

УДК 532.582.92

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ДИСПЕРСНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ “НАСЛЕДСТВЕННОЙ” СИЛЫ БАССЕ

© 2022 г. Т. Р. Аманбаев<sup>a,b,\*</sup>

<sup>a</sup> Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан

<sup>b</sup> Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

\*E-mail: [tulegen\\_amanbaev@mail.ru](mailto:tulegen_amanbaev@mail.ru)

Поступила в редакцию 24.10.2021 г.

После доработки 21.12.2021 г.

Принята к публикации 21.12.2021 г.

Рассмотрена задача о движении шарообразного дисперсного включения (частицы, пузырька и т.п.) в вязкой несжимаемой жидкости в гравитационном поле с учетом нестационарных, в том числе “наследственных” (типа Бассе) сил. Методами математической физики найдено точное решение задачи, выражающее изменение ускорения дисперсного включения от времени. В качестве примера применения полученного решения проведены расчеты скорости и координаты движения пузырька в жидкости, и показано, что учет “наследственной” силы Бассе приводит к существенному увеличению характерных времени и расстояния установления стационарной скорости пузырька.

*Ключевые слова:* вязкая жидкость, частица, сила Стокса, сила Бассе, интегро-дифференциальное уравнение, операторный метод

DOI: 10.31857/S0568528122030021

Рассмотрим задачу о движении сферического включения (частицы, пузырька и т.п.) в вязкой жидкости в гравитационном поле. Такая задача часто встречается при исследовании течений двухфазных сред (суспензий, пузырьковых сред и др.). Закономерности движения включений дисперсной фазы в гравитационном поле представляют интерес при моделировании и изучении технологических процессов (седиментация, флотация, барботаж и др.), а также при решении ряда практических задач экологии и метеорологии (образование атмосферных осадков, осаждение аэрозолей и суспензий, всплытие пузырьков в различных жидкостях, очистка промышленных и сточных вод от масел и нефтепродуктов и др.). В указанных задачах одним из существенных факторов является изменение скорости движения дисперсных включений в жидкости.

Движение шара в вязкой жидкости впервые исследовал Джордж Стокс (1851 г.). Он нашел точное решение уравнений Навье–Стокса в стационарном случае при малых числах Рейнольдса и на основе этого решения вывел свою знаменитую формулу для результирующей силы, действующей на шар со стороны жидкости. Эту силу сейчас называют силой Стокса. При движении шара с переменной скоростью на него со стороны жидкости кроме силы Стокса будут дополнительно действовать нестационарные силы присоединенных масс, а также “наследственная” сила Бассе, зависящая от предыстории движения [1, 2]. Причем если плотности жидкости  $\rho$  и частиц  $\rho_i$  (нижний индекс от “*impurities*”) сравнимы между собой  $\kappa = \rho/\rho_i \sim 1$ , то силы, учитывающие нестационарные и наследственные эффекты в межфазном взаимодействии, формально имеют тот же порядок, что и сила Стокса. Более подробные оценки вкладов нестационарных сил в результирующую силу, действующую на частицу со стороны жидкости, проведены в [1, 3, 4], где показано, что силой Бассе можно пренебречь в тех случаях, когда относительные числа Рейнольдса достаточно большие или плотность дисперсного включения намного больше плотности несущей среды  $\kappa \ll 1$ .

Учет “наследственных” эффектов типа силы Бассе существенно осложняет решение уравнения движения шара, поскольку приходится рассматривать интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) с особенностью. Причем задача о движении частицы даже в покоящейся жидкости в полной постановке представляет достаточно трудноразрешимую проблему. Одной из сложностей данной задачи является вычисление интеграла типа Дюамеля, выражающего силу Бассе, так

как аналитический его подсчет невозможен, численный же расчет занимает довольно много времени. Поэтому работ, где при решении задач о динамике включений в жидкости учитываются наследственные эффекты, не так уж много [4–11]. Для решения ИДУ с особенностью используются разные способы. Один из них основан на замене ИДУ эквивалентной системой дифференциальных уравнений более высокого порядка с применением преобразования Лапласа по времени (в случае, когда поле скорости несущей среды зависит только от времени) [6, 8]. В этом подходе (для эквивалентности полученной системы исходной) необходимо, чтобы отношение плотностей фаз удовлетворяло определенному неравенству  $\kappa > 4/7$ . В рамках такого подхода в [8] задача об осаждении частиц с учетом силы Бассе исследована с помощью асимптотических рядов во всем диапазоне изменения  $\kappa$ . Другой подход состоит в численном решении ИДУ, при этом аппроксимация несобственного интеграла осуществляется путем разделения интеграла на две части: с особенностью и без нее [4]. Интеграл без особенности рассчитывается по известным формулам (трапеций, Симпсона и др.), а интеграл с особенностью – чаще всего по квадратурным формулам с использованием интерполяционного многочлена Лагранжа [4, 12].

Резюмируя, можно отметить, что в настоящее время особенности движения дисперсного включения в жидкости с учетом наследственных эффектов исследованы недостаточно полно. В частности, важное значение имеет нахождение точных решений задачи о движении дисперсного включения в несущей среде с учетом силы Бассе.

Целью данной работы является прямое нахождение точного решения задачи о движении частицы (далее под терминами “частица” и “дисперсное включение” будем подразумевать как собственно твердую частицу, так и пузырек) в жидкости с учетом нестационарных, в том числе “наследственных” сил.

## 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Запишем уравнение одномерного движения дисперсного включения, имеющего форму шара в жидкости в поле силы тяжести. Считается, что деформация и дробление дисперсного включения отсутствуют (для твердых частиц такое допущение вполне уместно, а в случае пузырьков или капель необходимо иметь в виду, что рассматриваются пузырьки и капли малых размеров, так что они движутся достаточно медленно и их поверхность не подвергается сильным возмущениям). Для определенности рассмотрим случай, когда несущая среда покоится. Ось  $x$  направим против вектора ускорения силы тяжести. Тогда при постоянной массе шара (фазовые превращения и другие массообменные процессы между дисперсным включением и несущей средой отсутствуют) будем иметь

$$m \frac{dv}{dt} = f_r + f_g + f_A \quad (1.1)$$

$$f_g = -mg, \quad f_A = \theta \rho g, \quad m = \theta \rho_i \quad \theta = \pi d^3/6 \quad (1.2)$$

Здесь  $v$ ,  $\theta$ ,  $m$ ,  $d$ ,  $\rho_i$  – скорость, объем, масса, диаметр и плотность дисперсного включения;  $f_r$  – сила сопротивления;  $f_g$ ,  $f_A$  – силы тяжести и Архимеда;  $\rho$  – плотность жидкости;  $g$  – ускорение свободного падения. Для силы сопротивления имеем

$$f_r = f_S + f_m + f_B \quad (1.3)$$

$$f_S = -3\pi\mu dv, \quad f_m = -\frac{1}{2}\theta\rho \frac{dv}{dt}, \quad f_B = -\Lambda \int_{-\infty}^t \frac{dv}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad \Lambda = \frac{3}{2}d^2\sqrt{\pi\rho\mu} \quad (1.4)$$

где  $f_S$  – сила Стокса,  $\mu$  – вязкость жидкости,  $f_B$ ,  $f_m$  – нестационарные силы Бассе и присоединенных масс, действующие на дисперсное включение при его ускоренном движении. Силы Стокса и Бассе соответствуют малым числам Рейнольдса  $Re = vd\rho/\mu \ll 1$ .

Нестационарные силы типа  $f_B$  характеризуют немгновенность установления стационарных распределений скорости в окрестности индивидуального включения и строго обоснованы при  $Re \ll 1$ . С увеличением  $Re$  вклад  $f_B$  в общую силу взаимодействия частицы с жидкостью должен уменьшаться, так как в идеальной жидкости сила типа  $f_B$  отсутствует, в то время как выражение для силы присоединенной массы то же, что и в вязкой жидкости. В общем случае учет через силу Бассе влияния предыстории движения на поведение дисперсных частиц приводит к ИДУ для неизвестной скорости шара  $v(t)$ , и тем самым сильно осложняет решение задачи.

Отметим, что из условия равенства нулю ускорения шара  $f_s + f_g + f_A = 0$  вытекает формула для стационарной скорости

$$V = \frac{d^2 g(\rho - \rho_i)}{18\mu} \quad (1.5)$$

С течением времени решение уравнения (1.1) должно стремиться к стационарной скорости (1.5).

К уравнению (1.1) следует добавить уравнение, определяющее положение частицы

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (1.6)$$

Для системы уравнений (1.1), (1.6) с замыкающими соотношениями (1.2)–(1.4) можно поставить следующие начальные условия:  $t = 0$ ,  $v(0) = v_0$ ,  $x(0) = 0$ .

Отметим, что в случае пренебрежения силой Бассе система уравнений (1.1), (1.6) при заданных начальных условиях имеет аналитическое решение

$$\bar{v} = 1 - (1 - \bar{v}_0) \exp(-\bar{t}), \quad \bar{x} = \bar{t} + (1 - \bar{v}_0) [\exp(-\bar{t}) - 1]$$

$$\bar{t} = \frac{t}{t_*}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad t_* = \frac{d^2(\rho_i + 0.5\rho)}{18\mu}, \quad l = Vt_*, \quad \bar{v}_0 = \frac{v_0}{V}$$

Здесь  $t_*$  – характерное время релаксации скорости частицы в стоксовом режиме с учетом силы присоединенных масс. Отметим, что в случае  $\bar{v}_0 < 0$  скорости  $V$  и  $v_0$  должны иметь противоположные знаки. Например, когда осаждающаяся частица ( $V < 0$ , т.е.  $\rho < \rho_i$ ) в начальный момент времени “выстреливается” вверх ( $v_0 > 0$ ), она после достижения некоторой высоты останавливается и затем падает вниз. При  $V > 0$  (значит  $\rho > \rho_i$ ), а  $v_0 < 0$  имеем обратную картину: всплывающая частица сначала движется вниз до остановки и после поднимается вверх. Момент времени  $\bar{t}_m$  и соответствующая координата точки  $\bar{x}_m$  возврата частиц ( $v = 0$ ) определяются формулами  $\bar{t}_m = \ln(1 - \bar{v}_0)$ ,  $\bar{x}_m = \ln(1 - \bar{v}_0) + \bar{v}_0$ . В случае  $\bar{v}_0 < 1$  безразмерная скорость частицы  $\bar{v}$  устремляется к своему стационарному значению  $\bar{v} = 1$  снизу, тогда как при  $\bar{v}_0 > 1$  она стремится к предельному значению сверху.

Используя условия  $v(0) = v_0$  и  $dv/d\tau \equiv 0$  при  $\tau < 0$ , и введя обозначения

$$\frac{dv}{dt} = w(t), \quad v - v_0 = \int_0^t \frac{dv}{d\tau} d\tau = \int_0^t w(\tau) d\tau,$$

уравнение (1.1) приведем к интегральному уравнению Вольтерры второго рода относительно  $w(t)$

$$w(t) - \int_0^t \left( \frac{A}{\sqrt{t-\tau}} + B \right) w(\tau) d\tau = f \quad (1.7)$$

$$A = -\frac{\alpha}{\chi}, \quad B = -\frac{\beta}{\chi}, \quad \alpha = \frac{9}{d\rho_i} \sqrt{\frac{\rho\mu}{\pi}}, \quad \beta = \frac{18\mu}{d^2\rho_i}, \quad f = \frac{g}{\chi} \left( \frac{\rho}{\rho_i} - 1 \right) + Bv_0, \quad \chi = 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_i}$$

Ниже продемонстрирован один из способов решения поставленной задачи. При этом использован подход, изложенный в [13].

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В УПРОЩЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Сначала рассмотрим упрощенное уравнение (переобозначив для удобства параметр  $A$  как  $\lambda \equiv A$ ), вытекающее из (1.7) при  $B = 0$

$$w(t) - \lambda \int_0^t \frac{w(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = f \quad (2.1)$$

Оно является обобщенным интегральным уравнением Абеля второго рода относительно функции  $w(t)$  [13]. Отметим, что последнее уравнение соответствует исключению силы Стокса в уравнении (1.1).

Перепишем уравнение (2.1) следующим образом:

$$\int_0^t \frac{w(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = -\frac{f-w(t)}{\lambda} \quad (2.2)$$

Считая правую часть в этом уравнении известной, будем рассматривать (2.2) как уравнение Абеля первого рода [13]. Его решение можно записать в виде

$$w(t) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f-w(\tau)}{\lambda\sqrt{t-\tau}} d\tau$$

Откуда следует, что

$$w(t) - \frac{1}{\pi\lambda} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{w(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = -\frac{1}{\pi\lambda} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{fd\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (2.3)$$

Продифференцируем обе части уравнения (2.1) по  $t$ , затем умножим обе части (2.3) на  $-\pi\lambda^2$  и сложим почленно полученные выражения. В результате придем к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для функции  $w = w(t)$

$$w'_t - \pi\lambda^2 w = F'_t(t) \quad (2.4)$$

$$F(t) = f + \lambda \int_0^t \frac{fd\tau}{\sqrt{t-\tau}} = f(1 + 2\lambda\sqrt{t}) \quad (2.5)$$

Уравнение (2.4) следует дополнить начальным условием

$$w(0) = f \quad (2.6)$$

Оно является следствием (2.1). Решение задачи (2.4)–(2.6) имеет вид

$$w(t) = F(t) + \pi\lambda^2 \int_0^t \exp[\pi\lambda^2(t-\tau)] F(\tau) d\tau$$

Откуда с учетом (2.5) получим

$$w(t) = f(1 + 2\lambda\sqrt{t}) + \pi\lambda^2 \int_0^t \exp[\pi\lambda^2(t-\tau)] f(1 + 2\lambda\sqrt{\tau}) d\tau$$

Интеграл в этом выражении преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \int_0^t \exp[\pi\lambda^2(t-\tau)] f(1 + 2\lambda\sqrt{\tau}) d\tau = \\ & = -\frac{f}{\pi\lambda^2} [1 - \exp(\pi\lambda^2 t)] + 2\lambda f \left[ -\frac{\sqrt{t}}{\pi\lambda^2} + \frac{1}{2\pi\lambda^3} \exp(\pi\lambda^2 t) \operatorname{erf}(\lambda\sqrt{\pi t}) \right] \end{aligned}$$

Здесь  $\operatorname{erf}$  – интеграл вероятностей

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi$$

Таким образом, решение уравнения (2.1) запишется в следующем виде:

$$w(t) = f \exp(\pi\lambda^2 t) [1 + \operatorname{erf}(\lambda\sqrt{\pi t})] \quad (2.7)$$

Отсюда воспользовавшись введенным выше обозначением, получим зависимость скорости частицы от времени

$$v(t) = f \left\{ \frac{1}{\pi\lambda^2} [\exp(\pi\lambda^2 t) - 1] + \int_0^t \exp(\pi\lambda^2 \tau) \operatorname{erf}(\lambda\sqrt{\pi\tau}) d\tau \right\}, \quad v(0) = v_0$$

Эта формула будет в дальнейшем использоваться для решения задачи о движении частицы в полной постановке с учетом всех действующих на нее сил.

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ПОЛНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Вернемся к уравнению (1.7) и применим к нему операторный метод [13], суть которого заключается в следующем. Пусть известно решение линейного уравнения

$$y(x) - \lambda \mathbf{L}[y] = f(x) \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{L}$  – некоторый оператор,  $f(x)$  – произвольная функция. Обозначим это решение так:

$$y = Y(f, \lambda)$$

Построим решение более сложного уравнения

$$y(x) - a\mathbf{L}[y] - b\mathbf{L}^2[y] = f(x) \quad (3.2)$$

где  $a$  и  $b$  – некоторые числа. Представим левую часть (3.2) в виде произведения операторов

$$(1 - a\mathbf{L} - b\mathbf{L}^2)[y] \equiv (1 - \lambda_1\mathbf{L})(1 - \lambda_2\mathbf{L})[y] \quad (3.3)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0$$

Далее решим вспомогательное уравнение

$$u(x) - \lambda_2\mathbf{L}[u] = f(x) \quad (3.4)$$

Оно является частным случаем уравнения (3.1) при  $\lambda = \lambda_2$ . Его решение дается формулой

$$u(x) = Y(f, \lambda_2)$$

Уравнение (3.2) с учетом (3.3) и (3.4) можно записать в виде

$$(1 - \lambda_1\mathbf{L})(1 - \lambda_2\mathbf{L})[y] = (1 - \lambda_2\mathbf{L})[u]$$

Оно эквивалентно уравнению

$$(1 - \lambda_2\mathbf{L})\{(1 - \lambda_1\mathbf{L})[y] - u(x)\} = 0$$

Его частное решение – функция  $y(x)$

$$y(x) - \lambda_1\mathbf{L}[y] = u(x)$$

Оно дается формулой

$$y(x) = Y(u, \lambda_1), \quad u(x) = Y(f, \lambda_2) \quad (3.5)$$

Для применения описанного операторного метода к уравнению (1.7) покажем, что его можно записать в виде

$$w(t) - A\mathbf{L}[w] - \frac{1}{\pi}B\mathbf{L}^2[w] = f(t) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{L}[w] \equiv \int_0^t \frac{w(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (3.7)$$

Действительно, рассмотрим сначала интегральный оператор с разностным ядром

$$\mathbf{L}[y(x)] \equiv \int_0^x K(x-t)y(t)dt$$

Посмотрим, как действует

$$\begin{aligned} L^2[y] &\equiv L[L[y]] = \int_0^x \int_0^t K(x-t)K(t-s)y(s)dsdt = \\ &= \int_0^x y(s)ds \int_s^x K(x-t)K(t-s)dt = \int_0^x K_2(x-s)y(s)ds \\ K_2(z) &= \int_0^z K(\xi)K(z-\xi)d\xi \end{aligned}$$

При выводе этой формулы менялся порядок интегрирования и делалась замена  $\xi = t - s$ . Для оператора (3.7) отсюда имеем

$$L^2[w] = \int_0^t w(s)ds \int_0^{t-s} \frac{1}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{\sqrt{t-s-\xi}} d\xi = \pi \int_0^t w(\tau)d\tau$$

Таким образом, уравнение (1.7) можно записать в виде (3.6), а решение его определяется формулой (3.5). Поскольку уравнение (3.1) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (2.1), решение уравнения (3.6) (а значит и уравнения (1.7)) согласно (3.5) задается в виде

$$w(t) = Y(u, \lambda_1), \quad u = Y(f, \lambda_2)$$

$$Y(f, \lambda) = F(t) + \pi\lambda^2 \int_0^t \exp[\pi\lambda^2(t-\tau)]F(\tau)d\tau, \quad F(t) = f(t) + \lambda \int_0^t \frac{f(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – корни квадратного уравнения  $\lambda^2 - A\lambda - B/\pi = 0$ .

Итак, имеем следующую схему построения решения уравнения (1.7):

$$F(t) = f(1 + 2\lambda_2\sqrt{t})$$

$$u(t) = Y(f, \lambda_2) = F(t) + \pi\lambda_2^2 \int_0^t \exp[\pi\lambda_2^2(t-\tau)]F(\tau)d\tau = f \exp(\pi\lambda_2^2 t) [1 + \operatorname{erf}(\lambda_2\sqrt{\pi t})]$$

$$U(t) = u(t) + \lambda_1 \int_0^t \frac{u(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

$$w(t) = U(t) + \pi\lambda_1^2 \int_0^t \exp[\pi\lambda_1^2(t-\tau)]U(\tau)d\tau$$

Заметим, что выражение для  $u(t)$  представляет собой решение рассмотренной выше упрощенной задачи (2.7) при условии  $\lambda = \lambda_2$ .

Полученное этим путем решение уравнения (1.7) имеет форму

$$\begin{aligned} w(t) &= f \exp(a_2 t) \left[ 1 + \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \operatorname{erf}(\lambda_2\sqrt{\pi t}) \right] + f \frac{a_1}{a_0} \exp(a_1 t) [\exp(a_0 t) - 1] + \\ &+ f \int_0^t \exp(a_2 \tau) \operatorname{erf}(\lambda_2\sqrt{\pi \tau}) \left\{ \frac{\lambda_1}{\sqrt{t-\tau}} + a_1 \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \exp[a_1(t-\tau)] \right\} d\tau + \\ &+ a_1 f \lambda_1 \exp(a_1 t) \int_0^t \exp(-a_1 \tau) \left[ \int_0^\tau \frac{\exp(a_2 s) \operatorname{erf}(\lambda_2\sqrt{\pi s})}{\sqrt{\tau-s}} ds \right] d\tau \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$a_1 = \pi\lambda_1^2, \quad a_2 = \pi\lambda_2^2, \quad a_0 = a_2 - a_1$$

Сделаем замены переменных

$$\tau = t\xi, \quad s = \tau p, \quad 1 - p = \eta^2, \quad 1 - \xi = \sigma^2$$

Введем безразмерные переменные

$$\bar{t} = t/t_*, \quad \bar{v} = v/V$$

Определяющие параметры  $A, B, f$  в безразмерном виде запишутся как

$$\bar{A} = -\frac{3}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{2}{\kappa}\right)^{-1/2}, \quad \bar{B} = -1, \quad \bar{f} = 1 - \bar{v}_0, \quad (\kappa = \rho/\rho_i)$$

В безразмерных переменных выражение (3.8) примет форму

$$\begin{aligned} \bar{w}(\bar{t}) = & \bar{f} \exp(a_2 \bar{t}) \left[ 1 + \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \operatorname{erf}(\lambda_2 \sqrt{\pi \bar{t}}) \right] + \bar{f} \frac{a_1}{a_0} \exp(a_1 \bar{t}) [\exp(a_0 \bar{t}) - 1] + \\ & + 2\bar{f} \int_0^1 \exp[a_2 \bar{t}(1 - \sigma^2)] \operatorname{erf}[\lambda_2 \sqrt{\pi \bar{t}(1 - \sigma^2)}] \left[ \lambda_1 \sqrt{\bar{t}} + a_1 \bar{t} \sigma \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \exp(a_1 \bar{t} \sigma^2) \right] d\sigma + \\ & + 2\bar{f} a_1 \lambda_1 \bar{t}^{3/2} \exp(a_1 \bar{t}) \int_0^1 \sqrt{\xi} \exp(-a_1 \bar{t} \xi) \left\{ \int_0^1 \exp[a_2 \bar{t} \xi (1 - \eta^2)] \operatorname{erf}[\lambda_2 \sqrt{\pi \bar{t} \xi (1 - \eta^2)}] d\eta \right\} d\xi \end{aligned} \quad (3.9)$$

Заметим, что решение в безразмерной форме зависит только от отношения плотностей несущей жидкости и частицы  $\kappa$  (которое входит в параметр  $\bar{A}$ ), и не зависит ни от размера частиц, ни от вязкости жидкости, ни от других характеристик системы частица-жидкость. Причем в начальный момент времени  $\bar{t} = 0$  при нулевой начальной скорости безразмерное ускорение частицы равно 1. Разлагая выражение для  $\bar{A}$  при больших  $\kappa \gg 1$  в степенной ряд по малому параметру  $\varepsilon = 1/\kappa \ll 1$ , и оставляя первые три слагаемые, получим

$$\bar{A} \cong -\frac{3}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \varepsilon + \frac{3}{2} \varepsilon^2\right)$$

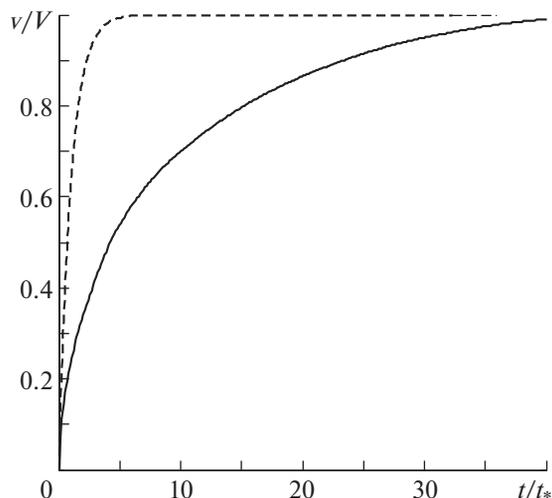
Данное соотношение аппроксимирует величину  $\bar{A}$  с точностью до 10% в интервале  $0 \leq \varepsilon \leq 0.14$ . Отметим, что в нулевом приближении по малому параметру  $\varepsilon$  величина  $\bar{A}$ , как и другие определяющие величины  $\bar{B}, \bar{f}$ , не зависит ни от каких свойств жидкости и частицы, и равна  $\bar{A} = -3/\sqrt{\pi}$ . При этом предельными значениями корней указанного выше квадратного уравнения  $\lambda^2 - \bar{A}\lambda - \bar{B}/\pi = 0$  будут  $\lambda_{1,2} = (-3 \pm \sqrt{5})/2\sqrt{\pi}$ .

Следует иметь в виду, что корни квадратного уравнения  $\lambda^2 - \bar{A}\lambda - \bar{B}/\pi = 0$  при  $\kappa = \rho/\rho_i < 8/5$  становятся комплексными, в связи с чем в этом случае для решения задачи нужно применять другие методы [4, 8, 10].

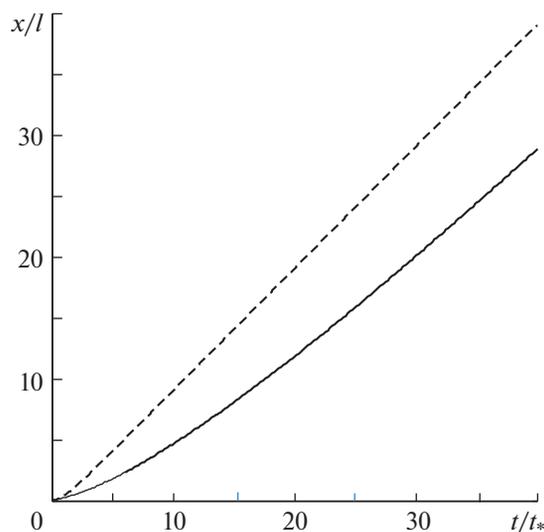
Имея выражение для ускорения частицы (3.9), можно вычислить скорость ее движения и координату из уравнений

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{t}} = \bar{w}(\bar{t}), \quad \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{v}(\bar{t}) \quad (3.10)$$

В качестве примера применения уравнений (3.9), (3.10) рассмотрим процесс всплытия воздушного пузырька в воде при нормальных условиях. В начальный момент времени пузырек имеет нулевую скорость:  $\bar{t} = 0, \bar{v} = 0, \bar{x} = 0$ . Результаты расчетов представлены на рис. 1, 2 в виде зависимостей скорости и координаты пузырька от времени. Сплошные кривые соответствуют расчетам с учетом, а штриховые – без учета силы Бассе. Видно, что учет силы Бассе приводит к существенному увеличению времени установления стационарной скорости всплытия пузырька (рис. 1). Это согласуется с расчетными и экспериментальными данными, а также с оценками характерных времен установления стационарной скорости с учетом и без учета силы Бассе, приведенными в [10, 11]. Расстояние, на котором скорость достигает установившегося значения при учете силы Бассе, примерно в восемь раз больше, чем в случае, когда она не учитывается (рис. 2).



**Рис. 1.** Зависимость скорости всплытия воздушного пузырька в воде (при нормальных условиях) от времени: сплошная кривая – с учетом силы Бассе, штриховая кривая – без учета силы Бассе.



**Рис. 2.** Зависимость координаты пузырька от времени: сплошная кривая – с учетом силы Бассе, штриховая кривая – без учета силы Бассе. Условия те же, что на рис. 1.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методами математической физики найдено решение задачи о движении сферического дисперсного включения в покоящейся жидкости с учетом нестационарных, в том числе наследственных сил. Преимуществом найденного решения является, в частности, то, что входящие в него интегралы не имеют особенностей. Его можно использовать для более детального расчета нестационарной скорости дисперсного включения,двигающегося в жидкости в гравитационном поле. В качестве примера рассмотрено всплытие одиночного пузырька в несжимаемой вязкой жидкости. Обнаружено, что учет наследственных сил типа силы Бассе приводит к существенному увеличению характерного времени установления стационарной скорости пузырька.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.

3. *Ивандаев А.И.* О влиянии нестационарных эффектов на обмен импульсом и теплом между фазами газовзвеси в ударных волнах // Журнал РАН. Теплофизика высоких температур. 1985. Т. 23. № 4. С. 721–725.
4. *Невский Ю.А., Осипов А.Н.* О роли нестационарных и наследственных сил в задачах гравитационной конвекции суспензий // Вестник Московского ун-та. Сер. Матем., механика. 2008. № 4. С. 37–44.
5. *Sangani A.S., Zhang D.Z., Prosperetti A.* The added mass, Basset, and viscous drag coefficients in nondilute bubbly liquids undergoing small-amplitude oscillatory motion // Phys. Fluids. 1991. V. 3. № 12. P. 2955–2970.
6. *Michaelides E.E.* A novel way of computing the basset term in unsteady multiphase flow computations // Phys. Fluids. 1992. V. 4. № 7. P. 1579–1582.
7. *Висицкий Е.В., Петров А.Г., Шундерюк М.М.* Движение частицы в вязкой жидкости под действием силы тяжести и вибрации при наличии силы Бассе // Прикл. матем. и механика. 2009. Т. 73. № 5. С. 763–775.
8. *Водопьянов И.С., Петров А.Г., Шундерюк М.М.* О нестационарном осаждении сферической твердой частицы в вязкой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 2. С. 97–106.
9. *Parmar M., Balachandar S., Haselbacher A.* Equation of motion for a drop or bubble in viscous compressible flows // Phys. Fluids. 2012. V. 24. P. 056103.
10. *Архипов В.А., Васенин И.М., Ткаченко А.С., Усанина А.С.* О нестационарном всплытии пузырька в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 1. С. 86–94.
11. *Губайдуллин Д.А., Осипов П.П.* Аэрогидродинамика дисперсной частицы. М.: Физматлит, 2020. 164 с.
12. *Корнев А.А., Чижонков Е.В.* Упражнения по численным методам. Часть 2. М: Изд. МГУ, 2003. 200 с.
13. *Манжиров А.В., Полянин А.Д.* Справочник по интегральным уравнениям. М.: Факториал Пресс, 2000. 384 с.