

УДК 532.593.4

## ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ИМПУЛЬСА ИНЕРЦИОННО-ГРАВИТАЦИОННЫМИ ВНУТРЕННИМИ ВОЛНАМИ НА ТЕЧЕНИИ ПРИ УЧЕТЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ И ДИФФУЗИИ

© 2022 г. А. А. Слепешев

ФИЦ “Морской гидрофизический институт” РАН, Севастополь, Россия

E-mail: [slep55@mail.ru](mailto:slep55@mail.ru)

Поступила в редакцию 06.09.2021 г.

После доработки 27.09.2021 г.

Принята к публикации 09.10.2021 г.

В приближении Буссинеска рассматриваются свободные внутренние волны при учете вращения Земли на двумерном вертикально-неоднородном стратифицированном течении при учете турбулентной вязкости и диффузии. Применяется неявный метод Адамса третьего порядка точности для численного решения краевой задачи для амплитуды вертикальной скорости внутренних волн. Получено, что собственная функция и частота волны – комплексные. Учет турбулентной вязкости и диффузии приводит к тому, что мнимая часть частоты волны отрицательная, т.е. волна затухает. Вертикальные волновые потоки импульса отличны от нуля и могут быть сравнимы или превышать соответствующие турбулентные потоки.

*Ключевые слова:* внутренние волны, мнимая поправка к частоте, волновой поток импульса, турбулентная вязкость и диффузия

DOI: 10.31857/S0568528122020098

Вертикальный перенос в морской среде обычно связывают с процессами обмена, в которых ключевую роль играет мелкомасштабная турбулентность. Механизмы генерации турбулентности самые разнообразные – ветровое перемешивание в приповерхностном слое, гидродинамическая неустойчивость течений и внутренних волн, обрушение внутренних волн, донное трение, продуцирующее генерацию турбулентности в придонном пограничном слое. Захват и фокусировка внутренних волн горизонтальными неоднородностями стратификации и течений также приводят к обрушению внутренних волн и генерации турбулентности [1]. Аналогичный эффект имеет место при захвате внутренних волн наклонным дном [2]. Возможна стохастизация волнового поля в геометрическом аттракторе внутренних волн, обусловленным геометрией дна и границ бассейна [2, 3]. Однако в стратифицированной морской среде мелкомасштабная турбулентность имеет перемежаемый характер и можно для описания обменных процессов использовать эффективный коэффициент турбулентного обмена.

Внутренние волны повсеместно присутствуют в океане, благодаря действию источников, их порождающих. Это воздействие атмосферных возмущений, взаимодействие течений и приливов с неоднородностями рельефа дна, генерация внутренних волн вихрями. Дисперсионные свойства внутренних волн на сдвиговых течениях исследовались в ряде работ при отсутствии турбулентной вязкости и диффузии и учета вращения Земли [4, 5]. В этом случае уравнение для амплитуды вертикальной скорости имеет действительные коэффициенты и в гидродинамически устойчивом течении при соблюдении критерия Майлса [6, 7] частота волны действительная для фиксированного волнового числа для каждой моды внутренних волн. Течение приводит к анизотропии волнового поля, особенно для коротких внутренних волн [5].

Внутренние волны при учете турбулентной вязкости и диффузии затухают [8–10]. Вертикальные волновые потоки импульса при этом отличны от нуля [11]. Указанные потоки определялись, когда уравнение для амплитуды вертикальной скорости решалось асимптотическим методом Люстерника–Вишика [12]. Решение и частота волны раскладывались в ряд по малому параметру, пропорциональному горизонтальной турбулентной вязкости. Получено, что мнимая поправка к частоте отрицательная [11], т.е. волна затухает. В настоящей работе это уравнение решается

прямым численным методом по неявной схеме Адамса третьего порядка точности и находится комплексное значение частоты. В [13] показано, что в двумерном течении с вертикальным сдвигом скорости при учете вращения Земли вертикальный волновой поток импульса отличен от нуля и без учета турбулентной вязкости и диффузии. В этом случае уравнение для амплитуды вертикальной скорости имеет комплексные коэффициенты, собственная функция краевой задачи для внутренних волн – комплексная, и частота волны также комплексная. Сдвиг фаз между колебаниями вертикальной и горизонтальной скорости отличен от  $\pi/2$ , и вертикальный волновой поток импульса отличен от нуля. В настоящей работе исследуется влияние горизонтальной турбулентной вязкости и диффузии на этот эффект. Ввиду того, что коэффициенты горизонтального турбулентного обмена на 3–4 порядка превышают соответствующие коэффициенты вертикального турбулентного обмена, то последними пренебрегается.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются свободные инерционно-гравитационные внутренние волны на двумерном стратифицированном течении с вертикальным сдвигом скорости в безграничном бассейне постоянной глубины. Коэффициенты горизонтальной турбулентной вязкости  $K$  и диффузии  $M$  предполагаются постоянными. Две компоненты скорости течения  $U_0(z)$ ,  $V_0(z)$  зависят от вертикальной координаты. В линейном приближении решается краевая задача для амплитуды вертикальной скорости и находится дисперсионное соотношение. Вертикальные потоки импульса определяются во втором порядке по амплитуде волны. Горизонтальным изменением поля средней плотности и скорости течения на рассматриваемых масштабах пренебрегается.

Уравнения гидродинамики в приближении Буссинеска для волновых возмущений имеют вид

$$\frac{Du}{Dt} - fv + w \frac{dU_0}{dz} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial x} + K \Delta_h u \quad (1.1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu + w \frac{dV_0}{dz} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial y} + K \Delta_h v \quad (1.2)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{g\rho}{\rho_0(0)} + K \Delta_h w \quad (1.3)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -w \frac{d\rho_0}{dz} + M \Delta_h \rho \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.5)$$

где  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – соответственно две горизонтальные и вертикальная компоненты волновой скорости течения;  $\rho$ ,  $P$  – волновые возмущения плотности и давления;  $\rho_0(z)$  – профиль средней плотности;  $x, y, z$  – горизонтальные и вертикальная координаты; ось  $z$  направлена вертикально вверх;

$f$  – параметр Кориолиса;  $U_0(z), V_0(z)$  – две компоненты скорости среднего течения;  $\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  –

двумерный оператор Лапласа.

Действие оператора  $D/Dt$  раскрывается по формуле

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + U_0) \frac{\partial}{\partial x} + (v + V_0) \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}.$$

Граничные условия на поверхности моря ( $z = 0$ ) – условие “твердой крышки”, которое отфильтровывает внутренние волны от поверхностных волн [14] и отсутствие тангенциальных напряжений [9, 15]

$$w(0) = 0, \quad K \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad K \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad z = 0 \quad (1.6)$$

Граничные условия на дне – условие непротекания и отсутствие тангенциальных напряжений (условие “гладкого скольжения” [9])

$$\begin{aligned} w_{10}(-H) &= 0 \\ K \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \quad K \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad z = -H \end{aligned} \quad (1.7)$$

2. ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Решения линейного приближения ищутся в виде

$$u_1 = u_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \quad v_1 = v_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \quad w_1 = w_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.} \quad (2.1)$$

$$P_1 = P_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \quad \rho_1 = \rho_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}$$

где с.с. – комплексно сопряженные слагаемые,  $A$  – амплитудный множитель,  $\theta$  – фаза волны;  $\partial\theta/\partial x = k, \partial\theta/\partial t = -\omega, k$  – горизонтальное волновое число,  $\omega$  – частота волны. Предполагается, что волна распространяется вдоль оси  $x$ .

После подстановки (2.1) в систему (1.1)–(1.5) следует связь амплитудных функций  $u_{10}, v_{10}, \rho_{10}, P_{10}$  с  $w_{10}$

$$u_{10} = \frac{i}{k} \frac{dw_{10}}{dz}, \quad \Omega = \omega - k \cdot U_0 \quad (2.2)$$

$$\frac{P_{10}}{\rho_0(0)} = \frac{i}{k} \left[ \frac{(\Omega + ik^2K)}{k} \frac{dw_{10}}{dz} + \frac{dU_0}{dz} w_{10} + \frac{f}{\Omega + ik^2K} \left( i \frac{dV_0}{dz} w_{10} - \frac{f}{k} \frac{dw_{10}}{dz} \right) \right] \quad (2.3)$$

$$\rho_{10} = -\frac{i}{(\Omega + ik^2M)} w_{10} \frac{d\rho_0}{dz}, \quad v_{10} = \frac{1}{(\Omega + ik^2K)} \left( \frac{f}{k} \frac{dw_{10}}{dz} - iw_{10} \frac{dV_0}{dz} \right)$$

Функция  $w_{10}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2w_{10}}{dz^2} + a(z) \frac{dw_{10}}{dz} + b(z) \cdot w_{10} = 0 \quad (2.4)$$

где

$$a(z) = k \left[ \frac{if}{\Omega + ik^2K} \cdot \frac{dV_0}{dz} - \frac{f^2}{(\Omega + ik^2K)^2} \cdot \frac{dU_0}{dz} \right] \cdot \left[ \Omega + ik^2K - \frac{f^2}{(\Omega + ik^2K)} \right]^{-1}$$

$$b(z) = k \left[ \frac{if \cdot k}{(\Omega + ik^2K)^2} \cdot \frac{dV_0}{dz} \cdot \frac{dU_0}{dz} + \frac{if}{(\Omega + ik^2K)} \cdot \frac{d^2V_0}{dz^2} - k(\Omega + ik^2K) + \frac{N^2k}{(\Omega + ik^2M)} + \frac{d^2U_0}{dz^2} \right] \times$$

$$\times \left[ \Omega + ik^2K - \frac{f^2}{(\Omega + ik^2K)} \right]^{-1}$$

где  $N^2 = -\frac{g}{\rho_0(0)} \frac{d\rho_0}{dz}$  – квадрат частоты Брента–Вяйсяля.

Граничные условия для  $w_{10}$

$$z = 0: w_{10} = 0 \quad (2.5)$$

$$z = -H: w_{10} = 0 \quad (2.6)$$

Граничные условия (1.6), (1.7) выполняются автоматически.

Краевая задача (2.4)–(2.6) решалась численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности без учета турбулентной вязкости и диффузии в работе [13]. Было получено, что собственная функция – решение этой краевой задачи – комплексная, частота волны – тоже комплексная величина. Мнимая часть частоты волны мала и может быть как положительна, так и отрицательна, т.е. в зависимости от частоты волны и номера моды возможно как слабое усиление, так и слабое затухание. Ниже в ходе численных расчетов показано, что при учете турбулентной вязкости и диффузии волна всегда затухает, т.е. мнимая часть частоты волны отрицательна.

3. ВОЛНОВЫЕ ПОТОКИ ИМПУЛЬСА

Вертикальные волновые потоки импульса  $\overline{uw}, \overline{vw}$  находим, учитывая (2.1), (2.2), (2.3)

$$\overline{uw} = \frac{i}{k} |A_1|^2 \left( w_{10}^* \frac{dw_{10}}{dz} - w_{10} \frac{dw_{10}^*}{dz} \right) \quad (3.1)$$

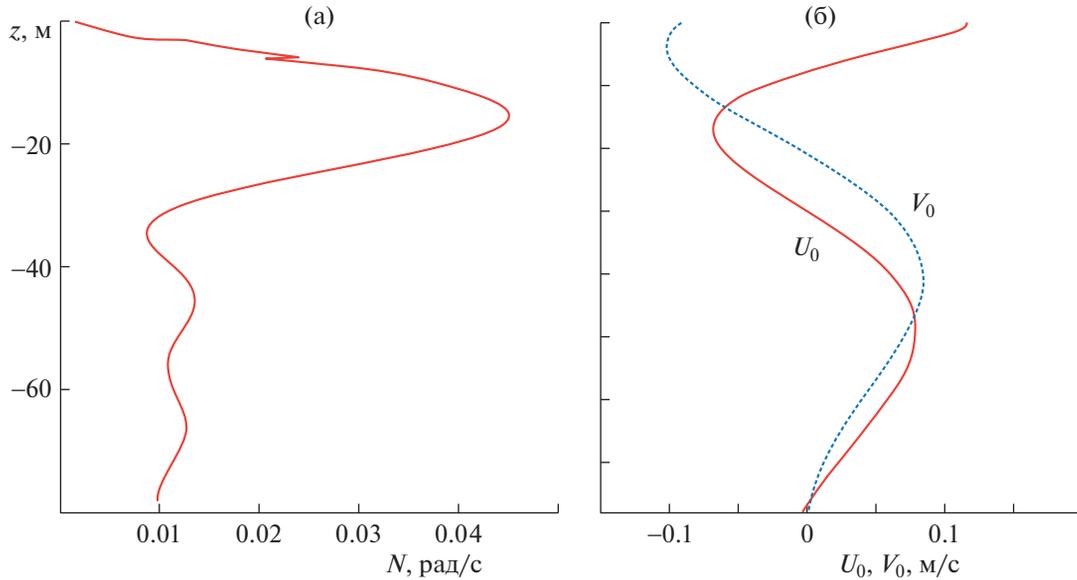


Рис. 1. Вертикальные профили частоты Брента–Вяйсяля (а) и компонент скорости течения (б) (данные [13, 16]).

$$\overline{vw} = \frac{w_{10}^* |A_1|^2}{(\Omega + ik^2 K)} \left( \frac{f}{k} \frac{dw_{10}}{dz} - iw_{10} \frac{dV_0}{dz} \right) + \text{c.c.} \quad (3.2)$$

где  $A_1 = A \exp(\delta\omega \cdot t)$ ,  $\delta\omega = \text{Im}(\omega)$  – мнимая часть частоты. Черта сверху означает осреднение по периоду волны.

Вертикальный волновой поток импульса  $\overline{vw}$  у инерционно-гравитационных внутренних волн отличен от нуля как при отсутствии течения, так и при отсутствии турбулентной вязкости и диффузии. Поток импульса  $\overline{vw}$  не равен 0 при учете турбулентной вязкости и диффузии, если турбулентная вязкость и диффузия не учитываются, то только при наличии среднего течения, у которого поперечная к направлению распространения волны компонента скорости  $V_0$  зависит от вертикальной координаты. При отсутствии вращения Земли при  $f=0$  волновые потоки импульса ненулевые только при учете турбулентной вязкости и диффузии.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Вертикальные волновые потоки импульса рассчитаем для 15-минутных внутренних волн второй моды, наблюдавшихся в натурном эксперименте на северо-западном шельфе Черного моря в третьем этапе 45 рейса НИС “Михаил Ломоносов” [16, 13]. Максимальная амплитуда этих волн составила 0.5 м. Характерное значение коэффициента горизонтального обмена на рассматриваемых масштабах оценено как  $K = 1 \text{ м}^2/\text{с}$  [17]. Вертикальные профили частоты Брента–Вяйсяля и компонент скорости течения показаны на рис. 1.

Краевая задача (2.4)–(2.6) по определению  $w_{10}$  решается численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности при  $M = 0.5 \cdot K$ . Волновое число и мнимая часть частоты при фиксированной действительной части частоты находились методом пристрелки, из необходимости выполнения граничных условий (2.5, 2.6). Длина волны у 15-минутных внутренних волн второй моды равна 195 м. Профиль модуля собственной функции показан на рис. 2. Зависимость действительной части частоты  $\omega_0 = \text{Re}(\omega)$  от волнового числа для первых двух мод представлена на рис. 3 как при учете турбулентной вязкости и диффузии, так и без их учета. Сплошная кривая (1) соответствует первой моде при учете турбулентной вязкости и диффузии, пунктирная кривая (2) – соответствует первой моде при учете турбулентной вязкости и диффузии для первой моды. Штриховая кривая (3) на рис. 3 соответствует зависимости действительной части частоты волны от волнового числа для второй моды при учете турбулентной вязкости и диффузии, штрихпунктирная кривая (4) соответствует случаю неучета турбулентной вязкости и диффузии. Из рис. 3 следует, что

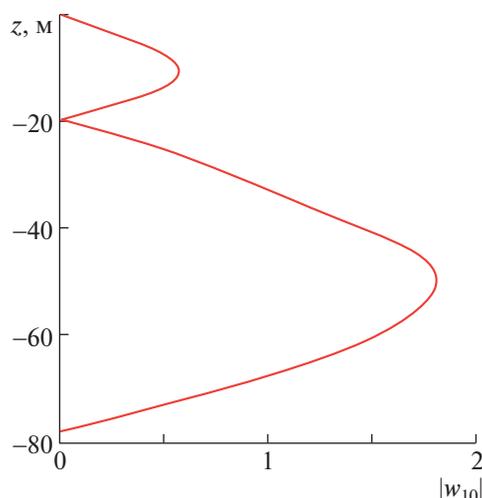


Рис. 2. Модуль собственной функции 15-минутных внутренних волн второй моды.

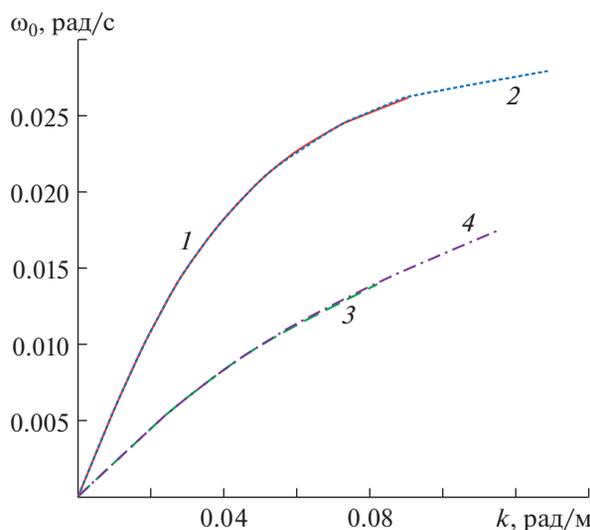


Рис. 3. Зависимость действительной части частоты от волнового числа.

турбулентная вязкость и диффузия очень слабо влияют на зависимость действительной части частоты волны от волнового числа. Незначительные отклонения заметны лишь для больших волновых чисел при  $k > 0.05$  рад/м для первой моды и для  $k > 0.06$  рад/м у второй моды.

Зависимость мнимой части частоты  $\delta\omega = \text{Im}(\omega)$  от действительной части частоты для первых двух мод представлена на рис. 4. Далее действительную часть частоты  $\omega_0$  будем называть просто частотой.

Из рис. 4 следует, что мнимая часть частоты всегда отрицательная и волна затухает, декремент  $\delta\omega$  у второй моды по модулю больше, чем у первой моды. На рис. 5 показаны аналогичные зависимости при отсутствии турбулентной вязкости и диффузии. Мнимая часть частоты у первой моды при  $\omega_0 < 0.022$  рад/с отрицательная, а при  $\omega_0 > 0.022$  рад/с – положительная. У второй моды мнимая часть отрицательная. Таким образом, учет турбулентной вязкости и диффузии приводит к тому, что мнимая часть всегда отрицательная (рис. 4). Характер зависимости мнимой части частоты от частоты волны существенно разный при учете и неучете турбулентной вязкости и диффузии (рис. 4, 5). При учете турбулентной вязкости и диффузии декремент затухания монотонно по модулю растет с ростом частоты и достигает величин порядка  $10^{-3}$  рад/с, в то время

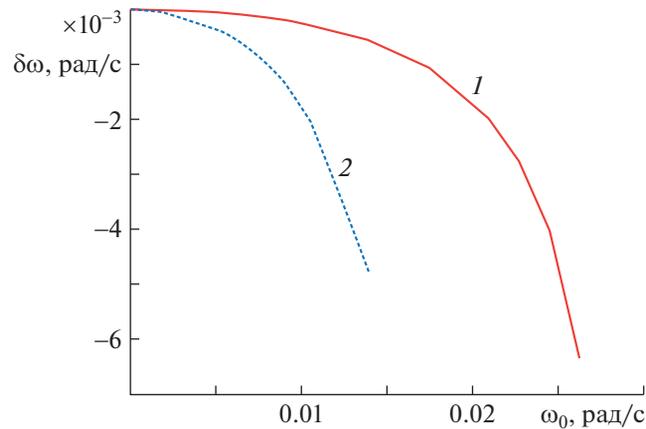


Рис. 4. Зависимость мнимой части частоты от частоты волны для первой –1 и второй –2 мод.

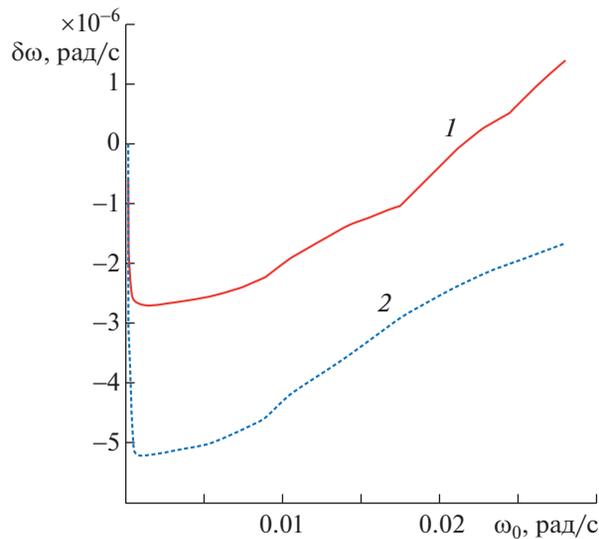


Рис. 5. Зависимость мнимой части частоты волны для первой 1 и второй 2 мод при отсутствии турбулентной вязкости и диффузии.

как без учета турбулентной вязкости и диффузии (рис. 5) декремент на два–три порядка меньше. Без учета турбулентной вязкости и диффузии модуль мнимой части частоты убывает при  $\omega_0 > 0.001$  рад/с для второй моды. У первой моды при  $\omega_0 > 0.001$  рад/с декремент с ростом частоты по модулю также убывает, пока он остается отрицательным (рис. 5).

Нормирующий множитель  $A_1$  находится по известной максимальной амплитуде вертикальных смещений [13, 16].

Вертикальные профили волнового  $\overline{uw}$  (3.1) и турбулентного  $\overline{u'w'}$  потоков импульса показаны на рис. 6. Турбулентный поток импульса определяется по формуле  $\overline{u'w'} = -K_z \cdot dU_0/dz$ , коэффициент вертикального турбулентного обмена для рассматриваемого случая сильной стратификации оценивается по формуле  $K_z \cong 0.93 \times 10^{-4} N_c^{-1} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $N_c$  соответствует частоте Брента–Вайсяля в цикл/ч [18, 19]. Волновой поток импульса  $\overline{uw}$  определяется для 15-минутных внутренних волн первой (1) и второй (2) мод с максимальной амплитудой 0.5 м. Волновой поток импульса второй моды заметно уступает потоку первой моды и турбулентному потоку. У первой моды нет подав-

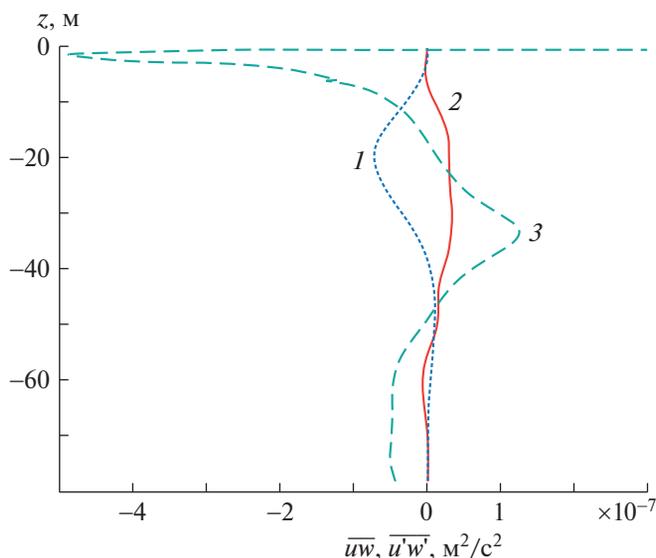


Рис. 6. Профили волнового  $\overline{uw}$  и турбулентного  $\overline{u'w'}$  вертикальных потоков импульса; 1 – первая мода, 2 – вторая мода внутренних волн, 3 – турбулентный поток.

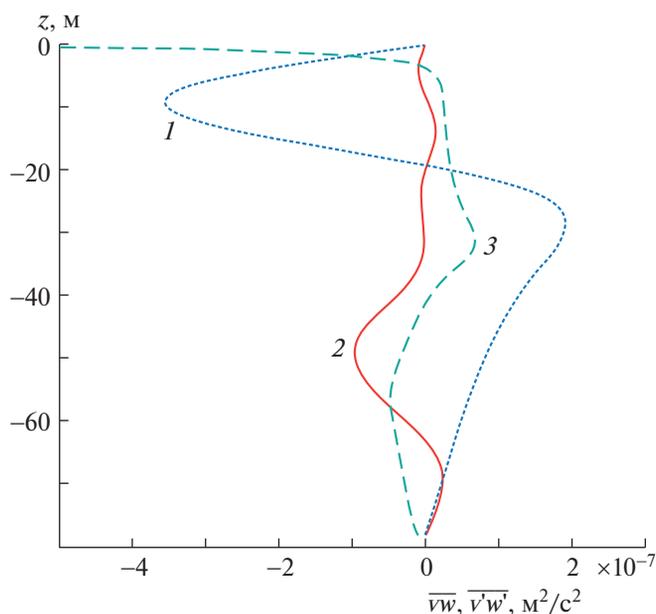


Рис. 7. Профили волнового  $\overline{vw}$  и турбулентного  $\overline{v'w'}$  вертикальных потоков импульса; 1 – первая мода, 2 – вторая мода внутренних волн, 3 – турбулентный поток.

ляющего преимущества волнового потока над турбулентным, только в интервале глубин 15–25 м волновой поток по модулю превосходит турбулентный.

Вертикальные профили волнового  $\overline{vw}$  (3.2) и турбулентного  $\overline{v'w'}$  потоков импульса показаны на рис. 7. Турбулентный поток импульса определяется по формуле  $\overline{v'w'} = -K_z \cdot dV_0/dz$ . Волновой поток импульса  $\overline{vw}$  определяется для 15-минутных внутренних волн первой (1) и второй (2) моды с максимальной амплитудой 0.5 м. Нельзя сказать, что волновой поток импульса второй моды на рис. 7 всюду уступает турбулентному, скорее всего глубже 30 м они сопоставимы по модулю. Глубже приповерхностного 2-метрового слоя вертикальный волновой поток импульса у первой моды по абсолютной величине доминирует над турбулентным и над потоком второй моды.

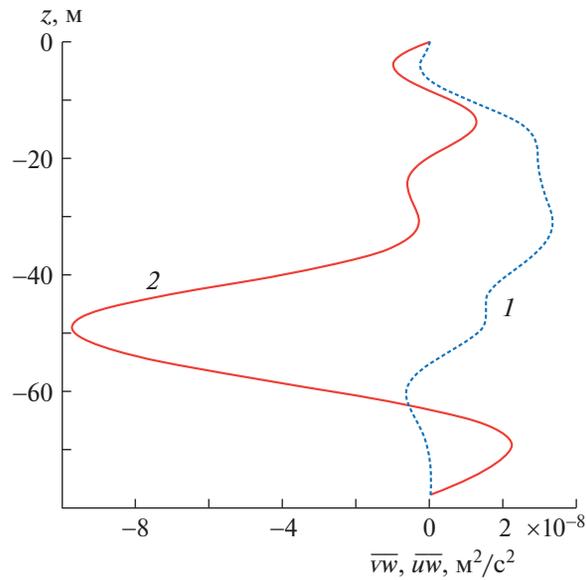


Рис. 8. Вертикальное распределение потоков импульса  $\overline{uw}$  1 и  $\overline{vw}$  2 для второй моды внутренних волн.

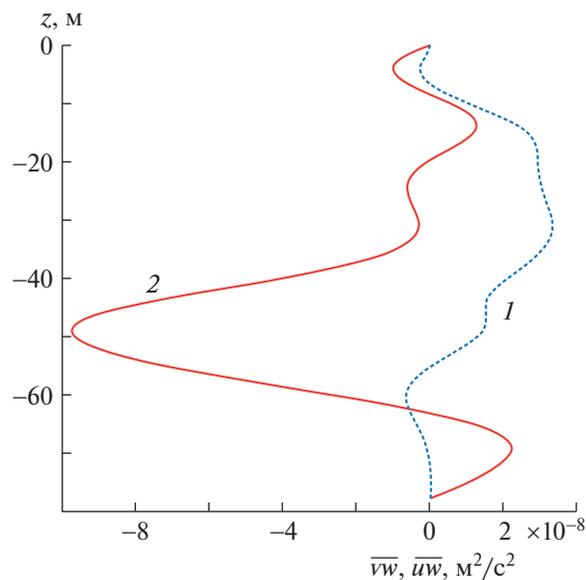
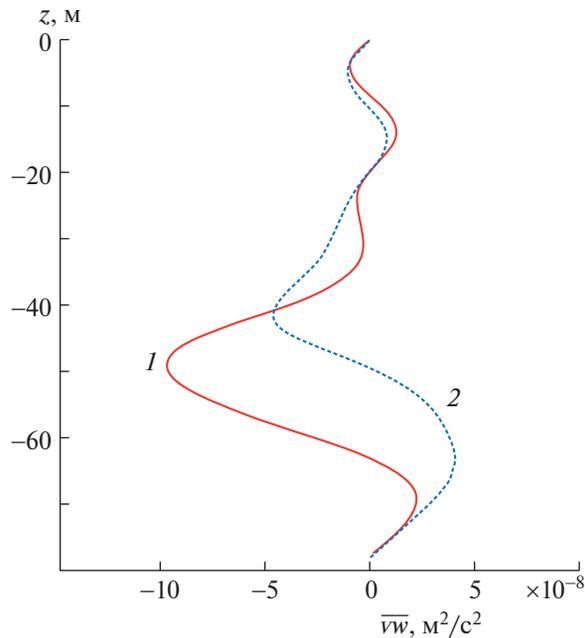


Рис. 9. Вертикальное распределение потоков импульса  $\overline{uw}$  при учете турбулентной вязкости и диффузии 1 и без их учета 2.

Сопоставим волновые потоки импульса  $\overline{uw}$ ,  $\overline{vw}$  для второй моды. На рис. 8 представлены вертикальные профили потоков импульса  $\overline{uw}$ ,  $\overline{vw}$  для второй моды 15-минутных внутренних волн. Глубже 40 м поток импульса  $\overline{vw}$  доминирует по модулю над  $\overline{uw}$ .

Сравним вертикальные волновые потоки диффузии и без их учета. На рис. 9 представлены профили вертикального потока импульса  $\overline{uw}$  при учете турбулентной вязкости и диффузии (1) и без их учета (2). При учете турбулентной вязкости и диффузии поток заметно больше в верхнем 40-метровом слое.

На рис. 10 представлены профили вертикального потока импульса  $\overline{vw}$  при учете турбулентной вязкости и диффузии (1) и без их учета (2). При учете турбулентной вязкости и диффузии поток заметно больше в интервале глубин 40–60 м.



**Рис. 10.** Вертикальное распределение потоков импульса  $\overline{vw}$  при учете турбулентной вязкости и диффузии 1 и без их учета 2.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Инерционно-гравитационные внутренние волны в двумерном стратифицированном течении при учете турбулентной вязкости и диффузии имеют комплексную собственную функцию и частоту. Мнимая поправка к частоте отрицательная, т.е. волна затухает. Декремент затухания у второй моды по абсолютной величине больше, чем у первой для волны фиксированного периода.

На зависимость действительной части частоты от волнового числа турбулентная вязкость и диффузия практически влияния не оказывают. На зависимость мнимой части частоты волны от частоты волны турбулентная вязкость и диффузия оказывают существенное влияние. Мнимая поправка к частоте по модулю на два-три порядка больше при учете турбулентной вязкости и диффузии и всегда отрицательная.

Волновой поток импульса  $\overline{vw}$  доминирует по модулю над потоком  $\overline{uw}$  глубже 40 м для второй моды 15-минутных внутренних волн при учете турбулентной вязкости и диффузии.

Сравнение волнового  $\overline{vw}$  и турбулентного  $\overline{v'w'}$  потоков импульса показывает, что для первой моды 15-минутных внутренних волн волновой поток по модулю доминирует над турбулентным глубже приповерхностного 2-метрового слоя. У второй моды эти потоки сравнимы по абсолютной величине.

Сравнение волнового  $\overline{uw}$  и турбулентного  $\overline{u'w'}$  потоков импульса показывает, что для первой моды 15-минутных внутренних волн волновой поток по модулю, вообще говоря, меньше турбулентного и сопоставим с ним на глубинах 10–30 м. У второй моды турбулентный поток импульса больше по абсолютной величине волнового.

Волновой поток импульса  $\overline{uw}$  для второй моды при учете турбулентной вязкости и диффузии выше, чем при их неучете в верхнем 40-метровом слое.

Волновой поток импульса  $\overline{vw}$  для второй моды при учете турбулентной вязкости и диффузии выше, чем при их неучете в слое 40–60 м.

Автор благодарен М.В. Рыбалкиной за проведение численных расчетов при решении краевой задачи. Работа выполнена в рамках государственного задания 0555-2021-0004.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бадулин С.И., Цимринг Л.Ш., Шрира В.И.* Захват и вертикальная фокусировка внутренних волн в пикноклине горизонтальными неоднородностями стратификации и течений // Доклады АН СССР. 1983. Т. 273. № 2. С. 459–463.
2. *Sibgatullin I.N., Ermanyuk E.V.* Internal and Inertial Wave Attractors: a Review // J. Appl. Mech. Tech. 2019. V. 60. № 2. P. 284–302.  
<https://doi.org/10.1134/S002189441902010X>
3. *Brouzet C., Ermanyuk E.V., Joubaud S., Sibgatullin I., Dauxois T.* Energy cascade in internal-wave attractors // EPL (Europhysics Letters), V. 113. № 4.  
<https://doi.org/10.1209/0295-5075/113/44001>
4. *Сабинин К.Д., Успенская Т.М.* К влиянию сдвиговых течений на кинематические характеристики внутренних волн // Океанология. 1990. № 6. С. 932–935.
5. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. and Vladimirov I.Yu.* Phase Structure of Internal Gravity Waves in the Ocean with Shear Flows. Physical Oceanography, [e-journal], 2021. V. 28. Iss. 4. P. 438–453.  
<https://doi.org/10.22449/1573-160X-2021-4-438-453>
6. *Miles J.W.* On the stability of heterogeneous shear flows // J. Fluid Mech. 1961. V. 10. Iss. 4. P. 496–508.  
<https://doi.org/10.1017/S0022112061000305>
7. *Howard L.N.* Note on a paper of John W. Miles // J. Fluid Mech. 1961. V. 10. Iss. 4. P. 509–512.  
<https://doi.org/10.1017/S0022112061000317>
8. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. М.: Мир, 1981. Ч. 2. 363 с.
9. *LeBlond P.H.* On damping of internal gravity waves in a continuously stratified ocean // J. Fluid Mech. 1966. V. 25. Iss. 1. P. 121–142.  
<https://doi.org/10.1017/S0022112066000089>
10. *Островский Л.А., Соустова И.А.* Верхний перемешанный слой как сток энергии внутренних волн // Океанология. 1979. Т. 19. Вып. 6. С. 973–981.
11. *Слепышев А.А.* Вертикальный перенос импульса внутренними волнами при учете турбулентной вязкости и диффузии // Изв. РАН. ФАО. 2016. Т. 52. № 3. С. 342–350.  
<https://doi.org/10.7868/S0002351516030111>
12. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. XII. Вып. 5 (77). С. 3–122.
13. *Анкудинов Н.О., Слепышев А.А.* Вертикальный перенос импульса внутренними волнами в двумерном потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 3. С. 39–47.
14. *Миропольский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 302 с.
15. *Черкесов Л.В.* Гидродинамика волн. К.: Наукова думка, 1980. 259 с.
16. *Пантелеев Н.А.* Отчет о работах в 44-м рейсе (3-й этап) НИС “Михаил Ломоносов” 7 августа–15 сентября 1985 г. Севастополь: МГИ АН УССР, 1985. Т. 1. 135 с.
17. *Боуден К.* Физическая океанография прибрежных вод. Москва: Мир, 1988. С. 285.
18. *Иванов В.А., Самодуров А.С., Чухарев А.М., Носова А.В.* Интенсификация вертикального турбулентного обмена в районах сопряжения шельфа и континентального склона в Черном море // Доп. НАН України. 2008. № 6. С. 108–112.
19. *Samodurov A.S.* Complimentarity of Different Approaches for Assessing Vertical Turbulent Exchange Intensity in Natural Stratified Basins // J. Phys. Oceanogr. 2016. Iss. 6. P. 32–42.  
<https://doi.org/10.22449/1573-160X-2016-6-32-42>