ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 2, с. 27–37

УДК 532.5.032

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ МНОГОМОДАЛЬНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

© 2022 г. Е. К. Вачагина[a],*, А. И. Кадыйров**

[a] ФИЦ Казанский научный центр РАН, Институт энергетики и перспективных технологий, Казань, Россия

*E-mail: vachaginae@mail.ru

**E-mail: aidarik@rambler.ru

Поступила в редакцию 05.10.2021 г.
После доработки 20.10.2021 г.
Принята к публикации 20.11.2021 г.

Представлено параметрическое решение задачи о течении многомодальных вязкоупругих жидкостей с реологическими уравнениями состояния Гиезекуса и Фан-Тьен–Таннера в круглой трубе для ламинарных изотермических стационарных режимов течений с умеренными и высокими значениями чисел Вайсенберга. Представлены полученные на основании расчетов профили осевой составляющей скорости и нормальных напряжений, а также профили коэффициентов разностей нормальных напряжений при течении полиэтилена низкой плотности (DSM Stamylan LD 2008 XC43) и 0.25% водного раствора полиакриламида. Получено удовлетворительное согласование между экспериментальными и расчетными данными для обеих реологических моделей. Рассмотрен частный случай течения вязкоупругой жидкости Гиезекуса с величиной реологического параметра модели в интервале (0.5, 1).

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, Гиезекус, Фан-Тьен–Таннер, метод решения, профиль скорость, нормальные напряжения

DOI: 10.31857/S0568528122020116

Для адекватного описания реологического поведения растворов и расплавов полимеров, которые при их переработке проявляют сложные вязкоупругие и нелинейно-вязкие свойства, в последнее время все чаще используются нелинейные дифференциальные уравнения релаксационного типа [1]. Аналитическое решение задач о течении вязкоупругих жидкостей в каналах и аппаратах промышленного оборудования вследствие этих сложностей является достаточно трудной задачей даже в случае течения в круглых трубах и плоскощелевых каналах. Получение же таких аналитических решений позволяет проанализировать характер поведения вязкоупругих сред при произвольных режимных параметрах и прогнозировать это поведение в более сложных случаях. Многие авторы используют различные подходы к получению аналитических решений, которые сводятся к каким-либо допущениям и упрощениям. Большинство из них рассматривают одномодальные реологические модели. Например, в работе [2] численно исследовалось течение между двумя эксцентрически расположенными круглыми трубами одномодальной жидкости Максвелла. В [3] были получены аналитические решения для винтовых течений упрощенной жидкости Фан-Тьен–Таннера (далее – ФТТ). В [4] представлено аналитическое решение задачи о течении жидкости FENE-P (a finitely extensible nonlinear elastic model with Peterlin approximation// модифицированная нелинейная вязкоупругая модель с использованием приближения Петерлина) [5] в круглых трубах и плоскощелевых каналах. Для одномодальных жидкостей с упрощенной моделью ФТТ и для одномодальной жидкости FENE-P аналогичные результаты получены в [6]. Для модели Гиезекуса получено решение в тех же простейших случаях в [7].

Однако все эти работы рассматривают одномодальные жидкости, которые недостаточно хорошо описывают полученные экспериментальные данные для большинства практически важных жидкостей. Для более тщательного соответствия этим данным необходимо применять модели многомодальных вязкоупругих сред. В [8] предложено полуаналитическое решение задачи о течении многомодальной жидкости ФТТ и FENE-P в круглой трубе и плоскощелевом канале. Однако, как и в ранних работах, решение было получено для упрощенной модели ФТТ с нулевым значением одного из реологических параметров. На практике этот случай соответствует нулевому значению одной из нормальных составляющей тензора упругих напряжений (перпендикулярной направлению течения).

Численное моделирование течений вязкоупругой жидкости при высоких числах Вайсенберга сталкивается с рядом трудностей [9, 10]. Большинство численных расчетов теряют сходимость и устойчивость, когда значение времени релаксации или числа Вайсенберга (далее – Wi) увеличивается выше определенного критического значения [11]. Таким образом, до сих пор не ясно, объясняется ли отсутствие точности моделирования только недостатками применяемых численных методов или недостатками используемых реологических моделей [12]. Хотя реологическое поведение вязкоупругой жидкости приводит к дополнительным проблемам в расчетах, в настоящее время численные методы совершенствуются и часто используются для прогнозирования течения неньютоновских жидкостей [13]. Полиакриламид – это полимер, широко используемый в промышленности. Известно, что водные растворы полиакриламида широко используются для увеличения добычи нефти [14–16].

Настоящая работа является продолжением ранее опубликованных работ [17, 18] и распространением ранее предложенного параметрического метода решения задачи о течении одномодальной жидкости ФТТ в круглой трубе на случай, когда используется четырехмодальная реологическая модель. Как было отмечено ранее, изложенные в [4, 6, 7] аналитические методы решения задач о течении вязкоупругих жидкостей предполагают использование упрощенных реологических моделей, которые приводят к соотношениям, связывающим ненулевые компоненты тензора упругих деформаций и градиента скорости сдвига. Используя решение уравнения переноса количества движения в проекции на направление движения вязкоупругой среды для таких упрощенных моделей, в [4, 6, 7] далее получено уравнение, связывающее конкретную выбранную неизвестную функцию и поперечную координату. При этом остальные неизвестные функции выражают через выбранную с помощью полученных соотношений. Предлагаемый нами метод решения лишен недостатка в использовании упрощенных реологических моделей и может быть адаптирован на произвольное количество мод реологической модели, что продемонстрировано в настоящей работе на примере решения задач о течении четырехмодальных моделей ФТТ и Гиезекуса в круглой трубе. Таким образом, в отличие от [4, 6, 7] в настоящей работе предлагается параметрический метод решения, который позволяет решать более сложные случаи, т.е. когда невозможно получить уравнение, связывающее одновременно неизвестную искомую функцию и координату.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается ламинарное стационарное изотермическое течение вязкоупругой несжимаемой жидкости в круглых трубах при больших значениях чисел Вайсенберга Wi. Будем считать, что вектор скорости имеет единственную осевую компоненту скорости V_z, которая является функцией единственной переменной r цилиндрической системы координат r, φ, z с осью z, направленной вдоль оси трубы. При сделанных предположениях система уравнений переноса количества движения и неразрывности в выбранной системе координат может быть записана в виде

$$-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{d\left(r\sigma_{rz}\right)}{dr}=0,\quad -\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{d\left(r\sigma_{rr}\right)}{dr}-\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r}=0,\quad -\frac{\partial P}{\partial \varphi}=0,\quad \frac{dV_z}{dz}=0 \tag{1.1}$$

где P – давление; $\sigma_{rr},\sigma_{\varphi\varphi},\sigma_{rz}$ – физические компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат. Примем, что жидкость прилипает на стенке трубы. Из (1.1) следует, что

$$\sigma_{rz}=-\left|\frac{C_0}{2}\right|r \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=C_0=\mathrm{const}=-\left|C_0\right|$$

Реологическое уравнение состояния для многомодальной вязкоупругой жидкости может быть записано в виде

$$\boldsymbol{\sigma}=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{\sigma}_k+\boldsymbol{\sigma}_s,\quad \boldsymbol{\sigma}_s=2\eta_s\mathbf{D}$$

где n – число мод; $\boldsymbol{\sigma}_s$ – ньютоновская составляющая тензора напряжений; η_s – вязкость ньютоновской составляющей тензора напряжений; $\boldsymbol{\sigma}_k$ – упругая составляющая тензора напряжений для k-й моды; $\mathbf{D}$ – тензор скоростей деформации.

Для определения упругих составляющих каждой моды использовались две реологические модели вязкоупругого поведения:

модель Гиезекуса [19]:

$$\boldsymbol{\sigma}_k + \lambda_k \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}_k + \frac{\alpha_k \lambda_k}{\eta_k} \boldsymbol{\sigma}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}_k = 2\eta_k \mathbf{D}, \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

экспоненциальная форма модели Фан-Тьен–Таннера [20]:

$$\lambda_k \left(\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}_k + \xi_k (\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma}_k + \boldsymbol{\sigma}_k \cdot \mathbf{D}) \right) + g_k \boldsymbol{\sigma}_k = 2\eta_k \mathbf{D}, \quad g_k = \exp\left[\frac{\varepsilon_k \lambda_k}{\eta_k} tr(\boldsymbol{\sigma}_k) \right], \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

где $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$ – верхняя конвективная производная тензора, определяемая с помощью соотношения

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V}^T - \nabla \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V}^T - \nabla \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Из-за нелинейного характера определяющих уравнений получить точные решения задач о течении вязкоупругих сред в виде зависимости осевой компоненты скорости от радиальной координаты практически невозможно даже в случае простейших течений. Поэтому большинство авторов пользуются численными методами, которые дают удовлетворительные данные только для сравнительно небольших чисел Вайсенберга. В настоящей работе предлагается использовать метод решения, базирующийся на поиске неизвестной функциональной зависимости $V_z(r)$ в параметрическом виде. Для этого, в первую очередь, необходимо с учетом всех допущений записать реологические уравнения (1.3) и (1.4) в координатном виде согласно [1].

После некоторых преобразований реологические соотношения (1.3) и (1.4) можно записать в координатном виде:

для модели Гиезекуса:

$$\begin{cases} \sigma_{zz(k)} - 2\lambda_k \dfrac{dV_z}{dr} \sigma_{rz(k)} + \dfrac{\alpha_k \lambda_k}{\eta_k} (\sigma_{zz(k)}^2 + \sigma_{rz(k)}^2) = 0 \\ \sigma_{rz(k)} - \lambda_k \dfrac{dV_z}{dr} \sigma_{rr(k)} + \dfrac{\alpha_k \lambda_k}{\eta_k} (\sigma_{zz(k)} + \sigma_{rr(k)}) \sigma_{rz(k)} = \eta_k \dfrac{dV_z}{dr} \\ \sigma_{rr(k)} + \dfrac{\alpha_k \lambda_k}{\eta_k} (\sigma_{rz(k)}^2 + \sigma_{rr(k)}^2) = 0 \\ \sigma_{r\varphi(k)} = 0, \quad \sigma_{z\varphi(k)} = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi(k)} = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

для экспоненциальной формы модели Фан-Тьен–Таннера:

$$\begin{cases} \lambda_k \xi_k \sigma_{rz(k)} \dfrac{dV_z}{dr} + \exp\left[\dfrac{\varepsilon_k \lambda_k}{\eta_k} (\sigma_{zz(k)} + \sigma_{rr(k)}) \right] \sigma_{rr(k)} = 0 \\ \lambda_k \left(-\sigma_{rr(k)} + \xi_k \dfrac{1}{2} (\sigma_{zz(k)} + \sigma_{rr(k)}) \right) \dfrac{dV_z}{dr} + \exp\left[\dfrac{\varepsilon_k \lambda_k}{\eta_k} (\sigma_{zz(k)} + \sigma_{rr(k)}) \right] \sigma_{rz(k)} = \eta_k \dfrac{dV_z}{dr} \\ -\lambda_k (2 - \xi_k) \sigma_{rz(k)} \dfrac{dV_z}{dr} + \exp\left[\dfrac{\varepsilon_k \lambda_k}{\eta_k} (\sigma_{zz(k)} + \sigma_{rr(k)}) \right] \sigma_{zz(k)} = 0 \\ \sigma_{r\varphi(k)} = 0, \quad \sigma_{z\varphi(k)} = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi(k)} = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

где λ_k – время релаксации k-й моды; η_k – вязкость k-й моды; α_k, ξ_k, ε_k – реологические параметры k-й моды.

После введения параметра ρ_k

для модели Гиезекуса в виде

$$\rho_k = \frac{\lambda_k}{\eta_k} |\sigma_{rr(k)}|$$

и для экспоненциальной формы модели Фан-Тьен–Таннера в виде

$$\rho_k = \frac{\lambda_k \xi_k (2-\xi_k)\sigma_{0(k)}}{2(1-\xi_k)\eta_k}, \quad \sigma_{0(k)} = \sigma_{rr(k)} + \sigma_{zz(k)}$$

получим следующее выражение для ненулевых компонент тензора упругих напряжений:

для модели Гиезекуса

$$\sigma_{rz(k)} = -\frac{\eta_k (\rho_k (1-\alpha_k \rho_k))^{1/2}}{\lambda_k (\alpha_k)^{1/2}}, \quad \sigma_{zz(k)} = \frac{\eta_k \rho_k}{\alpha_k \lambda_k}\left(\frac{2-\alpha_k(\rho_k+1)}{(1-\rho_k)}\right), \quad \sigma_{rr(k)} = -\frac{\eta_k}{\lambda_k}\rho_k \tag{2.3}$$

для экспоненциальной формы модели Фан-Тьен–Таннера

$$\sigma_{rr(k)} = -\frac{\eta_k \rho_k}{\lambda_k (2-\xi_k)}, \quad \sigma_{zz(k)} = \frac{\eta_k \rho_k}{\lambda_k \xi_k}, \quad \sigma_{rz(k)} = -\frac{\eta_k}{\lambda_k}\left(\frac{\rho_k(1-\rho_k)}{\xi_k(2-\xi_k)}\right)^{1/2} \tag{2.4}$$

и следующее выражение для градиента скорости сдвига:

для модели Гиезекуса

$$\frac{dV_z}{dr} = -\frac{1+\rho_k(1-2\alpha_k)}{(1-\rho_k)^2}\frac{(\rho_k - \alpha_k \rho_k^2)^{1/2}}{\lambda_k (\alpha_k)^{1/2}}, \quad \forall k \quad (k = 1,\ldots,n) \tag{2.5}$$

для экспоненциальной формы модели Фан-Тьен–Таннера

$$\frac{dV_z}{dr} = -\frac{\exp[B_k \rho_k]}{\lambda_k (\xi_k (2-\xi_k))^{1/2}}\left(\frac{\rho_k}{(1-\rho_k)}\right)^{1/2}, \quad B_k = \frac{2\varepsilon_k (1-\xi_k)}{\xi_k(2-\xi_k)} \tag{2.6}$$

Вводя параметр ρ_k в выражение (2.1), получим

для модели Гиезекуса

$$\sigma_{rz} = \eta_s \frac{dV_z}{dr} + \sum_{k=1}^{n}\sigma_{rz(k)} = -\left|\frac{C_0}{2}\right| r = -\frac{\eta_s (1-2\alpha_k\rho_k + \rho_k)(\rho_k(1-\alpha_k\rho_k))^{1/2}}{(\alpha_k)^{1/2}\lambda_k (1-\rho_k)^2} -$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{\eta_j(\rho_j(1-\alpha_j\rho_j))^{1/2}}{(\alpha_j)^{1/2}\lambda_j}, \quad \forall k \quad (k=1,\ldots,n)$$

для экспоненциальной формы модели Фан-Тьен–Таннера

$$\sigma_{rz} = \eta_s \frac{dV_z}{dr} + \sum_{k=1}^{n}\sigma_{rz(k)} = -\left|\frac{C_0}{2}\right| r = \sigma_{rz} = \eta_s \frac{dV_z}{dr} + \sum_{k=1}^{n}\sigma_{rz(k)} = -\left|\frac{C_0}{2}\right| r =$$
$$= -\eta_s \frac{\exp[B_k\rho_k]}{\lambda_k(\xi_k(2-\xi_k))^{1/2}}\left(\frac{\rho_k}{(1-\rho_k)}\right)^{1/2} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\eta_j(\rho_j(1-\rho_j))^{1/2}}{\lambda_j(\xi_j(2-\xi_j))^{1/2}}$$

Выражая из последнего соотношения безразмерную координату $x = r/R$, получим:

для модели Гиезекуса

$$x = \frac{2R}{|C_0|}\left(\frac{\eta_s(1-2\alpha_k\rho_k+\rho_k)(\rho_k(1-\alpha_k\rho_k))^{1/2}}{(\alpha_k)^{1/2}\lambda_k(1-\rho_k)^2} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\eta_j(\rho_j(1-\alpha_j\rho_j))^{1/2}}{(\alpha_k)^{1/2}\lambda_j}\right) \tag{2.7}$$

для экспоненциальной формы модели Фан-Тьен–Таннера

$$x = \frac{2R}{|C_0|}\left(\frac{\eta_s \exp[B_k\rho_k]}{\lambda_k(\xi_k(2-\xi_k))^{1/2}}\left(\frac{\rho_k}{(1-\rho_k)}\right)^{1/2} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\eta_j(\rho_j(1-\rho_j))^{1/2}}{\lambda_j(\xi_j(2-\xi_j))^{1/2}}\right) \tag{2.8}$$

Параметр ρ_k вводился для каждой из мод, но для получения параметрических зависимостей $dV_z(r)/dr$, $V_z(r)$, и $\sigma_{ij}(r)$ необходимо выбрать один из таких параметров, например, параметр ρ_1, соответствующий первой моде. Остальные параметры ρ_k $(k \neq 1)$ необходимо выразить через основной ρ_1, используя соотношения (2.5) и (2.6) для модели Гиезекуса

$$\dot{\gamma} = \left|\frac{dV_z}{dr}\right| = \frac{(1 - 2\alpha_1\rho_1 + \rho_1)(\rho_1(1 - \alpha_1\rho_1))^{1/2}}{(\alpha_1)^{1/2}\lambda_1(1 - \rho_1)^2} = \frac{(1 - 2\alpha_k\rho_k + \rho_k)(\rho_k(1 - \alpha_k\rho_k))^{1/2}}{(\alpha_k)^{1/2}\lambda_k(1 - \rho_k)^2}, \quad k = 1,\ldots,n \tag{2.9}$$

для экспоненциальной формы модели Фан-Тьен–Таннера

$$\dot{\gamma} = \left|\frac{dV_z}{dr}\right| = \frac{\exp[B_1\rho_1]}{\lambda_1(\xi_1(2 - \xi_1))^{1/2}}\left(\frac{\rho_1}{(1 - \rho_1)}\right)^{1/2} = \frac{\exp[B_k\rho_k]}{\lambda_k(\xi_k(2 - \xi_k))^{1/2}}\left(\frac{\rho_k}{(1 - \rho_k)}\right)^{1/2}, \quad k = 1,\ldots,n \tag{2.10}$$

Параметрическая зависимость безразмерного градиента скорости сдвига зависимости (2.9) и (2.10) имеет вид:

для модели Гиезекуса

$$\begin{cases} \dfrac{dv_z}{dx}(\rho_1) = -\dfrac{1 + \rho_1(1 - 2\alpha_1)}{(1 - \rho_1)^2}\dfrac{(\rho_1 - \alpha_1\rho_1^2)^{1/2}}{\beta_1 Wi(\alpha_1)^{1/2}} \\ x(\rho_1) = \dfrac{1}{Kr}\left(\dfrac{\chi_s(1 - 2\alpha_1\rho_1 + \rho_1)(\rho_1(1 - \alpha_1\rho_1))^{1/2}}{(\alpha_1)^{1/2}\beta_1(1 - \rho_1)^2}\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\chi_j(\rho_j(\rho_1)(1 - \alpha_j\rho_j(\rho_1)))^{1/2}}{(\alpha_j)^{1/2}\beta_j}\right) \end{cases} \tag{2.11}$$

для экспоненциальной формы модели Фан-Тьен–Таннера

$$\begin{cases} \dfrac{dv_z}{dx}(\rho_1) = -\dfrac{1 + \rho_1(1 - 2\alpha_1)}{(1 - \rho_1)^2}\dfrac{(\rho_1 - \alpha_1\rho_1^2)^{1/2}}{\beta_1 Wi(\alpha_1)^{1/2}} \\ x(\rho_1) = \dfrac{1}{Kr}\left(\dfrac{\chi_s\exp[B_1\rho_1]}{\beta_1(\xi_1(2 - \xi_1))^{1/2}}\left(\dfrac{\rho_1}{(1 - \rho_1)}\right)^{1/2} + \sum_{j=1}^{n}\dfrac{\chi_j(\rho_j(\rho_1)(1 - \rho_j(\rho_1)))^{1/2}}{\beta_j(\xi_j(2 - \xi_j))^{1/2}}\right) \end{cases} \tag{2.12}$$

где $\rho_j(\rho_1)$ определяется с любой степенью точности из (2.5), (2.6) с помощью численных методов, например, методом деления отрезка пополам; $\beta_i = \lambda_i/\lambda_a$, $\chi_i = \eta_i/\eta_0$ и $\chi_s = \eta_s/\eta_0$ – безразмерные симплексы; $\lambda_a = \Sigma\lambda_i\eta_i/\eta_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ – среднее время релаксации; $\eta_0 = \eta_s + \Sigma\eta_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ – наибольшее возможное значение вязкости жидкости; $v_z = V_z/V_a$ – безразмерная скорость; $V_a = \dfrac{Q}{\pi R^2}$ – среднерасходная скорость; Q – расход жидкости через поперечное сечение круглой трубы; R – радиус круглой трубы. Число Вайсенберга для круглой трубы определяется как $Wi = (\lambda_a R/V_a)$, а безразмерный комплекс, определяющий течение вязкоупругой жидкости в виде

$$Kr = \frac{|C_0/2|\lambda_a R}{\eta_0} = \frac{\lambda_a V_a}{R}\cdot\frac{\Delta P}{\rho V_a^2}\cdot\frac{\rho V_a(2R)}{\eta_0}\frac{R}{4l} = Wi\cdot Eu\cdot \mathrm{Re}_0\cdot\Gamma$$

$$Eu = \frac{\Delta P}{\rho V_a^2} = \frac{|C_0 l|}{\rho V_a^2}$$

где Eu – число Эйлера; $\mathrm{Re}_0 = (\rho V_a(2R))/\eta_0$ – число Рейнольдса для круглой трубы, определяемое по наибольшему значению вязкости; $R/4l$ – геометрический симплекс; l – длина трубы; $\Delta P = |C_0 l|$ – перепад давления в круглой трубе на длине l.

Параметрическая зависимость компонент тензора упругих деформаций от координаты x может быть представлена в виде системы уравнений:

для модели Гиезекуса согласно (2.3) и (2.7):

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_k}{\eta_k}\sigma_{rz(k)} = -\dfrac{(\rho_k(1 - \alpha_k\rho_k))^{1/2}}{(\alpha_k)^{1/2}}(\rho_1) \\ x(\rho_1) = \dfrac{1}{Kr}\left(\dfrac{\chi_s(1 - 2\alpha_1\rho_1 + \rho_1)(\rho_1(1 - \alpha_1\rho_1))^{1/2}}{(\alpha_1)^{1/2}\beta_1(1 - \rho_1)^2} + \sum_{j=1}^{n}\dfrac{\chi_j(\rho_j(\rho_1)(1 - \alpha_j\rho_j(\rho_1)))^{1/2}}{(\alpha_j)^{1/2}\beta_j}\right) \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_k}{\eta_k}\sigma_{zz(k)} = \dfrac{\rho_k}{\alpha_k}\left(\dfrac{2-\alpha_k(\rho_k+1)}{(1-\rho_k)}\right) \\ x(\rho_1) = \dfrac{1}{Kr}\left(\dfrac{\chi_s(1-2\alpha_1\rho_1+\rho_1)(\rho_1(1-\alpha_1\rho_1))^{1/2}}{(\alpha_1)^{1/2}\beta_1(1-\rho_1)^2} + \sum_{j=1}^{n}\dfrac{\chi_j(\rho_j(\rho_1)(1-\alpha_j\rho_j(\rho_1)))^{1/2}}{(\alpha_j)^{1/2}\beta_j}\right) \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_k}{\eta_k}\sigma_{rr(k)} = -\rho_k \\ x(\rho_1) = \dfrac{1}{Kr}\left(\dfrac{\chi_s(1-2\alpha_1\rho_1+\rho_1)(\rho_1(1-\alpha_1\rho_1))^{1/2}}{(\alpha_1)^{1/2}\beta_1(1-\rho_1)^2} + \sum_{j=1}^{n}\dfrac{\chi_j(\rho_j(\rho_1)(1-\alpha_j\rho_j(\rho_1)))^{1/2}}{(\alpha_j)^{1/2}\beta_j}\right) \end{cases} \quad (2.15)$$

для экспоненциальной формы модели Фан-Тьен—Таннера согласно (2.4) и (2.8):

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_k}{\eta_k}\sigma_{rz(k)}(\rho_1) = -\left(\dfrac{\rho_k(1-\rho_k)}{\xi_k(2-\xi_k)}\right)^{1/2} \\ x(\rho_1) = \dfrac{1}{Kr}\left(\dfrac{\chi_s\exp[B_1\rho_1]}{\beta_1(\xi_1(2-\xi_1))^{1/2}}\left(\dfrac{\rho_1}{(1-\rho_1)}\right)^{1/2} + \sum_{j=1}^{n}\dfrac{\chi_j(\rho_j(\rho_1)(1-\rho_j(\rho_1)))^{1/2}}{\beta_j(\xi_j(2-\xi_j))^{1/2}}\right) \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_k}{\eta_k}\sigma_{zz(k)}(\rho_1) = \dfrac{\rho_k}{\xi_k} \\ x(\rho_1) = \dfrac{1}{Kr}\left(\dfrac{\chi_s\exp[B_1\rho_1]}{\beta_1(\xi_1(2-\xi_1))^{1/2}}\left(\dfrac{\rho_1}{(1-\rho_1)}\right)^{1/2} + \sum_{j=1}^{n}\dfrac{\chi_j(\rho_j(\rho_1)(1-\rho_j(\rho_1)))^{1/2}}{\beta_j(\xi_j(2-\xi_j))^{1/2}}\right) \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_k}{\eta_k}\sigma_{rr(k)}(\rho_1) = -\dfrac{\rho_k}{(2-\xi_k)} \\ x(\rho_1) = \dfrac{1}{Kr}\left(\dfrac{\chi_s\exp[B_1\rho_1]}{\beta_1(\xi_1(2-\xi_1))^{1/2}}\left(\dfrac{\rho_1}{(1-\rho_1)}\right)^{1/2} + \sum_{j=1}^{n}\dfrac{\chi_j(\rho_j(\rho_1)(1-\rho_j(\rho_1)))^{1/2}}{\beta_j(\xi_j(2-\xi_j))^{1/2}}\right) \end{cases} \quad (2.18)$$

Для получения зависимости безразмерной скорости v_z от безразмерной переменной в параметрическом виде необходимо использовать условие $\int_0^1 v_z x dx = 0.5$, которое удобно представить в виде

$$-\int_0^1 x^2 \frac{dv_z}{d\tilde{x}} dx = 1 \quad (2.19)$$

Параметрическую зависимость осевой составляющей безразмерной скорости от безразмерной координаты можно получить из (2.11) и (2.12) путем интегрирования этих соотношений:

для модели Гиезекуса

$$\begin{cases} v_z(\rho_1) = \dfrac{\chi_s}{2KrWi\beta_1{}^2\alpha_1}\dfrac{(1+(1-2\alpha_1)\rho_{1w})^2\rho_{1w}(1-\alpha_1\rho_{1w})}{(1-\rho_{1w})^4} - \\ -\dfrac{\chi_s}{2KrWi\beta_1^2\alpha_1}\dfrac{(1+(1-2\alpha_1)\rho_1)^2\rho_1(1-\alpha_1\rho_1)}{(1-\rho_1)^4} + \\ +\dfrac{1}{2KrWi}\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\chi_j}{\beta_j^2\alpha_j}\displaystyle\int_{\rho_j}^{\rho_{jw}}\dfrac{(1+(1-2\alpha_j)\rho_j)(1-2\alpha_j\rho_j)}{(1-\rho_j)^2}d\rho_j \\ x(\rho_1) = \dfrac{1}{Kr}\left(\dfrac{\chi_s(1-2\alpha_1\rho_1+\rho_1)(\rho_1(1-\alpha_1\rho_1))^{1/2}}{(\alpha_1)^{1/2}\beta_1(1-\rho_1)^2} + \sum_{j=1}^{n}\dfrac{\chi_j(\rho_j(\rho_1)(1-\alpha_j\rho_j(\rho_1)))^{1/2}}{(\alpha_j)^{1/2}\beta_j}\right) \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\int_{\rho_j}^{\rho_{jw}} \frac{(1+(1-2\alpha_j)\rho_j)(1-2\alpha_j\rho_j)}{(1-\rho_j)^2}d\rho_j = 2(1-2\alpha_j)\left[\frac{(1-2\alpha_j\rho_{jw})(1-\alpha_j(2-\rho_{jw}))\rho_{jw}}{(1-\rho_{jw})}\right]-$$
$$-2(1-2\alpha_j)\frac{(1-2\alpha_j\rho_j(\rho_1))(1-\alpha_j(2-\rho_j(\rho_1)))\rho_j(\rho_1)}{(1-\rho_j(\rho_1))}+(1-8(1-\alpha_j)\alpha_j)\ln\frac{1-\rho_{jw}}{1-\rho_j(\rho_1)}$$

для экспоненциальной формы модели Фан-Тьен—Таннера

$$\begin{cases} v_z(\rho_1) = \dfrac{\chi_s}{2KrWi\beta_1^2\xi_1(2-\xi_1)}\left[\exp[2B_1\rho_{1w}]\dfrac{\rho_{1w}}{(1-\rho_{1w})} - \exp(2B_1\rho_1)\dfrac{\rho_1}{(1-\rho_1)}\right]+ \\ +\dfrac{1}{2KrWi}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\chi_j}{\beta_j^2\xi_j(2-\xi_j)}\int_{\rho_j}^{\rho_{jw}}\exp[B_1\rho_1]\exp(B_1\rho_1)\dfrac{(1-2\rho_j)}{(1-\rho_j)}d\rho_j \\ x(\rho_1) = \dfrac{1}{Kr}\left(\dfrac{\chi_s\exp[B_1\rho_1]}{\beta_1(\xi_1(2-\xi_1))^{1/2}}\left(\dfrac{\rho_1}{(1-\rho_1)}\right)^{1/2} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\chi_j(\rho_j(\rho_1)(1-\rho_j(\rho_1)))^{1/2}}{\beta_j(\xi_j(2-\xi_j))^{1/2}}\right) \end{cases} \tag{2.21}$$

$$\int_{\rho_j}^{\rho_{jw}}\exp[B_j\rho_j]\frac{(1-2\rho_j)}{(1-\rho_j)}d\rho_j = \frac{2(\exp[2B_j\rho_{1j}]-\exp[2B_j\rho_j(\rho_1)])}{k_j}+$$
$$+\exp[B_j](\mathrm{Ei}[-B_j(1-\rho_{jw})]-\mathrm{Ei}[-B_j(1-\rho_j(\rho_1))])$$

Здесь $\mathrm{Ei}[x] = -\int_{-x}^{\infty} e^{-t}/t\,dt = \int_{-\infty}^{x} e^{t}/t\,dt$ — интегральная показательная функция. В (2.20) и (2.21); ρ_{kw} — значение параметра на стенке трубы.

Непосредственное использование аналитических выражений (2.20) и (2.21) затруднено тем фактом, что между безразмерными комплексами *Wi* и *Kr* существует функциональная зависимость, которую можно определить с помощью формулы (2.19). Однако интеграл в (2.19) определяется только численно, поэтому для его определения используются методы численного интегрирования. Для получения конкретных решений поставленных задач был разработан алгоритм расчета, изложенный ниже. Отметим, что для заданных значений, определяющих течение вязкоупругих жидкостей чисел Вайсенберга, расчет носит итерационный характер.

3. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА

Для получения конкретных решений выполняем следующие действия:

1. Задаемся значением параметра на стенке ρ_{1w}.

2. Находим ρ_{kw}, $k = 1,2,\ldots,n$ из условий (2.9) или (2.10).

3. Находим значение *Kr* из второго соотношения (2.11) или (2.12), полагая в нем $x = 1$:

$$Kr = -\left(\frac{\chi_s}{\beta_1}\frac{dv_z}{d\tilde{r}}(\rho_{1w}) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\chi_k}{\beta_k}\tau_k^{rz}(\rho_{kw})\right)$$

4. Находим *Wi* согласно (2.19) с использованием формулы трапеций

$$Wi = -\int_0^1 x^2\frac{dv_z}{dx}dx = h\left(\frac{f_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}f_i\right) = h\left(\frac{1}{2}\frac{dv_z}{dx}(\rho_{kw}) + \sum_{i=1}^{n-1}x_i^2\frac{dv_z}{dx}((\rho_1)_i)\right)$$

где $(\rho_1)_i$ определяется из условия

$$x_i = ih = -\left(\chi_s\frac{dv_z}{dx}((\rho_1)_i) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\chi_k}{\beta_k}\tau_k^{rz}((\rho_1)_i)\right)\times Kr^{-1}, \quad i = 1,\ldots,n$$

где $h = 1/N$; N — число отрезков, на которые делится сегмент $0 \le \tilde{r} \le 1$.

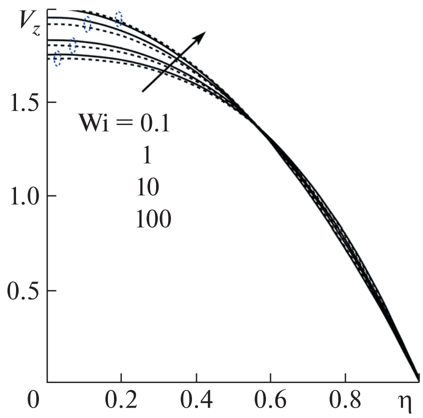

Рис. 1. Профили безразмерной скорости в круглой трубе: сплошная линия – [8]; пунктирная линия – параметрический метод решения.

5. В зависимости от используемой реологической модели определяем профиль скорости по формулам (2.20) или (2.21). Альтернативный вариант нахождения профиля скорости может быть представлен в виде с использованием формулы трапеций

$$v_z(x_i) = \frac{1}{Wi}\int_{x_i}^{1}\frac{dv_z}{dx}dx = h\left(\frac{f_0+f_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}f_i\right) = \frac{h}{Wi}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dv_z}{dx}(\rho_{1i})+\frac{dv_z}{dx}(\rho_{1w})\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{dv_z}{dx}(\rho_{1i})\right)$$

6. Определяем распределение компонент тензора упругих деформаций для каждой из мод, а так же суммарные компоненты в виде параметрических зависимостей (2.13)–(2.15) (модель Гиезекуса) и (2.16)–(2.18) (модель ФТТ).

4. ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДА

Для проверки адекватности применяемого метода было проведено сравнение результатов расчета течения 4-модальной вязкоупругой жидкости, реологическое поведение которой было описано с помощью экспоненциальной формы модели Фан-Тьен–Таннера [8], при ее течении в круглой трубе. Результаты сравнения этих решений представлены на рис. 1. Таким образом, предлагаемый метод позволяет адекватно рассчитывать гидродинамические характеристики течения вязкоупругих жидкостей как для малых, так и для больших значений чисел Вайсенберга, в отличие от прикладных пакетов, например, Polyflow.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные расчеты были проведены для двух конкретных вязкоупругих жидкостей – расплава DSM Stamylan LD 2008 XC43 LDPE с реологическими характеристиками, представленными в [21] и для 0.25% водного раствора полиакриламида, реологические параметры которого определялись на основании кривой вязкости, построенной с помощью реометра Anton Paar MCR 102 при температуре 273 K и представлены в табл. 1.

На рис. 2 представлены профили скорости и нормальных напряжений для рассматриваемых жидкостей. Из рисунка видно, что при малых значениях чисел Вайсенберга реологическое поведение вязкоупругой жидкости близко к поведению ньютоновской жидкости $(Wi = 0.01)$ (профиль скорости приближается к параболическому). По мере возрастания числа Вайсенберга $(Wi \geq 1)$ профиль скорости деформируется, становится более пологим или наполненным, т.е. значение скорости в центре трубы уменьшается, а значения скорости ближе к стенкам увеличиваются. Как показали расчеты, наибольшая деформация профиля скорости наблюдается при числах Вайсенберга в интервале от 100 до 150 для обеих рассматриваемых жидкостей.

Следует отметить, что в отличие от работы [22], в которой говорится, что по мере увеличения числа Вайсенберга различия между распределением профилями скорости, полученными с использованием одномодальной модели Гиезекуса и упрощенной модели Фан-Тьен–Таннера возрастают, результаты расчетов сделанных в настоящей работе при больших числах Вайсенберга

Таблица 1. Реологические параметры 0.25% водного раствора полиакриламида

				Гиезекус		ФТТ	
k	λ_k [с$^{-1}$]	η_k [Па · с]	η_s [П · с]	α_k	$\tilde{\alpha}_k$	ξ_k	ε_k
1	0.1184	0.137	0.039	0.5	0.99	0.26	0.44
2	0.9489	0.9004	–	0.5	0.9	0.06	0.44
3	7.6671	6.0406	–	0.5	0.99	0.16	0.44
4	72.3015	32.2598	–	0.5	0.55	0.22	0.44

не приводят к такому различию. Из рис. 2 видно, что разница между расчетными значениями скорости и напряжений для обеих моделей вызвана свойствами выбранных моделей, а не численными ошибками. Если распределения профилей скоростей не отличаются принципиально в широком диапазоне чисел Вайсенберга, то разница между распределениями нормальных напряжений, рассчитанных с помощью модели Гиезекуса и экспоненциальной формы модели Фан-Тьен–Таннера, увеличивается с ростом среднего времени релаксации.

Использование параметрического представления искомых функций позволяет рассчитывать зависимость коэффициентов первой разности нормальных напряжений в зависимости от скорости сдвига, которая является одной из основных характеристик реологического поведения сред в вискозиметрических течениях. На рис. 3 представлены результаты таких расчетов и их сравнение с экспериментальными данными [21].

Как было замечено в работах [23, 24], реальному поведению вязкоупругих сред соответствует значение реологического параметра $0 < \alpha_k < 0.5$, в противном случае на числа Вайсенберга накладываются ограничения. Например, в [25] для одномодальной жидкости, описанной моделью Гиезекуса, получено, что для $0.5 < \alpha_k < 1$ число Вайсенберга не должно превышать значения 0.7,

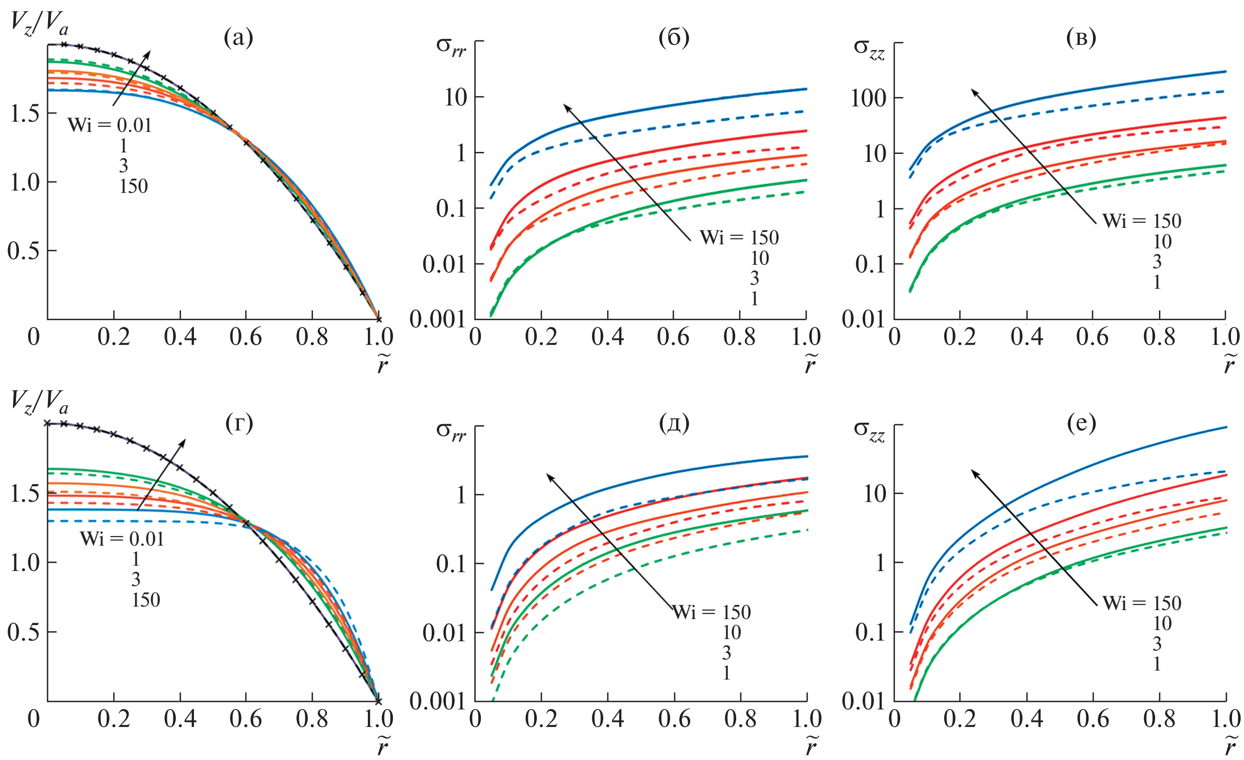

Рис. 2. Профили безразмерной скорости, нормальных напряжений при течении сплошной среды DSM Stamylan LD 2008 XC43 (а, б, в) и 0.25% водного раствора полиакриламида (г, д, е): сплошная линия – модель Гиезекуса; пунктирная линия – модель ФТТ; крестики – ньютоновская жидкость.

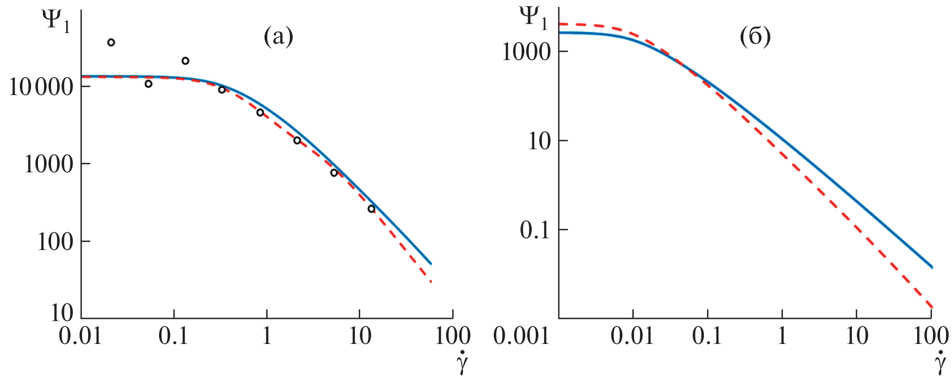

Рис. 3. Коэффициенты первой разности нормальных напряжений для DSM Stamylan LD 2008 XC43 (а) и для 0.25% водного раствора полиакариламида (б): сплошная линия – модель Гиезекуса; пунктирная линия – модель ФТТ; окружности – экспериментальные данные [21].

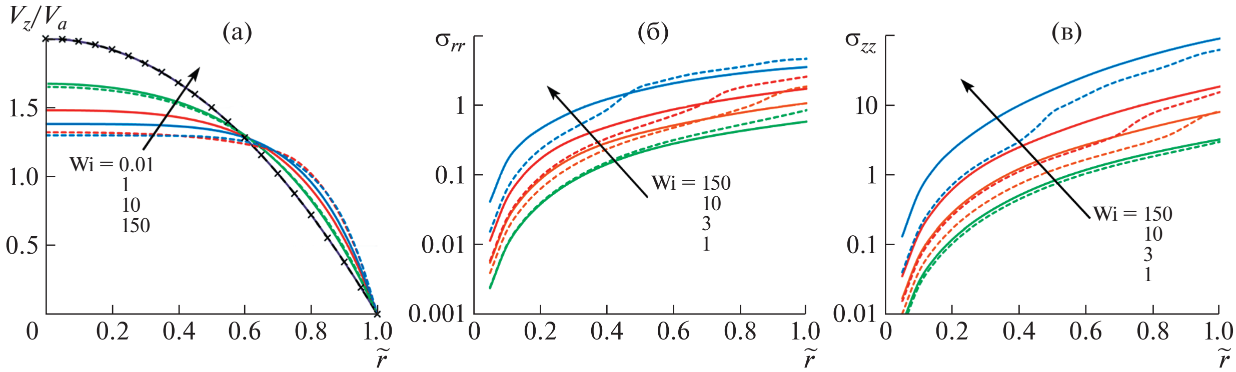

Рис. 4. Профили безразмерной скорости (а) и нормальных напряжений (б, в) для различных значений чисел Вайсенберга: сплошная линия – модель Гиезекуса ($0 < \alpha_k \leq 0.5$); пунктирная линия – модель Гиезекуса ($0.5 < \tilde{\alpha}_k \leq 1$); крестики – ньютоновская жидкость.

в то время как предельное значение этого числа в экспериментальных исследованиях для 0.25% водного раствора полиакриламида было равно 1. Как видно из рис. 4, начиная приблизительно с $Wi = 3$, профили нормальных напряжений, а также распределения коэффициентов первой разности нормальных напряжений в поперечном сечении трубы характеризуются наличием точек перегиба при использовании модели Гиезекуса с нелинейным параметром, лежащим в интервале $0.5 < \alpha < 1$. В этом случае по мере увеличения числа Вайсенберга обнаруженная точка перегиба смещается к центру трубы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предлагается параметрический метод решения задачи о течении вязкоупругой жидкости в круглой трубе для умеренных и больших чисел Вайсенберга. В качестве дифференциальных реологических уравнений использованы многомодальные реологические уравнения состояния Гиезекуса и экспоненциальная форма модели Фан-Тьен–Таннера. Показано, что первая модель предсказывает более высокие значения нормальных напряжений по сравнению с аналогичными результатами, полученными с помощью модели Фан-Тьен–Таннера. Обнаружено, что наибольшая деформация профиля осевой скорости достигается при числах Вайсенберга в диапазоне от 100 до 150. Вне доверительного диапазона чисел Вайсенберга применительно для модели Гиезекуса существуют точки перегиба в распределении нормальных напряжений, характеризующих течение вязкоупругой жидкости в круглой трубе. Эти точки перегиба смещаются к центру трубы с увеличением числа Вайсенберга. Разработанный метод можно легко адаптировать для решения задачи о течении вязкоупругой жидкости в плоских каналах и в зазоре между двумя цилиндрами, для произвольного числа мод в уравнении состояния вязкоупругой среды.

БЛАГОДАРНОСТИ

Параметрический метод решения задачи разработан при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160007. Аналитический обзор, а также анализ профилей скорости и напряжений, характеризующих течение вязкоупругой жидкости Гиезекуса с нелинейным параметром $0.5 < \alpha < 1$, выполнен при финансовой поддержке РНФ (грант № 19-11-00220).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Astarita G., Marrucci G.* Principles of non-Newtonian fluid mechanics (London, New York: McGraw-Hill) 1974, 289 p.
2. *Beris A.N., Armstrong R.A., Brown R.A.* Perturbation theory for viscoelastic fluids between eccentric rotating cylinders // J. Non-Newt. Fluid Mech. 1983. № 13. P. 109–143.
3. *Cruz D.O.A., Pinho F.T.* Skewed Poiseuille-Couette flows of sPTT fluids in concentric annuli and channels // J. Non-Newt. Fluid Mech. 2004. № 121. P. 1–14.
4. *Oliveira P.J.* An exact solution for tube and slit flow of a FENE-P fluid // Acta Mecanica. 2002. № 158. P. 157–167.
5. *Bird R.B., Dotson P.J., Johnson N.L.* Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead-spring chain model // J. Non-Newt. Fluid Mech. 1980. V. 7. № 2–3. № 213–235.
6. *Cruz D.O.A., Pinho F.T., Oliveira P.J.* Analytical solutions for fully developed laminar flow of some viscoelastic liquids with a Newtonian solvent contribution // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2005. № 132. P. 28–35.
7. *Schleiniger G., Weinacht R.J.* Steady Poiseuille flows for a Giesekus fluid // J. Non-Newt. Fluid Mech. 1991. № 40. P. 79–102.
8. *Cruz D.O.A., Pinho F.T.* Fully-developed pipe and planar flows of multimode viscoelastic fluids // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2007. V. 141. № 2–3. P. 85–98.
9. *Hao J., Pan T-W.* Simulation for high Weissenberg number Viscoelastic flow by a finite element method // Applied Mathematics Letters. 2007. № 20. P. 988–993.
10. *Mu Y., Chen A., Zhao G., Cui Y.* Finite element simulation of three-dimensional viscoelastic flow at high Weissenberg number based on the log-conformation formulation // Mech. Time-Depend. Mater. 2019. V. 23. № 1. P. 477–495.
11. *López-Herrera J.M., Popinet S., Castrejón-Pita A.A.* An adaptive solver for viscoelastic incompressible two-phase problems applied to the study of the splashing of weakly viscoelastic droplets // J. Non-Newton. Fluid Mech. 2019. № 264. P. 144–158.
12. *Knechtges P., Behr M., Elgeti S.* Fully-implicit log-conformation formulation of constitutive laws // J. Non-Newton. Fluid Mech. 2014. № 214. P. 78–87.
13. *Al-Muslimawi A.H.* Theoretical and numerical studies of die swell flow // Korea-Aust. Rheol. J. 2016. № 28. P. 229–236.
14. *Shabaka I.M., Abdel Wahab M., Hamza S.E.E., El-Bakry M.Y., Hashem S.* On rheological behavior of aqueous polyacrylamide solution. I – Empirical relation of the viscosity as a function of concentration and shear rate // Int. J. Adv. Res. 2016. V. 4. № 7. P. 1499–1507.
15. *Zhao T., Peng J., Zhang Y., Chen J., Chen Y., Sun W., Li S.* Synthesis of ultra-high concentration of salt-resistant polyacrylamide // Polym. Adv. Technol. 2020. V. 31. № 12. P. 2980–2989.
16. *Godwin Uranta K., Rezaei-Gomari S., Russell P., Hamad F.* Studying the Effectiveness of Polyacrylamide (PAM) Application in Hydrocarbon Reservoirs at Different Operational Conditions // Energies. 2018. V. 11. №. 9. P. 2201.
17. *Ананьев Д.В., Вачагина Е.К., Кадыйров А.И., Кайнова А.А., Осипов Г.Т.* Об определении условий существования решений со слабым разрывом для простейших течений вязкоупругих жидкостей // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 5. С. 27–34.
18. *Кадыйров А.И., Вачагина Е.К., Хуснутдинова Э.М.* Параметрический метод решения задачи о неизотермическом течении многомодальной жидкости Гиезекуса в круглой трубе // Труды Академэнерго. 2018. № 4. С. 7–16.
19. *Giesekus H.* A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1982. № 11. № 1–2. P. 69–109.
20. *Phan-Thien N., Tanner R.I.* A new constitutive equation derived from network theory // J. Non-Newt. Fluid Mech. 1977. V. 2. № 4. P. 353–365.
21. *Verbeeten W.M.H., Peters G.W.M., Baaijens F.P.T.* Viscoelastic analysis of complex polymer melt flows using the eXtended Pom–Pom model // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2002. V. 108. № 1–3. P. 301–326.
22. *Graebling D.* Realistic constitutive laws for polymer flows. V European Conference on Computational Fluid Dynamics. ECCOMAS CFD 2010. P. 1–13.
23. *Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O.* Dynamics of Polymeric Liquids. Fluid Dynamics / 2nd ed. New York: Wiley, 1987, 672 p.
24. *Yoo J.Y., Choi H.Ch.* On the steady simple shear flows of the one-mode Giesekus fluid // Rheol Acta. 1989. № 28. P. 13–24.
25. *Mostafaiyan M., Khodabandehlou K., Sharif F.* Analysis of a viscoelastic fluid in an annulus using Giesekus model // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2004. V. 118. № 1. P. 49–55.