

УДК 533.96

## УСЛОЖНЕНИЕ ТЕЧЕНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДУЛЯЦИИ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

© 2022 г. S. Altmeyer<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup> *Castelldefels School of Telecom and Aerospace Engineering (EETAC), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain*

*\*E-mail: sebastian.andreas.altmeyer@upc.edu*

Поступила в редакцию 02.12.2021 г.

После доработки 21.12.2021 г.

Принята к публикации 21.12.2021 г.

Представлены результаты численного моделирования течения Куэтта магнитной жидкости между цилиндрами, вращающимися в противоположных направлениях, при наличии пространственно однородного магнитного поля, подвергающегося периодическим во времени модуляциям. Такие модуляции могут привести к существенному увеличению внутреннего числа Рейнольдса  $Re_i$  в первичных бифуркационных решениях, обладающих спиральной либо тороидальной структурами течения. Кроме того, задаваемая извне частота модуляции повышает различные решения на один уровень в иерархии сложности. Так, решения с фиксированной точкой становятся предельными циклами, а предельные циклы становятся решениями с двумя торами. Далее, при достаточно больших амплитудах модуляции магнитного поля возможен обмен устойчивостью между спиральными и ленточными решениями, возникающими при общем пороге бифуркации. Наконец, обнаружена устойчивая бифуркационная ветвь с прямой связью между ленточными вихрями и вихрями Тэйлора посредством волнистых вихрей Тэйлора.

*Ключевые слова:* уравнения Навье–Стокса, магнитные жидкости, модулированное магнитное поле, сценарий бифуркации, периодическое во времени воздействие, прямое численное моделирование, вычислительная гидродинамика

DOI: 10.31857/S056852812203001X

Тестовым примером при исследовании проблем неустойчивости, нелинейного поведения и образования структур является движение вязкой несжимаемой жидкости между вращающимися концентрическими цилиндрами (система Тэйлора–Куэтта, TCS), [1, 2]. Ввиду важности этих течений во многих технических приложениях (например, накачке жидкостей) были выполнены многочисленные исследования, показавшие, что система Тэйлора–Куэтта с внешним воздействием, зависящим от времени, представляет собой образцовый пример для изучения управления неустойчивостями течения.

Подобное внешнее воздействие на систему может быть осуществлено путем изменения граничных условий, например, посредством гармонически модулированных вращений внутреннего либо внешнего цилиндра (либо обоих), гармонических колебаний одного цилиндра в осевом направлении, пульсаций и т.д. [3–12]. Уже в ранних экспериментальных работах [7, 8] был обнаружен стабилизационный эффект, обусловленный таким воздействием. С тех пор данная проблема служила моделью для уяснения процессов периодического во времени внешнего воздействия и обусловленных им эффектов.

Использование магнитных жидкостей [13–15] предоставляет большие возможности в поддержании установки в стационарном состоянии и, при этом, периодическом воздействии на жидкость во всем ее объеме. В настоящее время проведены многочисленные численные и экспериментальные исследования течений Куэтта магнитных жидкостей при наличии статического магнитного поля. Изучалось влияние ориентации поля, агломерации, внутренней намагниченности, эффект кручения и т.д. [16–30]. Общий вывод всех этих работ состоит в том, что статическое магнитное поле, независимо от его ориентации, стабилизирует основное состояние (круговое течение Куэтта), т.е. отодвигает порог бифуркации первичной неустойчивости в сторону

бóльших значений соответствующего определяющего параметра (например, внутреннего числа Рейнольдса  $Re_i$ ).

В настоящее время исследования по течениям магнитных жидкостей под воздействием переменных магнитных полей сравнительно редки, а существующие работы сосредоточены в основном на вязкостных [31] и тепловых [32, 33] эффектах. Однако аналогично статическим полям, модулированные магнитные поля с достаточно высокой частотой модуляции стабилизируют основное состояние (круговое течение Куэтта) [15, 31] и могут предоставить в наше распоряжение достаточно точный определяющий параметр, манипулируя которым можно удерживать систему в до- или сверхкритическом состоянии [15]. В различных работах, посвященных в основном нагреву бинарных и магнитных жидкостей путем нестационарной модуляции [34–36], показано, что модуляция параметра в гидродинамических системах приводит к параметрическому резонансу. При этом возможны три типа отклика на параметр внешнего воздействия. Это *синхронный* отклик в случае, когда он повторяет внешнее воздействие, т.е. когда частота осциллирующего потока совпадает с частотой возбуждающего усилия. Затем это *субгармонический* отклик, когда характеристики системы осциллируют с удвоенной частотой (с полупериодом) по отношению к частоте воздействия. И, наконец, это квазипериодический отклик в том случае, когда осцилляции в потоке происходят на двух различных и *не связанных рационально* характерных частотах [37].

Интерес к использованию модулированных магнитных полей для управления течениями постоянно растет, благодаря их крайне востребованным свойствам и широкому кругу приложений. Одной из таких областей является медицина. Здесь магнитные жидкости могут быть использованы как носители лекарств, которые после впрыскивания в кровеносный сосуд могут быть сконцентрированы в требуемом месте путем приложения сильного градиента магнитного поля [38]. Другим возможным применением может быть лечение раковых заболеваний посредством гипертермии. При увеличении количества помеченных частиц, вводимых в ткань опухоли с носителем, переменное магнитное поле может быть использовано для нагрева ткани [39]. Это позволяет избежать нежелательных побочных влияний на другие органы при уничтожении опухоли.

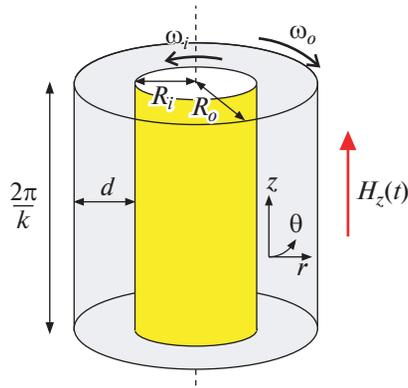
В случае исследуемого здесь чисто осевого (модулированного) магнитного поля сохраняются классические структуры течения, присущие системам Тэйлора–Куэтта. Так, первичными стационарными бифуркационными течениями являются тороидально замкнутое вихревое течение Тэйлора [1, 40, 41] и два осесимметричных вырожденных осциллирующих спиральных вихря (спиральное вихревое течение) [40, 41] с левой или правой закруткой, представляющие собой нарушающую симметрию бифуркацию Хопфа. Одновременно имеет место бифуркация ленточного состояния, которая может рассматриваться как нелинейное наложение двух спиральных вихревых течений, распространяющихся в противоположных направлениях, на осевую стоячую волну. Устойчивость спирального и тэйлоровского вихревых течений первоначально определяется порядком их появления, зависящим от заданного определяющего параметра, например, скорости вращения внешнего цилиндра или, как в настоящей работе, амплитудой модуляции магнитного поля.

С точки зрения динамической системы классическое вихревое течение Тэйлора, возникающее в бифуркации типа вилки, представляет собой решение с фиксированной точкой, тогда как спиральное и ленточное вихревые течения соответствуют решениям с предельным циклом [2, 42, 43]. Однако ситуация меняется в присутствии модулированного магнитного поля, так как динамика течения становится сложнее. Дополнительный параметр – частота модуляции  $\Omega_H$  – увеличивает размерность базисного пространства на единицу. Таким образом, прежнее стационарное решение (фиксированная точка) становится периодическим предельным циклом, а прежнее периодическое решение становится квазипериодическим (спиральное и ленточное течения, а также волнистый вихрь Тэйлора). Более того, достаточно сильные модулированные магнитные поля могут менять местами параметры устойчивости спирального и ленточного течений и при этом стабилизировать всю ветвь волнистого вихря Тэйлора, как переходного процесса между различными топологическими (спиральными и азимутально замкнутыми) структурами. В прежних работах такое явление было названо “бифуркацией прыжком” [44, 45].

## 1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

### 1.1. Постановка задачи

Рассмотрим стандартную систему Тэйлора–Куэтта (рис. 1), состоящую из двух концентрических, вращающихся независимо друг от друга цилиндров и зазора между ними, наполненного несжимаемой, изотермической, однородной, монодисперсной магнитной жидкостью с кинема-



**Рис. 1.** Схема системы Тэйлора–Куэтта с приложенным внешним однородным, но нестационарным магнитным полем  $H_z(t) = [H_S + H_M \sin(\Omega_H t)]e_z$ .

тической вязкостью  $\nu$  и плотностью  $\rho$ . Внутренний (внешний) цилиндр имеет радиус  $R_i$  ( $R_o$ ) и вращается с угловой скоростью  $\omega_i$  ( $\omega_o$ ). В осевом направлении  $z$  ставятся периодические граничные условия, соответствующие фиксированному осевому волновому числу  $k = 3.927$ , а на поверхностях цилиндров ставятся условия прилипания. В цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  система характеризуется полем скорости  $u = (u, v, w)$  и соответствующим полем завихренности  $\nabla \times u = (\xi, \eta, \zeta)$ . В настоящей работе отношение радиусов цилиндров  $R_i/R_o = 0.5$ . Рассматривается система с противоположным направлением вращения цилиндров при фиксированном внешнем числе Рейнольдса  $Re_o = -125$ . Время и расстояния обезразмериваются по времени диффузии  $d^2/\nu$  и ширине зазора  $d$ , а давление в жидкости по величине  $\rho\nu^2/d^2$ . Следует заметить, что используется предположение об однокомпонентной магнитной жидкости и пренебрегается диффузией наночастиц, которая тоже может играть роль в динамике течения.

Периодическое воздействие прикладывается путем синусоидальной модуляции внешнего магнитного поля, ориентированного параллельно оси симметрии системы  $z$ , равномерного в пространстве и гармонического во времени:  $H_z = [H_S + H_M \sin(\Omega_H t)]e_z$ . Заметим, что в статическом случае подобное магнитное поле, ориентированное в чисто осевом направлении, сохраняет основную симметрию системы (см. раздел 1.3), лишь сдвигая порог ее устойчивости, как указывалось в ранних работах [23–25]. Интенсивность магнитного поля  $H$  и намагниченность  $M$  нормализованы, как это принято, по величине  $\sqrt{\rho/\mu_0}\nu/d$  и магнитной проницаемости в свободном пространстве  $\mu_0$ .

## 1.2. Гидродинамическое уравнение движения магнитной жидкости

Гидродинамические уравнения в безразмерном виде [25, 27, 46] выводятся из уравнений

$$(\partial_t + u \times \nabla)u - \nabla^2 u + \nabla p = (M \times \nabla)H + \frac{1}{2} \nabla \times (M \times H), \quad \nabla \times u = 0. \quad (1.1)$$

Поля скорости на поверхностях цилиндров  $u(r_i, \theta, z) = (0, Re, 0)$  и  $u(r_o, \theta, z) = (0, 0, 0)$ , где внутренние и внешние числа Рейнольдса равны  $Re_{i,o} = \omega_{i,o} r_{i,o} d/\nu$ , а  $r_i = R_i/(R_o - R_i)$  и  $r_o = R_o/(R_o - R_i)$  — безразмерные радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно.

Для решения системы (1.1) требуется еще одно уравнение, описывающее намагниченность магнитной жидкости. Рассмотрим равновесное намагничивание невозмущенного состояния однородно намагниченной магнитной жидкости в состоянии покоя при среднем магнитном моменте, ориентированном в направлении магнитного поля:  $M^{eq} = \chi H$ . Магнитная восприимчивость  $\chi$  магнитной жидкости может быть аппроксимирована по формуле Ланжевена [47]. Далее, с использованием линейного закона намагничивания начальное значение  $\chi$  полагается равным 0.9. Рассматривается магнитная жидкость APG933 [48, 49]. Будем рассматривать близкие к равновесным аппроксимации [19, 50] с малыми значениями  $\|M - M^{eq}\|$  и малым значением времени

магнитной релаксации  $\tau$ :  $|\nabla \times u| \tau \ll 1$ . Используя эти аппроксимации, можем получить, аналогично [27], следующее уравнение магнетизации

$$M - M^{eq} = c_N^2 \left( \frac{1}{2} \nabla \times u \times H + \lambda_2 \mathbb{S} H \right), \quad (1.2)$$

где

$$c_N^2 = \tau / (1/\chi + \tau \mu_0 H^2 / 6\mu\Phi) \quad (1.3)$$

есть коэффициент Никласа [19],  $\mu$  – динамическая вязкость,  $\Phi$  – объемная доля магнитного материала,  $\mathbb{S}$  – симметричная компонента тензора градиента скорости [27, 46] и  $\lambda_2$  – коэффициент переноса, зависящий от материала [46]; значение последнего, в соответствии с [30, 46, 51, 52], выбрано равным  $\lambda_2 = 4/5$ . Используя уравнение (1.2), можно исключить магнетизацию из уравнения (1.1) и получить следующую систему уравнений движения магнитной жидкости [25, 27, 46]

$$(\partial_t + u \cdot \nabla) u - \nabla^2 u + \nabla p_M = -\frac{s_z^2}{2} \left[ H \nabla \cdot \left( F + \frac{4}{5} \mathbb{S} H \right) + H \times \nabla \times \left( F + \frac{4}{5} \mathbb{S} H \right) \right], \quad (1.4)$$

где  $F = (\nabla \times u/2) \times H$ ,  $p_M$  – динамическое давление, включающее все магнитные компоненты, которые могут быть выражены в виде градиентов, и  $s_z$  – параметр Никласа (уравнение (1.6)). В главном порядке внутреннее магнитное поле магнитной жидкости может быть аппроксимировано как наложенное извне поле [25], что является разумным приближением для получения динамических решений, соответствующих течениям жидкости, возбуждаемым магнитным полем. Уравнение (1.4) может быть упрощено и приведено к виду

$$\begin{aligned} (\partial_t + u \cdot \nabla) u - \nabla^2 u + \nabla p_M = s_z^2 \left\{ \nabla^2 u - \frac{4}{5} [\nabla \cdot (\mathbb{S} H)] - \right. \\ \left. - H \times \left[ \frac{1}{2} \nabla \times (\nabla \times u \times H) - H \times (\nabla^2 u) + \frac{4}{5} \nabla \times (\mathbb{S} H) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Таким образом, влияние магнитного поля (в данном случае однородного, но периодического, меняющегося во времени по закону  $H_z = [H_S + H_M \sin(\Omega_H t)] e_z$ ) и всех магнитных свойств магнитной жидкости на поле скорости может быть охарактеризовано единственным (в данном случае зависящим от времени) параметром Никласа [19]

$$\begin{aligned} s_z(t) &= \sqrt{c_N} H_z = \sqrt{c_N} [H_S + H_M \sin(\Omega_H t)] = \\ &= s_{z,S} + s_{z,M} \sin(\Omega_H t), \end{aligned} \quad (1.6)$$

и двумя не зависящими от времени определяющими параметрами

$$s_{z,S} = \sqrt{c_N} H_S \quad \text{and} \quad s_{z,M} = \sqrt{c_N} H_M, \quad (1.7)$$

где  $s_{z,S}$  – статический вклад в силовое воздействие,  $s_{z,M}$  – амплитуда модуляции и  $\Omega_H$  – частота модуляции. В настоящей работе рассматривается чисто модулированное магнитное поле (без какой-либо статической составляющей, т.е.  $s_{z,S} = 0$ ) в высокочастотном пределе  $\Omega_H = 0$ ; это означает, что инерцией жидкости можно пренебречь и система встречается с действием осредненного магнитного поля [15].

### 1.3. Симметрии

В отсутствие периодического воздействия группа симметрии проблемы Тэйлора–Куэтта есть  $O(2) \times SO(2)$  [2]. Основное состояние инвариантно по отношению к числу симметрий, чьи действия на общее поле скоростей описываются следующим образом

$$\begin{aligned} R_\Phi(u, v, w)(r, \theta, z) &= (u, v, w)(r, \theta + \Phi, z) \\ K_z(u, v, w)(r, \theta, z) &= (u, v, -w)(r, \theta, -z) \\ T_\alpha(u, v, w)(r, \theta, z) &= (u, v, w)(r, \theta, z + \alpha) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Симметрия  $SO(2)$  происходит от вращений вокруг оси, а  $O(2) \times SO(2)$  представляет собой группу симметрии для системы под периодическим внешним воздействием. В то время как  $SO(2)$

остаётся не подверженным влиянию модуляции, осевая симметрия нарушается и, вместе с ней, симметрия проблемы в целом. Вместо этого, в сочетании со сдвигом во времени на полпериода, получим скользящую во времени симметрию системы  $G$ . Эта симметрия, вместе с перемещениями вдоль оси, составляет группу симметрии  $O(2)$ . С точки зрения воздействия на поле скорости можно выписать следующее выражение для этой симметрии (симметрия с полупериодным опрокидыванием)

$$G(u, v, w)[r, \theta, z, t] = (u, v, -w)[r, \theta, -z, t + \tau]. \quad (1.9)$$

При этом  $R$  меняется от чисто пространственной симметрии к пространственно-временной симметрии. Пространственно-временная симметрия  $Z_2$ , порожденная  $G$ , создает более сложный сценарий бифуркации, запрещая удвоение периода через простое отрицательное собственное значение  $\mu = -1$  [4, 53].

#### 1.4. Численный метод

Уравнения движения магнитной жидкости (1.4) могут быть решены [24, 25, 27] сочетанием стандартной разностной схемы второго порядка по  $(r, z)$  со спектральным Фурье-разложением по  $\theta$  и явным интегрированием по времени. Переменные задачи могут быть представлены в виде

$$f(r, \theta, z, t) = \sum_{m=-m_{\max}}^{m_{\max}} f_m(r, z, t) e^{im\theta}, \quad (1.10)$$

где  $f$  означает одну из переменных  $\{u, v, w, p\}$ . В рассмотренных диапазонах параметров выбор  $m_{\max}$  обеспечивает адекватную точность. В работе используется равномерная сетка с шагами по пространству  $\delta r = \delta z = 0.02$  и шагом по времени  $\delta t < 1/3800$ . Для диагностических целей также оцениваются комплексные амплитуды мод  $f_{m,n}(r, t)$ , определяемые из разложения Фурье в осевом направлении

$$f_m(r, z, t) = \sum_n f_{m,n}(r, t) e^{inkz}, \quad (1.11)$$

где  $k = 2\pi d/\lambda$  – осевое волновое число.

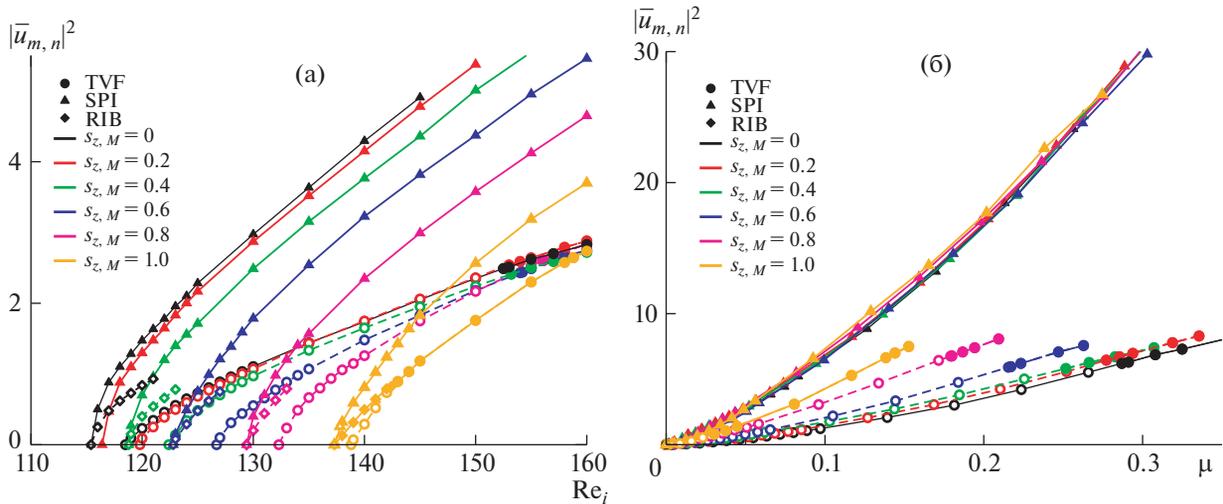
## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ

### 2.1. Характеристики бифуркации

В классической проблеме Тэйлора–Куэтта первичные решения в виде вихревых течений Тэйлора появляются в результате суперкритической бифуркации типа вилки, нарушающей трансляционную симметрию  $T_\alpha$ . Вихревые течения Тэйлора представляют собой семейство устойчивых осесимметричных решений, с параметром в виде их расположения на оси; визуально они имеют вид группы наложенных друг на друга “жидких бубликов”. Что касается спиральных и ленточных течений, они возникают в бифуркации Хопфа, нарушающей симметрию  $O(2)$  (исключая  $K_z$ ). С динамической точки зрения эти течения соответствуют решениям с фиксированной точкой и предельным циклам соответственно. Однако периодическое силовое воздействие изменяет этот “классический” сценарий. В действительности оно увеличивает размерность базового пространства на единицу. Поэтому вихревое течение Тэйлора становится решением предельного цикла, а спиральное и ленточное течения становятся квазипериодическими решениями типа двойного тора. Более подробно мы остановимся на этом вопросе в разделе 2.1.4.

#### 2.1.1. Пороги устойчивости при изменении амплитуды модуляции $s_{z,M}$

На рис. 2а показаны ветви прямой бифуркации спирального (треугольники) и тэйлоровского вихревого (кружки) решений для различных значений амплитуды модуляции магнитного поля  $s_{z,M}$ . Начала ветвей определяются критической кривой изменения амплитуды модуляции  $s_{z,M}$  (рис. 7). Пороги бифуркации для спиральных и ленточных течений совпадают [2, 45, 54]. Для всех  $s_{z,M}$ , кроме  $s_{z,M} = 1$ , ленточные течения в начальной точке неустойчивы, а спиральные течения устойчивы.



**Рис. 2.** Бифуркационная диаграмма. Осредненные по времени амплитуды различных мод  $|\bar{u}_{m,n}|$  радиального поля течения в середине просвета между цилиндрами для вихревого течения Тэйлора (TVF,  $|\bar{u}_{0,1}|$ ,  $\bullet$ ) и спирального течения (SPI,  $|\bar{u}_{1,1}|$ ,  $\blacktriangle$ ) при различных амплитудах модуляции  $s_{z,M}$  магнитного поля в зависимости от (а) внутреннего числа Рейнольдса  $Re_i$  и (б) относительного расстояния  $\mu = Re_i(s_{z,M})/Re_{i,c}(s_{z,M}) - 1$  от начального значения  $Re_{i,c}(s_{z,M})$ , соответствующего возникновению данной моды при заданной амплитуде модуляции магнитного поля  $s_{z,M}$ . Темные и светлые значки соответствуют устойчивым и неустойчивым решениям. SPI являются устойчивыми при  $s_{z,M} \lesssim 0.82$  и остаются устойчивыми далее, тогда как TVF в начальной стадии неустойчивы, но стабилизируются при больших  $Re_i$ . Для большей наглядности ветви, соответствующие ленточным решениям (RIB), представлены только вблизи их начала. Эти решения появляются у того же порога, что и SPI, причем происходит обмен устойчивостью между этими двумя решениями. Таким образом, RIB устойчивы при  $s_{z,M} \gtrsim 0.82$ . См. также рис. 7.

Будучи сверхкритическими для спиральных, ленточных и тэйлоровских течений, амплитуды доминантных мод  $|\bar{u}_{1,1}|$  и  $|\bar{u}_{0,1}|$  растут по известному закону квадратного корня. Заметим, что здесь используются осредненные по времени амплитуды мод  $|\bar{u}_{m,n}|$ ; сами  $|\bar{u}_{m,n}|$  являются периодически во времени, в соответствии с частотой модуляции  $\Omega_H$  (см. рис. 5).

Однако существуют некоторые очевидные различия ветвей, соответствующих двум различным решениям. Характер бифуркационных ветвей спиральных решений остается в целом одним и тем же, лишь начала этих ветвей смещаются в сторону больших  $Re_i$  при увеличении  $s_{z,M}$  (вправо на рис. 2а). Эти решения являются устойчивыми почти во всем представленном здесь диапазоне параметров. Ветви тэйлоровских вихревых решений ведут себя по-иному с увеличением амплитуды модуляции. Прежде всего, эти решения неустойчивы вблизи начал своих ветвей и приобретают устойчивость с увеличением  $Re_i$ . Во-вторых, наклоны этих сверхкритических ветвей с увеличением  $Re_i$  становятся значительно меньше, чем наклоны кривых для спиральных решений (по крайней мере, при малых и умеренных значениях  $s_{z,M}$ ). В-третьих, эти наклоны становятся круче с ростом  $s_{z,M}$ . Эти изменения характеристик бифуркации становятся очевидными, когда сценарий бифуркации соотносится с его соответствующим началом (рис. 2б). Все кривые для спиральных решений практически совпадают. С другой стороны, с увеличением амплитуды модуляции  $s_{z,M}$  амплитуды мод тэйлоровских вихревых решений растут значительно быстрее, а соответствующие наклоны кривых становятся круче. Таким образом, спиральные течения менее чувствительны к росту амплитуды модуляции, т.е. внутреннее течение остается неизменным.

Окончательно можно сказать, что увеличение амплитуды модуляции  $s_{z,M}$  сдвигает начало всех первичных неустойчивостей (спиральной, ленточной и тэйлоровской) в сторону больших значений определяющего параметра  $Re_i$  (вправо на рис. 2а) и, таким образом, стабилизирует основное состояние кругового течения Куэтта по отношению к любым возникающим первичным неустойчивостям. Хотя величина стабилизации различна, порядок бифуркации не изменяется

(для рассмотренного в работе диапазона параметров). Аналогичное наблюдение было сделано в численных и экспериментальных исследованиях по увеличению напряженности статического магнитного поля [22–24] и, недавно, для вихревых течений Тэйлора в модулированных магнитных полях [15] при внешнем цилиндре, находящемся в состоянии покоя. При достаточно больших амплитудах модуляции устойчивость первичного бифуркационного решения переходит от спирального к ленточному решению.

### 2.1.2. Устойчивая связь между ленточным и волнистым тэйлоровским вихревым решениями

Большие амплитуды модуляции ( $s_{z,M} = 1$ ) не только приводят к обмену устойчивостью между двумя первичными бифуркационными решениями, перенося ее от спирального к ленточному решению (рис. 2), но они могут даже стабилизировать всю бифуркационную ветвь, соединяя ленточное решение с тэйлоровским через волнистый тэйлоровский вихрь [44, 45].

Этот феномен проиллюстрирован на рис. 3, где построены устойчивые (сплошные кривые с темными значками) и неустойчивые (пунктирные кривые со светлыми значками) бифуркационные кривые тэйлоровских вихревых (синие кружки), спиральных (красные треугольники), ленточных (зеленые ромбы) и тэйлоровских волнистых вихревых (черные квадраты) решений как функции  $Re_i$  в отсутствие магнитного поля  $s_{z,M} = 0$  (а) и при большой амплитуде модуляции  $s_{z,M} = 1$  (б). Соответствующие параметры также показаны двумя стрелками (а) и (б) на фазовой диаграмме (рис. 7). Представлены: (1), кинетическая энергия мод  $E_{kin} = \sum_m E_m = \frac{1}{2} \sum_m \int_0^{2\pi} \int_{-\Gamma/2}^{\Gamma/2} \int_{r_i}^{r_o} u_m u_m^* r dr dz d\theta$  (где  $u_m(u_m^*)$  –  $m$ -я (комплексно сопряженная) Фурье-мода поля скоростей) и (б), амплитуды мод  $|u_{m,n}|$ .

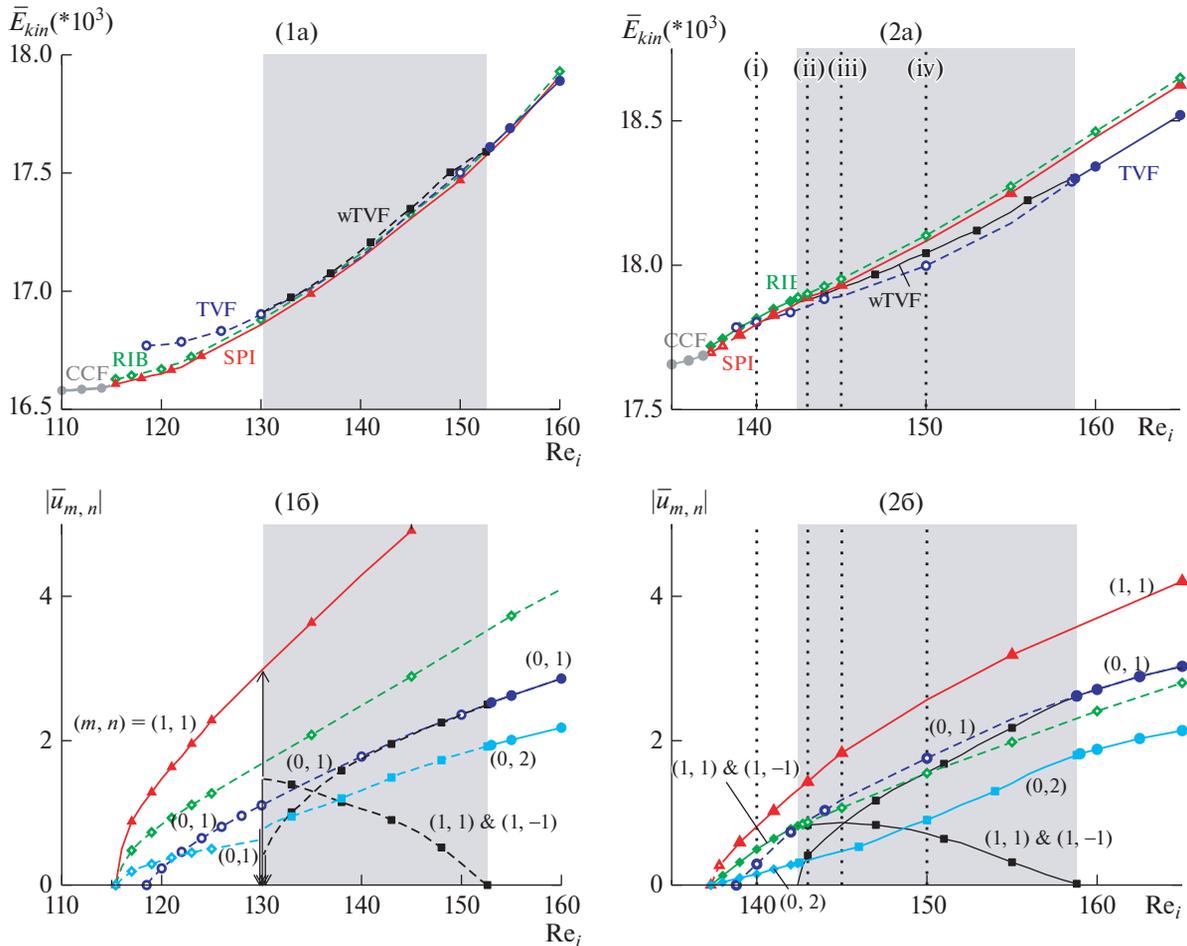
Сценарий бифуркации в отсутствие магнитного поля (1.3) обсуждался ранее и здесь представлен лишь для напоминания и сравнения. Его детальное описание содержится в работе [45]. Вкратце, с уменьшением  $Re_i$  тэйлоровское вихревое течение теряет устойчивость, а при его вторичной бифуркации возникает устойчивое волнистое тэйлоровское вихревое течение. С приближением последнего к ветви неустойчивого ленточного решения оно и само теряет устойчивость и “подпрыгивает” вверх к единственной устойчивой ветви, соответствующей спиральному течению [44, 45] (показано вертикальными стрелками на рис. 3(1)).

При больших амплитудах модуляции  $s_{z,M} = 1$  сценарий бифуркации выглядит на первый взгляд аналогичным: он смещается в сторону больших  $Re_i$  благодаря обсуждавшемуся выше эффекту стабилизации за счет модулированного магнитного поля. Однако более важным является тот факт, что, благодаря внешнему воздействию, осуществляемому модулированным магнитным полем, повышается на единицу сложность всех решений (см. ниже). Важное различие состоит также и в том, что при  $s_{z,M} = 1$  не происходит “прыжка”, а вместо этого ветвь, соответствующая волнистому тэйлоровскому решению, непосредственно соединяется с ленточным решением с переносом устойчивости с одной ветви на другую (рис. 3б).

В отсутствие магнитного поля кинетическая энергия мод  $E_{kin}$  для спиральных, ленточных и тэйлоровских вихревых решений является выпуклой функцией  $Re_i$ , а  $E_{kin}$  в начале ветви тэйлоровского решения больше, чем в случае спиральной и ленточной мод (при том же значении  $Re_i$ ). Как и следовало ожидать,  $E_{kin}$  для волнистого тэйлоровского вихревого решения несколько больше, чем для (неустойчивого) тэйлоровского решения, благодаря более сложной динамике потока, включающей дополнительные спиральные движения. Качественно, при больших амплитудах модуляции  $s_{z,M}$  изменения  $E_{kin}$  при изменении  $Re_i$  очень похожи. Однако, кривые для различных решений менее выпуклы и, особенно на начальной стадии, обнаруживают в основном линейное поведение. Далее, энергия  $E_{kin}$  для спирального и ленточного решений выше, чем для двух тороидальных решений – тэйлоровского вихревого и волнистого тэйлоровского вихревого.

### 2.1.3. Характеристики течения

Следуя по бифуркационной ветви, соответствующей волнистому тэйлоровскому решению, от тэйлоровского решения к устойчивой ленточной ветви, можно заметить, что динамика течения становится более волнистой (см. рис. 4(2)–4(4)), т.е. амплитуды спиральных мод  $u_{1,\pm}$  возрастает.

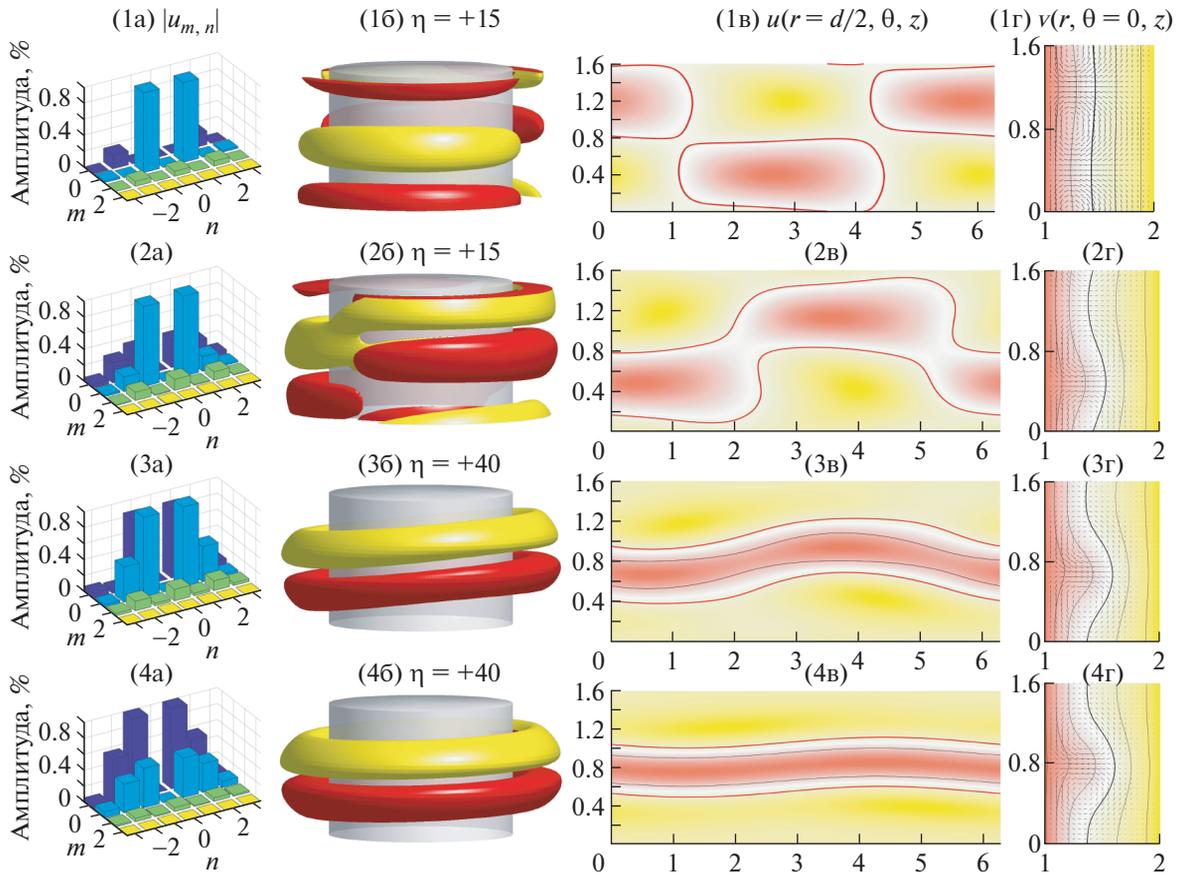


**Рис. 3.** Бифуркационные диаграммы для различных вихревых структур как функции от  $Re_i$  для (1)  $s_{z,M} = 0$  и (2)  $s_{z,M} = 1$  (см. стрелки на рис. 7). Сплошные (пунктирные) линии с темными (светлыми) значками относятся к устойчивым (неустойчивым) решениям. Представлены (а) кинетическая энергия мод  $E_{kin}$  и (б) амплитуды в радиальном поле течения в середине просвета между цилиндрами  $|u_{m,n}|$  для вихревого решения Тэйлора (TVF,  $(m,n) = (0,1)$ ), спирального решения (SPI,  $(m,n) = (1,1)$ ), ленточного решения (RIB,  $(|u_{1,1}| = |u_{1,-1}|)$ ) и волнистого вихревого решения Тэйлора (wTVF). Характерной особенностью волнистого решения является то, что  $u_{0,1} \neq 0$  и  $u_{1,\pm 1} = 0$ , тогда как  $u_{0,1}^{SPI} = 0 = u_{1,\pm 1}^{TVF}$ . (i)–(iv) указывают наборы параметров, для которых представлены визуализации на рис. 4.

тают, тогда как доминирующие азимутальные моды  $u_{0,\pm 1}$  непрерывно убывают (рис. 3б). В некоторой точке спиральные моды  $u_{1,\pm 1}$  (рис. 3а) даже превышают тороидальную моду. Это имеет место для обоих сценариев, в которых ленточная мода может быть как устойчива, так и неустойчива. С уменьшением  $u_{0,\pm 1}$  вихревые трубки внутри азимутального волнистого тэйлоровского вихревого течения сужаются в определенных азимутальных положениях ( $\theta = \pi/4$ ) (рис. 4(2в)). Окончательно, когда  $u_{0,\pm 1}$  становится равным нулю, вихревые трубки рвутся, превращаясь в ленточные. Чтобы подчеркнуть прямую связь волнистой тэйлоровской и ленточной ветвей, на рис. 3(2б) также включены моды  $(0, \pm 2)$ . В то время как при  $s_{z,M} = 0$  соответствующий “прыжок” при переходе на спиральную ветвь отсутствует (при  $(0, \pm 1)$ ), при  $s_{z,M} = 1$  мода плавно (без прыжка) продолжается от тэйлоровского вихревого к ленточному течению.

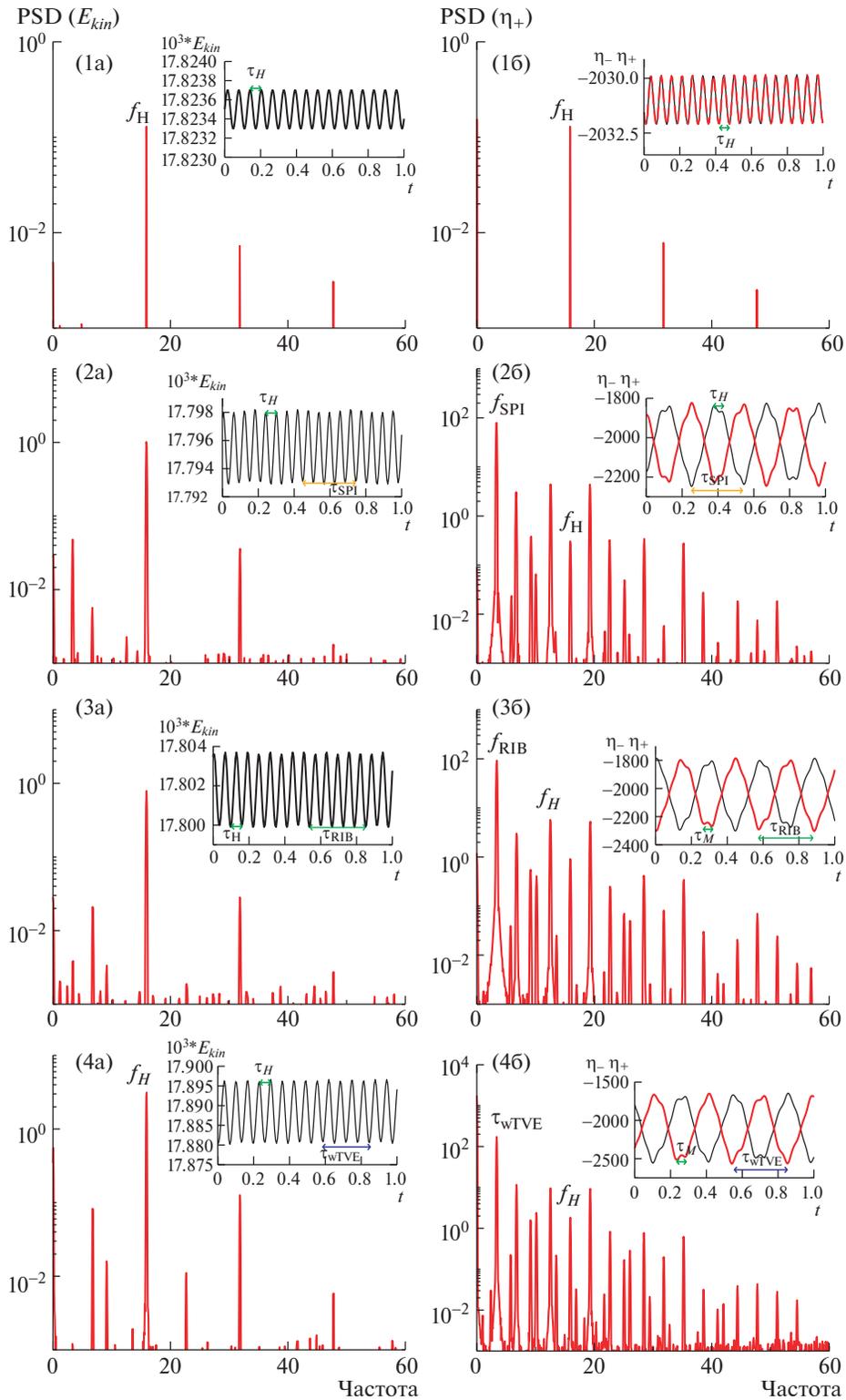
2.1.4. Увеличение сложности

Чтобы охарактеризовать количественно влияние амплитуды модуляции магнитного поля  $s_{z,M}$ , на рис. 5 построены временные ряды и соответствующие спектральные плотности энергии (PSD)

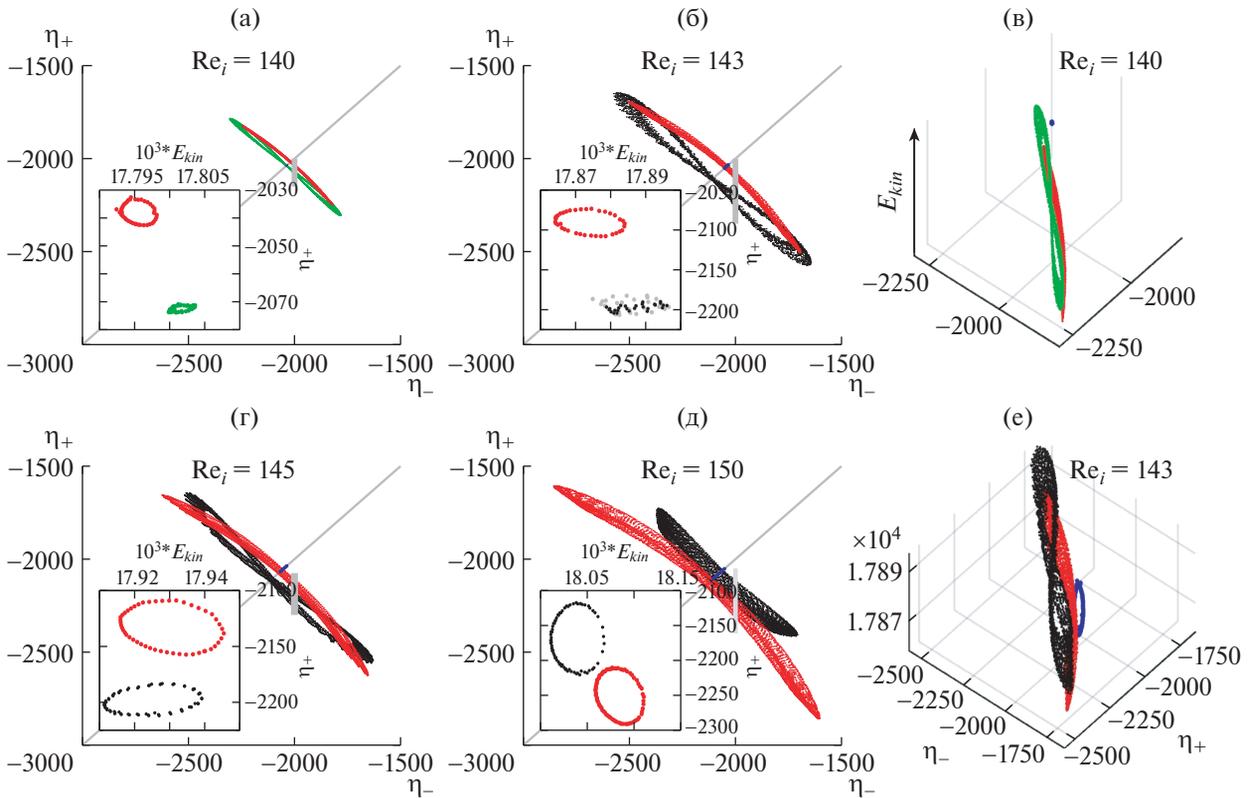


**Рис. 4.** Визуализация различных устойчивых структур течения вдоль ветви, соединяющей ленточные (RIB) и волнистые тэйлоровские (wTVF) решения, возникающие с изменением  $Re_i$ . Кадры соответствуют: (1) RIB при  $Re_i = 0$ , (2) wTVF при  $Re_i = 3$ , (3) wTVF при  $Re_i = 5$ , (4) wTVF при  $Re_i = 0$  (соответствующие параметры указаны вертикальными линиями (i)–(iv) на рис. 3). Показаны (а) Фурье-спектр  $(m, n)$ ; (б) изоповерхности  $\eta$  [красные (темно-серые) и желтые (светло-серые) цвета соответствуют положительным и отрицательным значениям, нулевым значениям соответствует белый цвет]; (в) радиальная скорость  $u(\theta, z)$  на развернутой цилиндрической поверхности в середине кольцевого просвета между цилиндрами [красные (желтые) цвета соответствуют втекающему и вытекающему потоку]; (г) векторное поле  $[u(r, z), w(r, z)]$  радиальной и осевой компонент скорости (включая помеченную цветами азимутальную скорость  $v$ ).

для глобальной меры  $E_{kin}$  и локальной меры  $\eta_{\pm} = (0, 0, \pm 0.25\Gamma)$  для различных указанных состояний течения. Величина PSD для вихревого течения Тэйлора (рис. 5(1)) лучше всего иллюстрирует влияние частоты модуляции внешнего поля  $\Omega_H$  как на глобальную величину  $E_{kin}$ , так и на локальную величину  $\eta_{\pm}$ . Тогда как классическое вихревое течение Тэйлора представляет собой стационарное решение с фиксированной точкой, модулированное во времени магнитное поле превращает это течение в предельный цикл, повышая его на единицу в иерархии сложности. Таким образом, для вихревого течения Тэйлора PSD дает классический синхронный отклик [55]. Для рассмотренной здесь частоты модуляции поля  $\Omega_H = 0$  результирующая частота  $f_H$ , возникающая в решении предельного цикла для вихревого течения Тэйлора  $f_H = \Omega_H/2\pi = 0.916 [\Omega_H = 0]$ , что эквивалентно периоду модуляции  $\tau_H = 0.0628$ . Аналогично, спиральное и ленточное решения, являющиеся классическими решениями предельного цикла (с одним тором), приобретают более сложный тип решения. Благодаря наличию частоты модуляции  $\Omega_H$ , они становятся квазипериодическими решениями (с двумя торами). Спиральное и ленточное решения (рис. 5(2, 3)) обладают, каждая, некоторой основной частотой ( $f_{SPI}, f_{RIB}$ ), что характеризует их как модулированные вращающиеся волны; заметим, что классические спиральное и ленточное решения представляют собой вращающиеся волны. Оба они являются примерами квазипериодического



**Рис. 5.** Зависимость от времени и спектральная плотность энергии (PSD) для различных структур течения при указанных значениях  $Re_i$ . Значения PSD для (а)  $E_{kin}$  и (б)  $\eta_{\pm}$  [ $\eta_{\pm} = (0, 0, \pm 0.25\Gamma)$ ] для (1) тэйлоровского вихревого решения TVF (неустойчивое) при ( $Re_i = 0, s_z = 1.0$ ) с  $\tau_{TVF} = \tau_H \approx 0.0628$  ( $f_{TVF} = f_H \approx 15.916$ ); (2) спирального решения SPI при  $Re_i = 0, s_z = 1.0$  с  $\tau_{SPI} \approx 0.298$  ( $f_{SPI} \approx 3.354$ ); (3) ленточного решения RIB при  $Re_i = 0, s_z = 1.0$  с  $\tau_{RIB} \approx 0.292$  ( $f_{RIB} \approx 3.426$ ) и (4) волнистого тэйлоровского вихревого решения wTVF при  $Re_i = 3, s_z = 1.0$  с  $\tau_{wTVF} \approx 0.299$ . На вставках зависимости от времени (а)  $E_{kin}$  и (б)  $\eta_{\pm}$  [красный (серый)] и  $\eta_{-}$  (черный) соответственно. Значения параметров указаны также на рис. 7.



**Рис. 6.** Фазовые портреты в плоскости  $(\eta_-, \eta_+)$  (а–г) и динамика в фазовом пространстве  $(\eta_-, \eta_+, E_{kin})$  (д, е) решений TVF, SPI, RIB и wTVF при значениях  $Re_i$ , указанных на плоскости  $(\eta_-, \eta_+)$ .

отклика [55]; для спирального решения отношение  $f_{SPI}/f_H = 3.354/15.916 = 0.2107$ , а для ленточного  $f_{RIB}/f_H = 3.426/15.916 = 0.2152$ . Модуляция, вызванная нестационарным внешним полем, лучше всего различима в соответствующих временных рядах локальных мер  $\eta_{\pm}$  (вставки в рис. 5(2б, 3б)). Соответствующие значения PSD для  $\eta_{\pm}$  показывают нелинейное наложение двух этих частот, тогда как значения PSD и временные ряды для  $E_{kin}$ , являющейся глобальной мерой, значительно проще. При почти идентичных частотах пик PSD для  $f_{RIB}$  много меньше, чем для  $f_{SPI}$ , что проистекает из того факта, что ленточное решение представляет собой стоячие волны в осевом направлении, тогда как спиральное решение еще и распространяется вдоль оси. В случае волнистого тэйлоровского решения (рис. 5(4)) временные ряды для  $\eta_{\pm}$  очень близки к рядам для ленточного решения, но с бóльшим диапазоном изменения, а для соответствующего PSD имеет место отношение частот  $f_H : f_{wTVF} = 5 : 1$  ( $f_{wTVF}/f_H = 3.221/15.916 = 0.2023$ ). В отличие от ленточного решения,  $f_{wTVF}$  не возникает в PSD глобальной величины  $E_{kin}$ , а только в PSD локальной величины  $\eta_{\pm}$ . Это следует из различной природы волнистого вихревого течения Тэйлора и спирального решения. Первое в основном есть вихревое течение Тэйлора с азимутальной (спиральной) модуляцией, а второе есть наложение двух чисто спиральных решений с противоположным направлением закрутки, но с той же частотой  $f_{SPI}$ .

Для визуализации эволюции динамики течения при изменении  $Re_i$  на рис. 6 показаны фазовые портреты различных решений (вихревых тэйлоровских, спиральных, ленточных и волнистых вихревых тэйлоровских), возникающие на траектории перехода в плоскости  $(\eta_-, \eta_+)$ . В этой плоскости вихревые решения Тэйлора лежат на диагонали  $\eta_+ = \eta_-$ . То есть, говоря топологическим языком, они представляют собой вырожденный предельный цикл. Однако трехмерная визуализация  $(\eta_+, \eta_-, E_{kin})$  (рис. 6(д, е)) обнаруживает предельный цикл, характерный для вихревого течения Тэйлора, который становится все более отчетливым с увеличением  $s_{z,M}$ .



Для параметров на рис. 7 максимальное увеличение устойчивости по  $Re_i$  составляет примерно 14.6% для спиральных и ленточных решений и 16.6% для вихревых решений Тэйлора, если сравнивать системы при отсутствии магнитного поля и при наличии переменного магнитного поля с  $s_{z,M} = 1$ .

С увеличением  $s_{z,M}$  и стабилизацией основного состояния системы суживается диапазон  $Re_i$ , в котором существуют волнистые вихревые течения Тэйлора (область F). Эта область полностью исчезает, когда пороги первичной бифуркации для спиральных и вихревых решений пересекаются (см. [45]) при больших значениях  $s_{z,M}$  (которые лежат вне диапазона параметров, рассмотренного в настоящей работе).

Пороги спиральных и ленточных решений идентичны [2, 45, 54], но ленточные решения более неустойчивы в начальной стадии. В то время как при  $s_{z,M} \lesssim 0.82$  спиральное решение является устойчивым, а ленточное неустойчивым в начальной стадии, при  $s_{z,M} \gtrsim 0.82$  картина противоположная. Переходя в фазовом пространстве от области F в область  $C_2$ , можно обнаружить устойчивую связующую ветвь между волнистым вихревым и ленточным решениями (рис. 3(2)), в то время как при переходе из области F в область  $C_1$  волнистое решение теряет устойчивость и имеет место бифуркация “прыжком” [44, 45] к спиральному решению (рис. 3(1)).

Подводя итог, можно сказать, что с точки зрения устойчивости система реагирует на модуляцию магнитного поля так же, как и на увеличение напряженности магнитного поля в статическом случае. Это справедливо для всех решений (спиральных, ленточных и вихревых тэйлоровских), но сильнее всего стабилизационный эффект проявляется в случае спиральных и ленточных решений.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена динамика течения магнитной жидкости при воздействии модулированного магнитного поля. Численно решены уравнения движения магнитной жидкости для системы Тэйлора–Куэтта с цилиндрами, вращающимися в противоположном направлении. Показано, что модулированные магнитные поля стабилизируют основное состояние системы (круговое течение Куэтта), смещая пороги бифуркации в сторону больших значений определяющих параметров. Величина эффекта стабилизации, т.е., указанного смещения, зависит от конкретных решений и определяющих параметров. Однако в целом эффект представляется меньшим, чем в статическом случае.

Дополнительная частота  $\Omega_H$ , вносимая модулируемым магнитным полем, коренным образом влияет на базовую топологию структур течения. Основным результатом заключается в увеличении сложности характера течения с ростом всех решений в иерархии сложности. Так, вихревое течение Тэйлора – классическое решение с фиксированной точкой – становится предельным циклом (один тор), а классические периодические решения с предельным циклом (спиральное, ленточное и волнистое тэйлоровское) становятся квазипериодическими решениями, находящимися в состоящем из двух торов инвариантном многообразии. Это обстоятельство может быть интересно для будущих исследований, в которых подобное модулированное поле может быть наложено на известные решения с тремя торами, чтобы обнаружить и исследовать динамику и потенциальные сценарии бифуркации для потенциальных решений с четырьмя торами. Последние могут помочь получить некоторое новое и/или иное представление о турбулентности (табл. 1).

В рассмотренном здесь случае высокочастотной модуляции  $\Omega_H = 0$  отношение частоты внешнего воздействия и характерной частоты решения (волнистого, спирального и ленточного) не является рациональным числом; поэтому отклик системы является квазипериодическим. Только для случая вихревого решения Тэйлора, не имеющего такой характеристической частоты, обнаружен субгармонический отклик. При рассмотрении других частот  $\Omega_H$ , являющихся кратными величинами характеристических частот  $f_H = 2f_{SPI}$  (или  $f_H = 2f_{wTVF}$ ), вполне можно ожидать появления интересных резонансных явлений, таких как переключение между различными модами [34]. Кроме того, частота модуляции  $\Omega_H$  может быть использована для управления системой при изменении между ее докритическим и сверхкритическим поведением.

Далее обнаружено, что при достаточно больших амплитудах модуляции устойчивость переносится между двумя первичными бифуркационными решениями, спиральным и ленточным, имеющими общий порог бифуркации. В соответствующем диапазоне параметров имеет место

**Таблица 1.** Различные области, обозначенные буквами A–D и представленные на диаграммах в фазовом пространстве  $(Re_{i,c}, S_{z,M})$  на рис. 7, с указанием характеристик устойчивости различных решений: устойчивые (s), неустойчивые (u) и не существующие (–)

Область	A	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	D	E	F
TVF	–	–	–	u	u	s	s	u
SPI	S	U	s	s	s	u	s	s
wTVF	–	–	–	–	–	–	–	s
RIB	u	s	s	u	s	U	u	u

переход с устойчивого вихревого решения Тэйлора на устойчивое ленточное решение через волнистое тэйлоровское решение. Это важно, так как в ранних работах был обнаружен лишь переход неустойчивого ленточного решения в спиральное решение посредством ‘прыжка’ [44, 45].

Управление течением посредством модулированных магнитных полей может быть полезно во многих приложениях. Основываясь на представленных в настоящей работе результатах, можно ожидать интересных исследований по вариации частоты вынуждающего воздействия  $\Omega_H$ , особенно с упором на области, где сосуществуют различные решения, например, спиральное и волнистое тэйлоровское.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Taylor G.I.* Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1923. V. 223. P. 289.
2. *Chossat P., Iooss G.* The Couette–Taylor problem. Berlin: Springer, 1994.
3. *Hu H.C., Kelly R.E.* Effect of a time-periodic axial shear flow upon the onset of Taylor vortices // *Phys. Rev. E.* 1995. V. 51. P. 3242.
4. *Marques F., Lopez J.* Spacial and temporal resonances in a periodically forced hydrodynamic system // *Physica D. Nonlinear Phenomena.* 2000. V. 136. P. 340.
5. *Weisberg A., Kevrekidis I., Smits A.* Delaying transition in Taylor–Couette flow with axial motion of the inner cylinder // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 348. P. 141.
6. *Murray B.T., McFadden G.B., Coriell S.R.* Stabilization of Taylor–Couette flow due to time-periodic outer cylinder oscillation // *Phys. Fluids A: Fluid Dyn.* 1990. V. 2. P. 2147.
7. *Donnelly R.* Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders. III, Enhancement of stability by modulation // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1964. V. 281. P. 130.
8. *Donnelly R.F., Reif F., Suhl H.* Enhancement of hydrodynamic stability by modulations // *Phys. Rev. Lett.* 1962. V. 9. P. 363–365.
9. *Ganske A., Gebhardt T., Grossmann S.* Modulation effects along stability border in Taylor–Couette flow // *Phys. Fluids.* 1994. V. 6. P. 3823.
10. *Carmi S., Tustaniwskyj J.I.* Stability of modulated finite-gap cylindrical Couette flow: linear theory // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 108. P. 19.
11. *Barenghi C.F., Jones C.A.* Modulated Taylor–Couette flow // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 208. P. 127.
12. *Barenghi C.F.* Computations of transitions and Taylor vortices in temporally modulated Taylor–Couette flow // *J. Comput. Phys.* 1991. V. 95. P. 175.
13. *Rosensweig R.E.* Ferrohydrodynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
14. *Altmeyer S.* Ferrofluids // *Scholarpedia.* 2020. V. 15. P. 55163.
15. *Altmeyer S.* On the ridge of instability in ferrofluidic Couette flow via alternating magnetic field // *Sci. Reports.* 2021. V. 11. P. 4705.
16. *Neuringer J.L., Rosensweig R.E.* Ferrohydrodynamics // *Phys. Fluids.* 1964. V. 7. P. 1927.
17. *Rosensweig R.E., Kaiser R., Miskolczy G.* Magnetoviscosity of magnetic fluid in a magnetic field // *J. Colloid Interface Sci.* 1969. V. 29. P. 680.
18. *Каишевский Б.Э.* О моменте сил, действующем на тело в магнитной жидкости // *Изв. АН СССР.* 1980. № 4. С. 132–136.
19. *Niklas M.* Influence of magnetic fields on Taylor vortex formation in magnetic fluids // *Z. Phys. B.* 1987. V. 68. P. 493.

20. *Odenbach S.* Magnetoviscous and viscoelastic effects in ferrofluids // *Int. J. Modern Phys. B.* 2000. V. 14. P. 1615.
21. *Odenbach S., Gilly H.* Taylor-vortex flow of magnetic fluids under the influence of an azimuthal magnetic field // *J. Magn. Magn. Mater.* 1995. V. 152. P. 123.
22. *Reindl M., Odenbach S.* Influence of a homogeneous axial magnetic field on Taylor–Couette flow of ferrofluids with low particle-particle interaction // *Exp. Fluids.* 2011. V. 50. P. 375.
23. *Reindl M., Odenbach S.* Effect of axial and transverse magnetic fields on the flow behavior of ferrofluids featuring different levels of interparticle interaction // *Phys. Fluids.* 2011. V. 23. P. 093102.
24. *Altmeyer S., Hoffmann C., Leschhorn A., Lücke M.* Influence of homogeneous magnetic fields on the flow of a ferrofluid in the Taylor–Couette system // *Phys. Rev. E.* 2010. V. 82. P. 016321.
25. *Altmeyer S., Lopez J., Do Y.* Influence of an inhomogeneous internal magnetic field on the flow dynamics of ferrofluid between differentially rotating cylinders // *Phys. Rev. E.* 2012. V. 85. P. 066314.
26. *Altmeyer S., Leschhorn A., Hoffmann C., Lücke M.* Elongational flow effects on the vortex growth out of Couette flow in ferrofluids // *Phys. Rev. E.* 2013. V. 87. P. 053010.
27. *Altmeyer S., Lopez J., Do Y.* Effect of elongational flow on ferrofluids under a magnetic field // *Phys. Rev. E.* 2013. V. 88. P. 013003.
28. *Потанин Е.П.* Влияние магнитного поля на циркуляцию проводящей среды во вращающемся цилиндре при наличии тормозящего торца // *Изв. РАН. МЖГ.* 2015. № 5. С. 85–95.
29. *Storozhenkova A., Stannarius R., Tantsyura A.O., Shabanova I.A.* Measurement of the torque on diluted ferrofluid samples in rotating magnetic fields // *J. Magn. Magn. Mater.* 2016. V. 431. P. 66.
30. *Altmeyer S.* Agglomeration effects in rotating ferrofluids // *J. Magn. Magn. Mater.* 2019. V. 482. P. 239.
31. *Shliomis M.I., Morozov K.I.* Negative viscosity of ferrofluid under alternating magnetic field // *Phys. Fluids.* 1994. V. 6. P. 2855.
32. *Rosensweig R.* Heating magnetic fluid with alternating magnetic field // *J. Magn. Magn. Mater.* 2002. V. 252. P. 370.
33. *Goharkhah M., Salarian A., Ashjaee M., Shahabadi M.* Convective heat transfer characteristics of magnetite nanofluid under the influence of constant and alternating magnetic field // *Powder Technology.* 2015. V. 274. P. 258.
34. *Smorodin B.L., Lücke M.* Convection in binary fluid mixtures with modulated heating // *Phys. Rev. E.* 2009. V. 79. P. 026315.
35. *Смородин Б.Л.* Возникновение конвекции слабопроводящей жидкости в модулированном тепловом поле // *Ж. эксп. теор. физ.* 2001. Т. 120. № 6. С. 1421–1429.
36. *Rosenblat S., Tanaka G.A.* Modulation of thermal convection instability // *Phys. Fluids.* 1971. V. 14. P. 1319.
37. *Shliomis M.I., Smorodin B.L., Kamiyama S.* The onset of thermomagnetic convection in stratified ferrofluids // *Phil. Mag.* 2003. V. 83. № 17–18. P. 2139–2153.
38. *Ruuge E.K., Rusetski A.N.* Magnetic fluids as drug carriers: Targeted transport of drugs by a magnetic field // *J. Magn. Magn. Mat.* 1993. V. 122. P. 335.
39. *Chan D.C.F., Kirpotin D.B., Bunn P.A.* Synthesis and evaluation of colloidal magnetic iron oxides for the site-specific radiofrequency-induced hyperthermia of cancer // *J. Magn. Magn. Mat.* 1993. V. 122. P. 374.
40. *Andereck C.D., Liu S.S., Swinney H.L.* Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 164. P. 155.
41. *Tagg R.* The Couette–Taylor problem // *Nonlinear Sci. Today.* 1994. V. 4. P. 1.
42. *Altmeyer S., Do Y., Marquez F., Lopez J.M.* Symmetry-breaking Hopf bifurcations to 1-, 2-, and 3-tori in small-aspect-ratio counterrotating Taylor–Couette flow // *Phys. Rev. E.* 2012. V. 86. P. 046316.
43. *Altmeyer S., Hoffmann C.* On secondary instabilities generating footbridges between spiral vortex flow // *Fluid Dyn. Res.* 2014. V. 46. P. 025503.
44. *Golubitsky M., Stewart I., Schaeffer D.* Singularities and groups in bifurcation theory II. New York: Springer, 1988.
45. *Hoffmann C., Altmeyer S., Pinter A., Lücke M.* Transitions between Taylor vortices and spirals via wavy Taylor vortices and wavy spirals // *New J. Phys.* 2009. V. 11. P. 053002.
46. *Müller H.W., Liu M.* Structure of ferrofluid dynamics // *Phys. Rev. E.* 2001. V. 64. P. 061405.
47. *Langevin P.* Magnétisme et théorie des électrons // *Annales de Chemie et de Physique.* 1905. V. 5. P. 70.
48. *Embs J., Müller H.W., Wagner C., Knorr K., Lücke M.* Measuring the rotational viscosity of ferrofluids without shear flow // *Phys. Rev. E.* 2000. V. 61. R2196.
49. Свойства магнитной жидкости APG933 следующие:  $\mu_0 M_s = 20$  мТл,  $\eta = 500$  мПа, плотность  $\rho = 1.09$  г/см<sup>3</sup>,  $\Phi_m = 3.3\%$ , восприимчивость  $\Xi = 0.9$ , средний диаметр магнитного ядра частицы 10 нм, толщина полимерного покрытия 2 нм.

50. *Niklas M., Müller-Krumbhaar H., Lücke M.* Taylor-vortex flow of ferrofluids in the presence of general magnetic fields // *J. Magn. Magn. Mater.* 1989. V. 81. P. 29.
51. *Odenbach S., Müller H.W.* Stationary off-equilibrium magnetization in ferrofluids under rotational and elongational flow // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 89. P. 037202.
52. *Altmeyer S., Leschhorn A., Hoffmann C., Lücke M.* Elongational flow effects on the vortex growth out of Couette flow in ferrofluids // *Phys. Rev. E.* 2013. V. 87. P. 053010.
53. *Swift J.W., Wisenfeld K.* Suppression of period doubling in symmetric systems // *Phys. Rev. Lett.* 1984. V. 52. P. 705.
54. *Detay Y., Iooss G.* Calcul des solutions bifurquées pour le problème de Couette–Taylor avec les deux cylindres en rotation // *J. méc. théor. appl.* 1984. P. 193–216.
55. *Беляев А.В., Смородин Б.Л.* Конвекция магнитной жидкости под действием переменного магнитного поля // *Ж. прикл. мех. техн. физ.* 2009. Т. 50. № 4. С. 18–27.