой шапке меньше, чем в высокопроницаемом пропластке, которое равно гидростатическому давлению. На первой стадии уменьшения давления в пропластке контактная поверхность начнет двигаться вниз, но останется устойчивой до тех пор, пока давление в пропластке не упадет ниже давления в газовой шапке. После этого движение границы раздела нефть–газ станет неустойчивым. В этом случае нелинейная неустойчивость имеет место для любой длины волны, но зависит от волнового числа K таким образом, что при $K \to \infty$ и $K \to 0$ эта скорость стремится к нулю. Существует некоторое значение волнового числа, при котором скорость роста имеет максимум.

При использовании закона Дарси неустойчивость также возникает, если давление в газовой шапке больше, чем давление в пропластке. Однако в этом случае скорость роста возмущений неограниченно возрастает с уменьшением длины волны возмущения. В этом случае коротковолновые возмущения растут сколь угодно быстро, что не позволяет получить достоверную картину течения и свидетельствует о неприменимости математической модели, основанной на законе Дарси, для описания как самого перехода к неустойчивости, так и последующего развития течения с разрушением поверхности раздела, приводящим к образованию пальцев. Изменение основных уравнений путем использования обобщенного уравнения фильтрации Бринкмана позволяет устранить аномальный характер эволюции коротковолновых возмущений, что открывает возможность исследовать задачи, которые не являлись корректными в рамках приближения Дарси.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 21-11-00126.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лапук Б.Б.* Теоретические основы разработки месторождений природных газов. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 296 с.
2. *Кутырев Е.Ф., Шкандратов В.В., Белоусов Ю.В.* Некоторые результаты физического моделирования процессов газообмена в пластовой системе нефть–нагнетаемая вода // Георесурсы. 2005. № 5. С. 33–36.
3. *Tsypkin G.G., Shargatov V.A.* Influence of capillary pressure gradient on connectivity of flow through a porous medium // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2018. V. 127. P. 1053–1063.
4. *Tsypkin G.G., Il'ichev A.T.* Gravitational stability of the water-vapor phase transition interface in geothermal systems // Transp. Porous Media. 2004. V. 55. P. 183–199.
5. *Il'ichev A.T., Tsypkin G.G.* Catastrophic transition to instability of evaporation front in a porous medium // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2008. V. 27. № 6. P. 665–677.
6. *Shargatov V.A., Il'ichev A.T., Tsypkin G.G.* Dynamics and stability of moving fronts of water evaporation in a porous medium // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2015. V. 83. P. 552–561.
7. *Tsypkin G.G., Il'ichev A.T.* Superheating of water and morphological instability of the boiling front moving in the low-permeability rock // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2021. V. 167. 120820.
8. *Цыпкин Г.Г.* Неустойчивость легкой жидкости над тяжелой при движении поверхности раздела в пористой среде // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 2. С. 70–76.
9. *Brinkman H.C.* A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // Appl. Sci. Res. 1947. V. A1. P. 27–34.
10. *Beavers G.S., Joseph D.D.* Boundary conditions at a naturally permeable wall // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. P. 197–207.
11. *Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S.* Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – I. Theoretical development // Int. J. Heat Mass Transfer. 1995. V. 38. P. 2635–2646.

12. *Valdes-Parada F.J., Ochoa-Tapia J.A., Alvarez-Ramirez J.* On the effective viscosity for the Darcy–Brinkman equation // Physica A. 2007. V. 385. P. 69–79.
13. *Nield D.A.* Modelling high speed flow of a compressible fluid in a saturated porous medium // Transp. Porous Media. 1994. V. 14. P. 85–88.
14. *Nield D.A.* The Beavers–Joseph boundary condition and related matters: a historical and critical note // Transp. Porous Media. 2009. V. 78. P. 537–540.
15. *Tsiberkin K.* Effect of inertial terms on fluid–porous medium flow coupling // Transp. Porous Media. 2018. V. 121. P. 109–210.
16. *Fernandez J., Kurowski P., Petitjeans P., Meiburg E.* Density-driven unstable flows of miscible fluids in a Hele-Shaw cell // J. Fluid Mech. 2002. V. 451. P. 239–260.
17. *Lyubimova T.P., Lyubimov D.V., Baydina D.T. et al.* Instability of plane-parallel flow of incompressible liquid over a saturated porous medium // Phys. Rev. 2016. V. 94. 013104.
18. *Ильичев А.Т., Шаргатов В.А.* Динамика фронтов испарения воды // ЖВММФ. 2013. Т. 53. № 9. С. 1531–1553.
19. *Shargatov V.A., Gorkunov S.V., Il'ichev A.T.* Dynamics of front-like water evaporation phase transition interfaces // Commun. in Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2019. V. 67. P. 223–236.
20. *Соболева Е.Б.* Начало конвекции Рэлея-Тейлора в пористой среде // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 2. С. 52–62.
21. *Soboleva E.B.* Density-driven convection in an inhomogeneous geothermal reservoir // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2018. V. 127. P. 784–798.
22. *Khanukaeva D.Yu., Filippov A.N., Yadav P.K. et al.* Creeping flow of micropolar fluid through a swarm of cylindrical cells with porous layer (membrane) // J. Mol. Liq. 2019. V. 294. 111558.
23. *Журавлева Е.Н., Пухначев В.В.* Задача о деформации вязкого слоя // Доклады РАН. 2020. Т. 490. № 1. С. 66–69.
24. *Tsypkin G.G., Woods A.W.* Vapour extraction from a water saturated geothermal reservoir // J. Fluid Mech. 2004. V. 506. P. 315–330.