УДК 532.517.2

УСТОЙЧИВОСТЬ АДВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОМ СНИЗУ СЛОЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ТВЕРДЫМИ ГРАНИЦАМИ ПРИ МАЛОМ ЧИСЛЕ ПРАНДТЛЯ

 К. Г. Шварц

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

E-mail: kosch@psu.ru

Поступила в редакцию 29.06.2021 г.
После доработки 15.09.2021 г.
Принята к публикации 21.09.2021 г.

Исследуется устойчивость адвективного течения в плоском вращающемся горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твердыми границами. На верхней границе слоя задано линейное распределение температуры, нижняя граница теплоизолированная. Адвективное течение, возникшее за счет горизонтальной конвекции, описывается аналитически в виде нового точного решения уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска. При малом значении числа Прандтля в рамках линейной теории исследуется устойчивость адвективного течения на нормальные возмущения для широкого диапазона числа Тейлора. Определяются наиболее опасные моды, строятся нейтральные кривые. В рамках нелинейной постановки задачи изучается влияние вращения на структуру конечно-амплитудных возмущений в надкритической области вблизи минимумов нейтральных кривых.

Ключевые слова: горизонтальная конвекция, адвективные течения, точное решение, нормальные возмущения, устойчивость, конечно-амплитудные возмущения

DOI: 10.31857/S0568528122020086

Под воздействием продольного градиента температуры в горизонтальном слое жидкости возникает адвективное течение [1]. Его специфика состоит в отсутствии вертикальной компоненты скорости, вектор скорости в потоке ориентирован перпендикулярно силе плавучести, которая является основной причиной движения. В случае, когда температура на одной или обеих горизонтальных границах слоя является линейной функцией ($T = Ax$, где x – продольная координата, A – постоянный горизонтальный температурный градиент на границах слоя), течение описывается аналитическим выражением, которое является точным решением уравнений Навье–Стокса [2, 3]. При наличии твердых границ, на которых задано условие прилипания, возникает течение Остроумова–Бириха [4]. Устойчивость такого течения исследована в [5], в частности, при малых числах Прандтля неустойчивость обусловлена гидродинамическим механизмом (неподвижные вихри на границе встречных потоков). Обзор устойчивости других подобных течений представлен в [6].

Адвективное течение в горизонтальном слое жидкости с теплоизолированной нижней границей описано аналитически в [7]. В этом случае кубический профиль скорости остается неизменным, а в профиле температуры отсутствуют зоны потенциально неустойчивой стратификации, тем самым исключаются моды неустойчивости рэлеевской природы. Линейный анализ устойчивости, проведенный в [7], показал, что опасные гидродинамические моды возникают при малых числах Прандтля (Pr) от 0.015 до 0.27.

В монографии [8] представлено точное решение уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска, описывающее адвективное течение, возникающее во вращающемся горизонтальном слое жидкости с твердыми границами и линейной температурой на обеих границах слоя. Имеются две горизонтальные компоненты скорости, профили которых являются антисимметричными относительно вертикальной оси z. Они описывают движение жидкости типа спирали Экмана, поле же температуры описывает два тепловых потока, двигающихся вдоль слоя.

С ростом числа Тейлора (Ta) вблизи твердых границ образуются пограничные слои скорости и температуры, в которых градиент давления балансируется с силами вязкости и силами Кориолиса.

Устойчивость такого течения изучена в работе [9] для большого диапазона Ta. Было показано, что при малых значениях Pr с ростом числа Тейлора наиболее опасные моды неустойчивости меняются. При малых значениях Ta в слое с твердыми границами снижается устойчивость адвективного течения, а затем, начиная с некоторого порогового значения, стабилизирует его. Этот же факт был зафиксирован в горизонтальном слое жидкости со свободной верхней границей при исследовании устойчивости адвективного течения [10], а также при численных расчетах во вращающихся круглых кюветах [11–14].

В данной работе исследуется устойчивость адвективного течения во вращающемся горизонтальном слое жидкости с твердыми границами при теплоизолированной нижней границе.

1. АДВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Рассмотрим бесконечный горизонтальный слой несжимаемой жидкости шириной $2h$ с твердыми границами, вращающийся с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega} = \Omega_0 \mathbf{i_z}$, где $\mathbf{i_z}$ – орт-вектор вертикальной оси z. Направление оси вращения совпадает с вертикальной осью координат Oz. На обеих границах задано условие прилипания, поток замкнутый, на верхней границе приложен постоянный горизонтальный градиент температуры T, нижняя граница теплоизолированная. Движение жидкости описывается уравнениями конвекции в приближении Буссинеска [15] в декартовой системе координат $Oxyz$ (z – вертикальная координата, x, y – горизонтальные координаты). Выбрав в качестве единиц измерения длины, времени, скорости, температуры и давления h, h^2/ν, $g\beta Ah^3/\nu$, Ah, $\rho_0 g\beta Ah^3$ (где ν – кинематическая вязкость, β – коэффициент теплового расширения, g – ускорение свободного падения, ρ_0 – средняя плотность), получим исходные уравнения в безразмерном виде

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \upsilon_x}{\partial t} + Gr\left(\upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z}\right) - \sqrt{Ta}\cdot \upsilon_y = -\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta \upsilon_x \\
\frac{\partial \upsilon_y}{\partial t} + Gr\left(\upsilon_x \frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z}\right) + \sqrt{Ta}\cdot \upsilon_x = -\frac{\partial p}{\partial y} + \Delta \upsilon_y \\
\frac{\partial \upsilon_z}{\partial t} + Gr\left(\upsilon_x \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \Delta \upsilon_z + T \\
\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = 0 \\
\frac{\partial T}{\partial t} + Gr\left(\upsilon_x \frac{\partial T}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial T}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{1}{Pr}\Delta T
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где $\boldsymbol{\upsilon}(x,y,z,t) = (\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ – вектор скорости, p – конвективная добавка к гидростатическому давлению, соответствующему средним значениям температуры и плотности [1, 16], $Gr = g\beta Ah^4/\nu^2$ – число Грасгофа, $Ta = (2\Omega_0 h^2/\nu)^2$ – число Тейлора, $Pr = \nu/\chi$ – число Прандтля, χ – коэффициент температуропроводности, оператор Лапласа $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Граничные условия в безразмерном виде имеют вид:

$$
\begin{gathered}
z = -1: \ \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \ \ \boldsymbol{\upsilon} = 0; \qquad z = 1: \ T = x, \ \ \boldsymbol{\upsilon} = 0 \\
\int_{-1}^{1} \upsilon_x dz = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \upsilon_y dz = 0
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

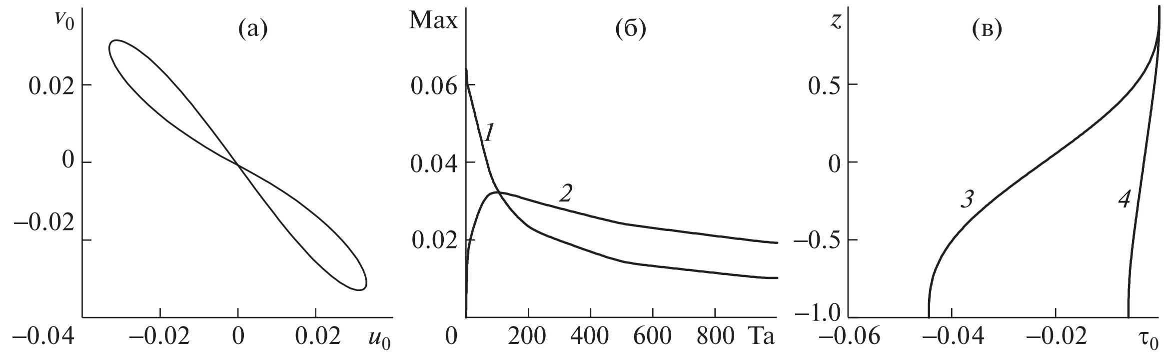

Рис. 1. Годограф вектора скорости при $\mathrm{Ta} = 100$ (а), зависимость максимумов компонент скорости $u_0(z)$ и $\upsilon_0(z)$ от числа Тейлора: *1* – $\max u_0$, *2* – $\max v_0$ (б), графики $\tau_0(z)$ при $\mathrm{Ta} = 0.1$(*3*) и $\mathrm{Ta} = 10^3$(*4*) (в).

Краевая задача (1.1), (1.2) имеет аналитическое решение [8]:

$$
\begin{gathered}
u_0(z) = \frac{1}{\sqrt{Ta}} \operatorname{Im} f_1(z), \quad \upsilon_0(z) = \frac{1}{\sqrt{Ta}}\left(z - \operatorname{Re} f_1(z)\right), \quad w_0(z) \equiv 0 \\
T_0 = x + GrPr\tau_0(z), \quad \tau_0(z) = \frac{1}{\sqrt{Ta}}[\upsilon_0(z) - \upsilon_0'(-1)(z-1)] \\
f_1(z) = \frac{\operatorname{sh}(\mu z)}{\operatorname{sh}(\mu)}, \quad \mu = \sqrt[4]{\frac{Ta}{4}}(1+i), \quad i = \sqrt{-1}
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

где $u_0(z)$, $\upsilon_0(z)$ и $w_0(z)$ – компоненты вектора скорости, Re – действительная часть комплексного значения, Im – мнимая часть комплексного значения, T_0 – температура.

Профили компонент скорости $u_0(z)$, $\upsilon_0(z)$ во вращающемся слое являются антисимметричными относительно оси z. Они описывают движение спирального типа, что иллюстрирует годограф вектора скорости на рис. 1а. На рис. 1б представлен график зависимости максимумов горизонтальных компонент скорости от числа Тейлора. Максимум первой компоненты скорости $u_0(z)$ монотонно убывает с увеличением числа Тейлора пропорционально $1/\sqrt{Ta}$. При отсутствии вращения $\upsilon_0(z) \equiv 0$, вторая компонента скорости возникает при наличии вращения, когда $Ta > 0$. Ее максимум начинает возрастать в диапазоне $0 \le Ta \le 98.4$, оставаясь при этом меньше максимума первой компоненты скорости u_0. Таким образом, под действием силы Кориолиса течение Остроумова-Бириха [2–4] начинает перестраиваться. При $Ta > 98.4$ максимум первой и максимум второй горизонтальной компоненты скорости выравниваются и теперь они оба монотонно убывают по корневому закону. На рис. 1в представлены графики $\tau_0(z)$ при $Ta = 0.1$ и $Ta = 10^3$. Профили температуры не обладают симметрией. С ростом числа Тейлора максимум $\tau_0(z)$ по модулю монотонно убывает.

2. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

Для исследования устойчивости адвективного течения (1.3) применим метод малых возмущений [5]

$$
\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}_0 = (u_0, \upsilon_0, 0), \quad \mathbf{V} = (U, V, W), \quad T = T_0 + \theta, \quad P = p_0 + P' \tag{2.1}
$$

Здесь $\mathbf{V}$, θ, P' – малые возмущения. Подставив возмущенные поля скорости, температуры и давления (2.1) в исходную систему (1.1) и граничные условия (1.2), получим следующую задачу:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + Gr\left[(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{v_0} + (\mathbf{v_0}\nabla)\mathbf{V}\right] + \sqrt{Ta}\,\left(\mathbf{i_z} \times \mathbf{V}\right) = -P' + \Delta\mathbf{V} + \theta\mathbf{i_z}, \\
\mathbf{i_z} = (0,0,1) \quad \operatorname{div}\mathbf{V} = 0
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + Gr\left[\mathbf{V}\nabla\theta + \mathbf{V}\nabla T_0 + \mathbf{v_0}\nabla\theta\right] = \frac{1}{\Pr}\Delta\theta$$
$$z = -1:\ U = V = W = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0 \tag{2.3}$$

$$z = 1:\ U = V = W = 0, \quad \theta = 0 \tag{2.4}$$

В рамках линейной теории устойчивости в уравнениях (2.2)–(2.4) пренебрегаем малыми квадратичными по возмущениям $\mathbf{V}$ и θ слагаемыми. Полученная система линейных уравнений имеет решения в виде нормальных возмущений, пропорциональных $\exp(\lambda t + k_x x + k_y y)$, где $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, – декремент, определяющий временной ход возмущений. Вещественные коэффициенты k_x и k_y – это компоненты волнового вектора вдоль осей Ox и Oy. Следуя [1, 5], будем изучать два предельных случая. Это пространственные винтовые периодические возмущения в виде валов с осью, параллельной оси Ox, которые при отсутствии вращения превращаются в плоские, и пространственные спиральные периодические по y возмущения в виде валов с осью, перпендикулярной к оси Ox при $Pr = 0.1$. Числа Тейлора рассматриваются в диапазоне от 0 до 10^5.

Случай винтовых возмущений. Уравнения возмущений выводятся из линеаризованной системы (2.2)–(2.4) в предположении, что производная по y от всех функций равна нулю ($k_y = 0$). Имеются все три компоненты вектора возмущения скорости и возмущение температуры, которые являются функциями времени t и двух пространственных координат x и z. Учитывая, что дивергенция возмущений скорости равна нулю, введем функцию тока возмущений $\psi(t,x,z)$ и вихря возмущения скорости $\phi(t,x,z)$

$$U = -\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad W = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \phi = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = -\Delta\psi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Рассмотрим нормальные возмущения вида

$$\phi = [\phi_1(t,z) + i\phi_2(t,z)]\exp(ik_x x), \quad \psi = [\psi_1(t,z) + i\psi_2(t,z)]\exp(ik_x x)$$
$$V = [v_1(t,z) + iv_2(t,z)]\exp(ik_y y), \quad \vartheta = [\vartheta_1(t,z) + i\vartheta_2(t,z)]\exp(ik_x x)$$

В результате задача сведется к решению системы линейных уравнений в частных производных по времени t и переменной z, описанной в [8], с граничными условиями

$$z = -1:\ \psi_\alpha = \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial z} = v_\alpha = \frac{\partial\vartheta_\alpha}{\partial z} = 0, \quad (\alpha = 1,2) \tag{2.5}$$

$$z = 1:\ \psi_\alpha = \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial z} = v_\alpha = \vartheta_\alpha = 0, \quad (\alpha = 1,2) \tag{2.6}$$

В качестве начальных возмущений функции тока, второй компоненты скорости и аддитивной компоненты поля температуры берем функцию $\sin^2(\pi z)$, удовлетворяющую граничным условиям (2.5), (2.6).

Полученная начально-краевая задача решается по численной методике, описанной в [8]. При построении нейтральной кривой, описывающей зависимость критического числа Грасгофа от волнового числа, для каждого выбранного значения k_x требуется найти такое число Грасгофа, при котором действительная часть декремента возмущений $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ равна нулю. Иными словами, решается задача о поиске корня $\lambda_1 = 0$ для неявной функции λ_1 (k_x, Gr, Ta). Эта функция строится дискретно по точкам с помощью многократного решения эволюционной задачи методом сеток. Для нахождения действительной части декремента возмущений λ_1 прослеживалась эволюция во времени максимумов по модулю неизвестных. В силу линейности задачи устойчивости в качестве аппроксимации зависимости амплитуд по времени использовалась экспоненциальная формула $C\exp(\lambda_1 t)$. Неизвестные λ_1 и C определяются методом наименьших квадратов [17] по ходу вычислений уравнений системы методом сеток. Нулевое значение декремента возмущений уточняется методом половинного деления [17]. Характер поведения возмущений от времени существенно зависит от всех параметров задачи; в области неустойчивости все возмущения нарастают, а в области устойчивости затухают.

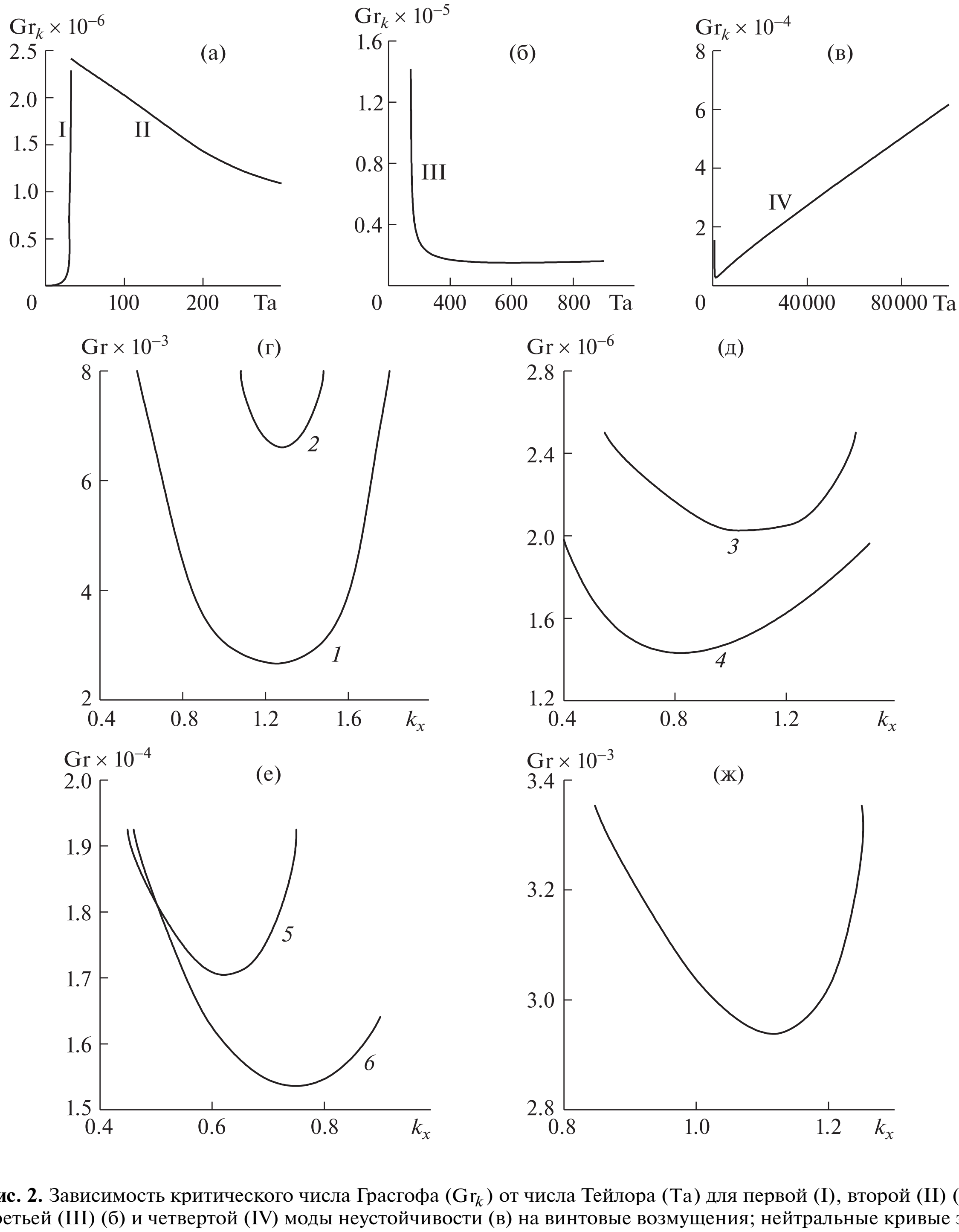

Рис. 2. Зависимость критического числа Грасгофа (Gr_k) от числа Тейлора (Ta) для первой (I), второй (II) (а), третьей (III) (б) и четвертой (IV) моды неустойчивости (в) на винтовые возмущения; нейтральные кривые зависимости числа Грасгофа от волнового числа k_x при (г) – $Ta = 1{,}10$ (*1–2*); (д) – $Ta = 100, 200$ (*3–4*); (е) – $Ta = 400, 500$ (*5–6*) и (ж) – $Ta = 1000$.

Расчеты показали, что в рассмотренном диапазоне чисел Тейлора сохраняется колебательный характер неустойчивости. С ростом *Ta* наблюдались четыре наиболее опасные моды (рис. 2а,б,в), сменяющие друг друга. Мода I (рис. 2а) при отсутствии вращения ($Ta = 0$) описана в [7]. При $Ta \neq 0$ она наиболее опасна в интервале $0 < Ta < 33$. В указанном диапазоне числа Тейлора адвективное течение резко стабилизируется. С ростом *Ta* возрастает критическое число Грасгофа (Gr_k), волновое число k_x растет от 1.26 до 1.56. Отметим, что, как и в [7], инкремент возмущений $\lambda_2 > 8$ и он становится больше с увеличением числа Тейлора. На рис. 2г представлены характерные для данной моды нейтральные кривые при $Ta = 1$ и $Ta = 10$. При меньшем значении числа Тейлора критическое число Грасгофа становится меньше, также как и волновое число.

Вторая мода (рис. 2а) развивается в интервале $32.6 \le Ta < 270$. С ростом числа Тейлора волновое число k_x уменьшается от 1.27 до 0.82, адвективное течение становится менее устойчивым, так как критическое число Грасгофа уменьшается от 2411836.9 до 1224076.9. На рис. 2д представлены нейтральные кривые при $Ta = 100$ и $Ta = 200$. При меньшем значении числа Тейлора критическое число Грасгофа, также как и волновое число, больше.

Третья мода (рис. 2б) является наиболее опасной при $270 \le Ta \le 715$. С ростом числа Тейлора волновое число k_x увеличивается от 0.07 до 0.91, критическое число Грасгофа уменьшается от 138434.5 до 15270.3, таким образом, здесь течение дестабилизируется. На рис. 2е представлены нейтральные кривые при $Ta = 400$ и $Ta = 500$. С ростом значений числа Тейлора убывает критическое число Грасгофа, волновое число увеличивается.

Четвертая мода (рис. 2в) находится в интервале $715 < Ta \le 10^5$. С ростом числа Тейлора волновое число k_x увеличивается от 0.27 до 8.2, Gr_k уменьшается до 2715.2 при $Ta = 1300$, это значение является минимальным на всем интервале от 0 до 10^5. При $Ta > 1300$ критическое число Грасгофа монотонно возрастает с ростом числа Тейлора до 61646.2 при $Ta = 10^5$. На рис. 2ж представлена нейтральная кривая при $Ta = 1000$.

Случай спиральных возмущений. Уравнения спиральных возмущений выводятся из системы (2.2)–(2.4) в предположении, что производные в ней по x от всех функций равны нулю ($k_x = 0$). Имеются три компоненты вектора возмущения скорости, а также возмущения температуры, которые являются функциями времени t и двух пространственных переменных y, z. Аналогично предыдущему случаю введем функцию тока возмущений $\psi(t,y,z)$ и вихря возмущения скорости $\varphi(t, y, z)$:

$$V = -\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad W = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \varphi = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} = -\Delta\psi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Рассмотрим нормальные возмущения вида:

$$\varphi = [\varphi_1(t,z) + i\varphi_2(t,z)]\exp(ik_y y), \quad \psi = [\psi_1(t,z) + i\psi_2(t,z)]\exp(ik_y y)$$

$$U = [u_1(t,z) + iu_2(t,z)]\exp(ik_y y), \quad \theta = [\theta_1(t,z) + i\theta_2(t,z)]\exp(ik_y y)$$

В результате задача сведется к решению системы линейных уравнений в частных производных по времени t и переменной z [8] с граничными условиями:

$$z = -1: \ \psi_\alpha = \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial z} = u_\alpha = \frac{\partial\theta_\alpha}{\partial z} = 0, \quad (\alpha = 1,2) \tag{2.7}$$

$$z = 1: \ \psi_\alpha = \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial z} = u_\alpha = \theta_\alpha = 0, \quad (\alpha = 1,2) \tag{2.8}$$

Полученная начально-краевая задача решается по вычислительной схеме аналогично случаю винтовых возмущений. В качестве начальных возмущений для неизвестных возьмем снова функцию $\sin^2(\pi z)$, удовлетворяющую граничным условиям (2.7), (2.8).

Расчеты показали, что в рассмотренном диапазоне чисел Тейлора сохраняется колебательный характер неустойчивости. С ростом Ta наблюдались две наиболее опасные моды (рис. 3а,б), сменяющие друг друга. Мода I (рис. 3а) наиболее опасна на интервале $0 < Ta < 95$. При $0 < Ta \le 10$ критическое число Грасгофа уменьшается до 1163.9 с увеличением числа Тейлора, тем самым делая адвективное течение менее устойчивым во вращающемся слое жидкости, $Gr_k = 1163.9$ является минимальным для всех чисел Тейлора на всем рассматриваемом интервале от 0 до 10^5. При $10 < Ta < 95$ критическое число Грасгофа растет с увеличением числа Тейлора и достигает значения 11931.3 при $Ta = 93$. Волновое число k_y монотонно возрастает с ростом числа Тейлора от 0.34 до 0.64 при $0 < Ta \le 20$, а затем убывает от 0.64 до 0.2 при $20 \le Ta \le 93$. На рис. 3в представлены характерные нейтральные кривые при $Ta = 10$ и $Ta = 30$.

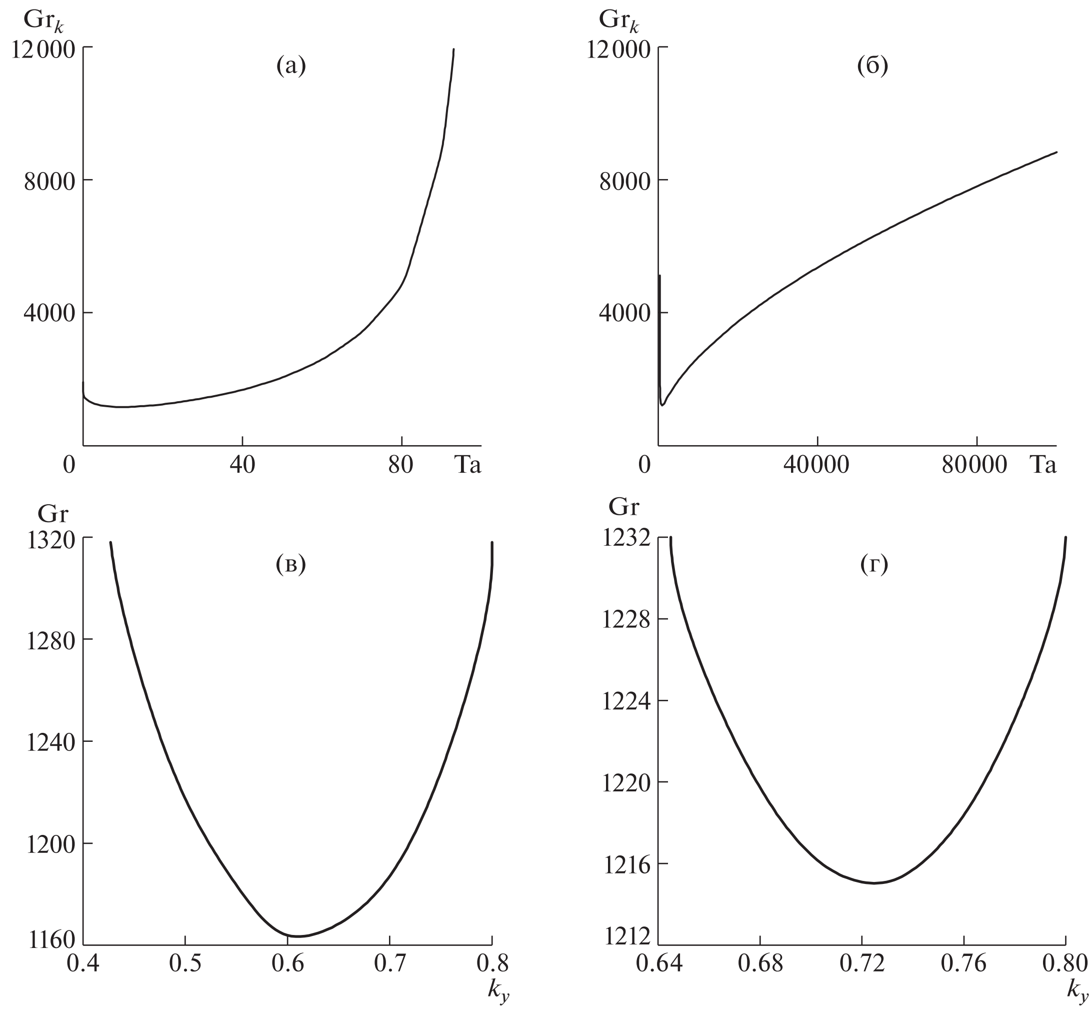

Рис. 3. Зависимость критического числа Грасгофа (Gr_k) от числа Тейлора (Ta) для первой (а) и второй моды неустойчивости (б) на спиральные возмущения; нейтральные кривые зависимости числа Грасгофа от волнового числа k_y: $Ta = 10$ (а), 30 (б), 1000 (в), 2000 (г).

При $93 < Ta < 400$ адвективное течение устойчиво на спиральные возмущения при любых значениях числа Грасгофа.

Вторая мода (рис. 3б) находится в интервале $400 \le Ta \le 10^5$. При $400 \le Ta \le 923$ критическое число Грасгофа уменьшается от 5126.6 до 1202.4 с увеличением числа Тейлора. Происходит дестабилизация адвективного течения на данном интервале, $Gr_k = 1202.4$ является локальным минимумом на рассматриваемом интервале. При $923 < Ta < 10^5$ критическое число Грасгофа растет с увеличением числа Тейлора и достигает значения 8833.6 при максимальном значении числа Тейлора. Большое число Тейлора можно связать с большой угловой скоростью вращения при фиксированной вязкости жидкости и фиксированной толщине слоя. Тогда справедливо утверждение, что быстрое вращение стабилизирует течение. Волновое число k_y монотонно возрастает с ростом числа Тейлора от 0.7 до 1.67. В качестве примера на рис. 3г представлены нейтральные кривые при $Ta = 1000$ и $Ta = 2000$.

3. КОНЕЧНО-АМПЛИТУДНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Поведение возмущений конечной амплитуды в надкритической области исследуется на основе нелинейной системы уравнений (2.2)–(2.4).

Случай винтовых возмущений. Для винтовых периодических по x возмущений система имеет вид

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+Gr\left[-\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z}+u_0(z)\frac{\partial\phi}{\partial x}+u_0''(z)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]-\sqrt{Ta}\frac{\partial\upsilon}{\partial z}=\Delta\phi-\frac{\partial\theta}{\partial x}\qquad\Delta\psi+\phi=0$$

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+Gr\left[-\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\upsilon}{\partial z}+u_0(z)\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+\upsilon_0'(z)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]-\sqrt{Ta}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\Delta\upsilon \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+Gr\left[-\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial z}+u_0(z)\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial z}+Ra\theta_0'(z)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]=\frac{1}{\Pr}\Delta\theta$$

$$z=-1:\ \frac{\partial\psi}{\partial z}=0,\quad \psi=0,\quad \frac{\partial\theta}{\partial z}=0 \tag{3.2}$$

$$z=1:\ \frac{\partial\psi}{\partial z}=0,\quad \psi=0,\quad \theta=0 \tag{3.3}$$

$$\psi(t,0,z)=\psi(t,L,z),\quad \phi(t,0,z)=\phi(t,L,z),\quad \upsilon(t,0,z)=\upsilon(t,L,z),\quad \theta(t,0,z)=\theta(t,L,z) \tag{3.4}$$

где L – длина волны возмущений, оператор Лапласа $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial z^2$, $\psi(t,x,z)$, $\phi(t,x,z)$, $\upsilon(t,x,z)$, $\theta(t,x,z)$ – конечно-амплитудные возмущения функции тока, вихря скорости, второй компоненты скорости и температуры.

Нелинейная двумерная задача (3.1)–(3.4) решалась численно методом сеток [18]. В рамках двухполевого метода [19] использовалась явная конечно-разностная схема. Уравнение Пуассона для функции тока решалось методом последовательной верхней релаксации. Основные расчеты проводились на сетке 101 × 200.

Функции тока и вихря скорости описывают проекцию движения конечно-амплитудных возмущений на плоскость xOz. Вторая y-я компонента скорости описывает проекцию движения конечно-амплитудных возмущений на плоскость yOz или xOy. Положительное значение возмущения скорости $\upsilon(t,x,z)$ описывает движение вглубь, а отрицательное – движение в противоположном направлении, перпендикулярное плоскости xOz.

Расчеты показали, что при всех рассматриваемых значениях числа Тейлора возмущения представляют собой систему бегущих винтообразных вихрей, возникающих в областях с неустойчивой температурной стратификацией. Однако для разных мод картина конечно-амплитудных возмущений имеет некоторые отличия.

На рис. 4а,б,в представлены изотермы конечно-амплитудных возмущений температуры $\theta(t,x,z)$, изолинии возмущений функции тока $\psi(t,x,z)$ и скорости $\upsilon(t,x,z)$ при $Ta=10$ для числа Грасгофа $Gr=10000$ выше критического. Поперек слоя возникают движущиеся вдоль слоя чередующиеся холодные и теплые пятна. Проекция движения, описанная функцией возмущения функции тока вблизи порога устойчивости, представляет собой две цепочки вращающихся, соответственно, против и по часовой стрелке вихрей, локализованных в верхней и нижней половине слоя и движущихся в противоположных направлениях вдоль слоя. Одновременно y-я компонента возмущения скорости описывает в центре слоя вращение против и по часовой стрелке попарно движущихся вдоль оси Ox вихрей в плоскости xOy.

При $Ta=500$ и $Gr=20000$ (рис. 5а–5с) чередующиеся тепловые пятна, движущиеся вдоль оси абсцисс, локализуются в нижней половине слоя и имеют форму, близкую к полуокружности. Проекция движения адвективного течения на плоскость xOz, описанная $\psi(t,x,z)$, представляет собой последовательность вращающихся поперек слоя против и по часовой стрелке вихрей и движущихся вдоль него. Одновременно y-я компонента возмущения скорости описывает в центре слоя вращение против и по часовой стрелке попарно движущихся вдоль оси Ox вихрей в плоскости xOy.

При $Ta=1000$ и $Gr=4000$ (рис. 4г,д,е) две цепочки движущихся вдоль слоя чередующихся теплых и холодных пятен находятся вблизи границ слоя. Причем в силу теплоизоляции нижней границы вращающегося слоя жидкости нижние тепловые пятна имеют форму, близкую к полуокружности. Проекция, описанная функцией тока, представляет собой последовательность движущихся вдоль и вращающихся поперек слоя пары вихрей. Одновременно $\upsilon(t,x,z)$ описывает вращение против и по часовой стрелке последовательности движущихся вдоль оси Ox вихрей в

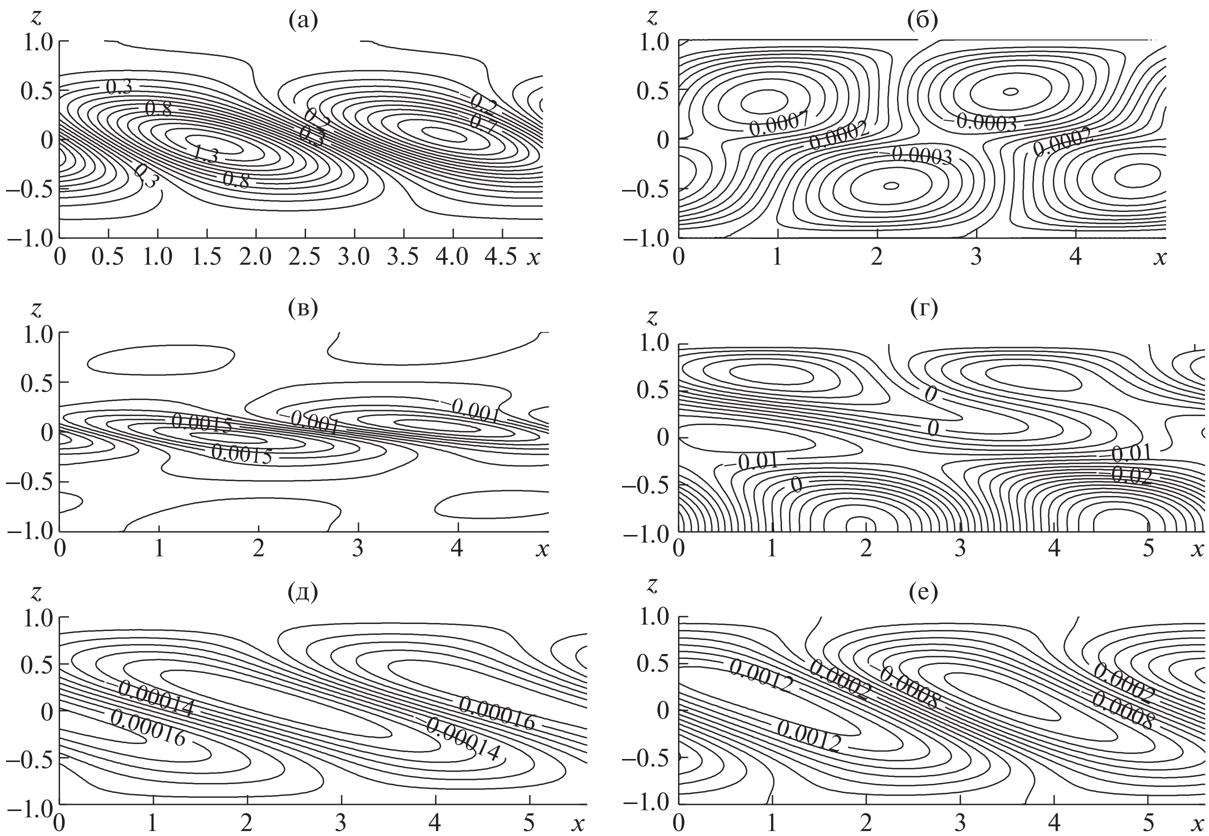

Рис. 4. Изолинии конечно-амплитудных возмущений температуры $\theta(t,x,z)$ (а, г), функции тока $\psi(t,x,z)$ (б, д) и второй компоненты скорости $\upsilon(t,x,z)$ (в, е): $Ta = 10$, $Gr = 10\,000$, $k_x = 1.28$ (а–в); $Ta = 1000$, $Gr = 4000$, $k_x = 1.12$ (г–е).

плоскости xOy. При $Ta = 10^5$ и $Gr = 70\,000$ (рис. 5г–5е) структура конечно-амплитудных возмущений аналогична предыдущему случаю. Однако вторая компонента скорости описывает вихревое движение жидкости под углом к плоскости xOy.

Случай спиральных возмущений. Для пространственных периодических по y возмущений система имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + Gr\left[-\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z} + v_0(z)\frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_0''(z)\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right] - \sqrt{Ta}\frac{\partial u}{\partial z} = \Delta\Phi - \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\Delta\Psi + \Phi = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + Gr\left[-\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial z} + v_0(z)\frac{\partial U}{\partial y} + u_0'(z)\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right] + \sqrt{Ta}\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \Delta U$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + Gr\left[-\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial z} + v_0(z)\frac{\partial \theta}{\partial y} + u + Ra\theta_0'(z)\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right] = \frac{1}{\Pr}\Delta\theta$$

$$z = -1: \ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{z}} = 0, \quad \Psi = 0, \quad U = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \tag{3.6}$$

$$z = 1: \ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{z}} = 0, \quad \Psi = 0, \quad U = 0, \quad \theta = 0 \tag{3.7}$$

$$\Psi(t,0,z) = \Psi(t,L,z), \Phi(t,0,z) = \Phi(t,L,z), \quad U(t,0,z) = U(t,L,z), \quad \theta(t,0,z) = \theta(t,L,z) \tag{3.8}$$

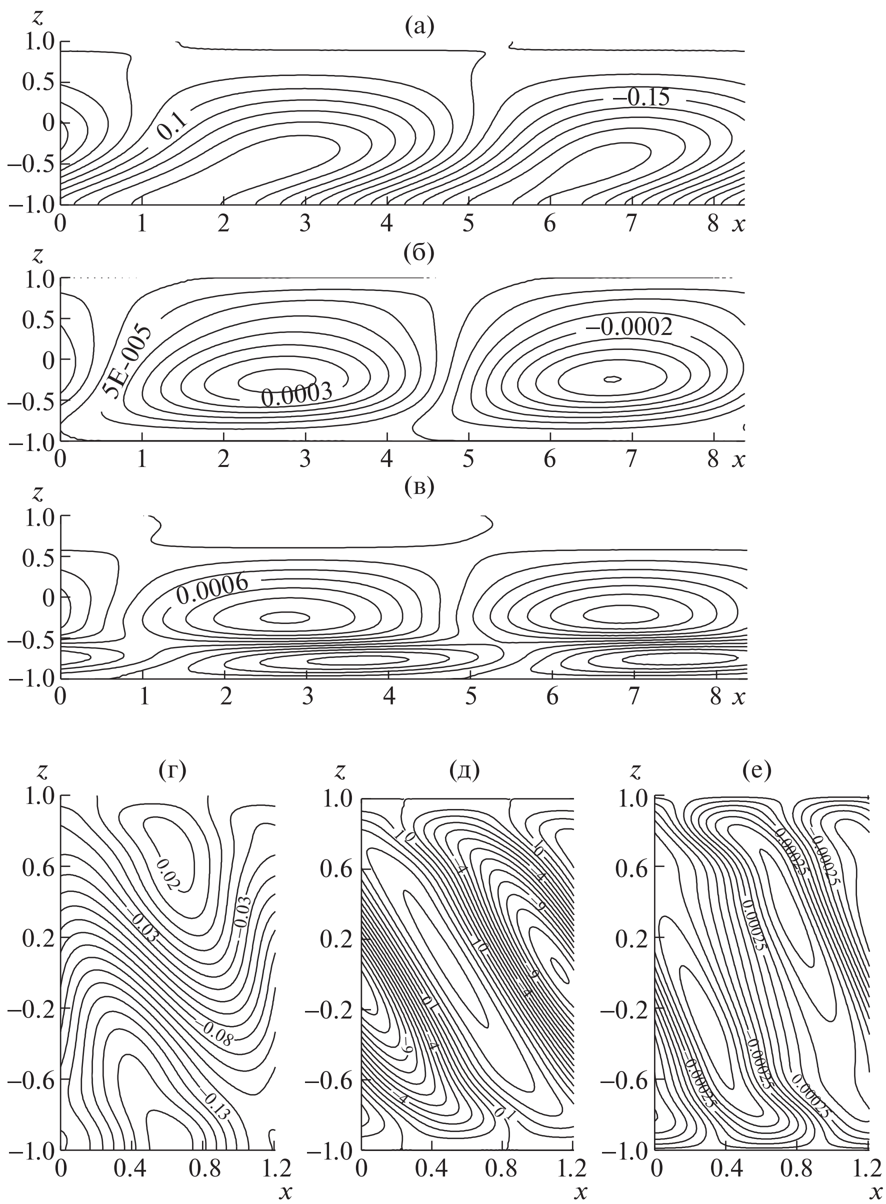

Рис. 5. Изолинии конечно-амплитудных возмущений $\theta(t,x,z)$ (а, г) и функции тока $\psi(t,x,z)$ (б) и $\psi(t,x,z)\times 10^5$ (д), второй компоненты скорости $\upsilon(t,x,z)$ (в, е): $Ta = 500$, $Gr = 20\,000$, $k_x = 0.75$ (а–в); $Ta = 10^5$, $Gr = 70\,000$, $k_x = 5.2$ (г–е).

где оператор Лапласа $\Delta = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Имеются все три компоненты возмущений скорости, которые зависят от времени t и двух пространственных координат y и z. $\Psi(t,y,z)$ – конечно-амплитудные возмущения функции тока, описывающие проекцию возмущений скорости на плоскость yOz, $U(t,y,z)$ – конечно-амплитудные возмущения первой компоненты скорости, описывающие проекцию возмущений скорости на плоскость xOz или xOy, $\Phi(t,y,z)$, $\theta(t,y,z)$ – конечно-амплитудные возмущения вихря скорости и температуры.

Нелинейная двумерная задача (3.5)–(3.8) решалась численно методом сеток, аналогично задачи (3.1)–(3.4). Основные расчеты проводились на сетке 101×200. Расчеты показали, что аналогично случаю винтовых возмущений, при всех рассматриваемых значениях числа Тейлора в областях с неустойчивой температурной стратификацией возникает система разнообразных бе-

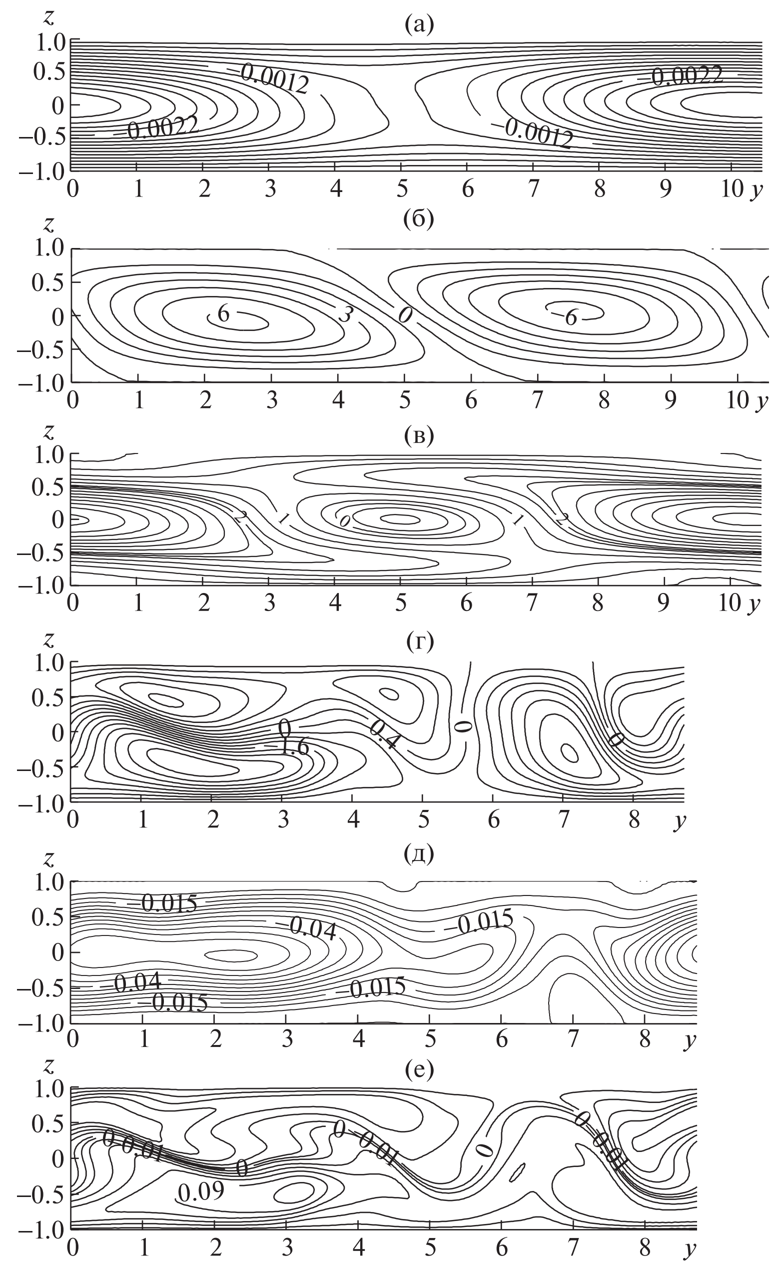

Рис. 6. Изолинии конечно-амплитудных возмущений температуры $\theta(t, y, z)$ (а—г), функции тока $\Psi(t, y, z) \times 10^6$ (б) и $\Psi(t, y, z)$ (д), первой компоненты скорости $U(t, y, z) \times 10^5$ (в) и $U(t, y, z)$ (е): $Ta = 10$, $Gr = 2000$, $k_y = 0.6$ (а—в); $Ta = 1000$, $Gr = 2500$, $k_y = 0.72$ (г—е).

гущих винтообразных вихрей. Для разных мод картина конечно-амплитудных возмущений имеет некоторые отличия.

На рис. 6а,б,в представлены изотермы возмущений температуры $\theta(t, y, z)$, изолинии возмущений функции тока $\Psi(t, y, z)$ и компоненты скорости $U(t, y, z)$ при $Ta = 10$ для числа Грасгофа $Gr = 2000$ выше критического. В середине вдоль слоя движется холодное пятно. Проекция движения, описанная функцией возмущения функции тока вблизи порога устойчивости, представляет собой цепочку вращающихся в разном направлении вихрей, занимающих весь слой, движущихся вдоль оси Oy. Одновременно x-я компонента возмущения скорости описывает в центре слоя вращение против и по часовой стрелке попарно движущихся вдоль оси Oy вихрей в плоскости xOy.

Для второй моды в качестве примера, иллюстрирующего поведения конечно-амплитудных возмущений, рассматривается случай, близкий к наименее устойчивой ситуации при $Ta = 1000$ и $Gr = 2500$ (рис. 6г,д,е). Поперек слоя формируется теплое и холодное пятно сложной конфигурации, которые движутся вдоль слоя. Одновременно там образуется перемещающийся вихрь, который вращается против часовой стрелки. Отметим, что с ростом числа Тейлора конфигурация движения усложняется, поперек слоя образуется пара спиралевидных вихрей. Что касается изолиний возмущения первой компоненты скорости, то можно заметить, что они описывают вращение жидкости поперек слоя в плоскости xOz.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленное новое точное решение уравнений Навье–Стокса, записанное в приближении Обербека–Буссинеска и описывающее адвективное течение несжимаемой жидкости во вращающемся горизонтальном слое с твердыми границами и условием теплоизоляции на нижней границе, меняет свой профиль с ростом числа Тейлора. С увеличением Ta течение перестраивается, что влияет на его устойчивость.

Под воздействием вращения обогащается картина устойчивости адвективного течения по сравнению с результатами работы [7], полученными при отсутствии вращения. В рамках линейной теории устойчивости показано, что на всем рассматриваемом диапазоне числа Тейлора для значений числа Грасгофа выше критического развивается колебательная неустойчивость. С ростом Ta последовательно меняются наиболее опасные колебательные моды. Винтовые возмущения дестабилизируют течение при $32.6 \le Ta \le 1300$, а спиральные возмущения делают течение менее устойчивым при $0 \le Ta \le 10$ и $400 \le Ta \le 923$. Спиральные возмущения являются более опасными, минимальное критическое число Грасгофа $Gr_k = 1163.9$ достигается при $Ta = 10$. При условии теплоизоляции на нижней границе слоя адвективное течение более устойчиво на нормальные возмущения, чем в случае, когда на нижней границе задано линейное распределение температуры [20].

Поведение конечно-амплитудных возмущений, возникающих в слое жидкости при значениях числа Грасгофа выше критического, исследовано конечно-разностным методом сеток на основе нелинейной задачи. За порогом устойчивости возникают нестационарные периодические конечно-амплитудные возмущения скорости и температуры в виде системы пространственных вихрей и температурных пятен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
2. *Остроумов Г.А.* Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.: Гостехтеориздат, 1952. 286 с. [*Ostroumov G.A.* Free convection under the condition of the internal problem. NASA TM, 1958].
3. *Андреев В.К.* Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения. Препринт СО РАН. ИВМ. № 1–10. Красноярск, 2010.
4. *Бирих Р.В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72. [*Birikh R.V.* Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. May 1966. V. 7. Issue 3. P. 43–44].
5. *Gershuni G.Z., Laure P., Myznikov V.M., Roux B., Zhukhovitsky E.M.* On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layers // Microgravity Q. 1992. V. 2. № 3. P. 141–151.
6. *Андреев В.К., Бекежанова В.Б.* Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // ПМТФ. 2013. № 2. С. 3–20. [*Andreev V.K., Bekezhanova V.B.* Stability of Non-Isothermal Fluids (Review) // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2013. № 2. P. 171–184].
7. *Hart J.* A note on the stability of low-Prandtle-number Hadley circulations // J. Fluid Mech. 1983. V. 132. P. 271–281.
8. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Перм. ун-т. Пермь, 2006. 155 с.
9. *Чикулаев Д.Г., Шварц К.Г.* Влияние вращения на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое жидкости с твердыми границами при малых числах Прандтля // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 2.

С. 48–56 [*Chikulaev D.G. and Shvarts K.G.* Effect of Rotation on the Stability of Advective Flow in a Horizontal Liquid Layer with Solid Boundaries at Small Prandtl Numbers // Fluid Dynamics. 2015. V. 50. № 2. P. 215–222].

10. *Shvarts K.G., Boudlal A.* Effect of rotation on stability of advective flow in horizontal liquid layer with a free upper boundary // Journal of Physics: Conference Series. 2010. V. 216. № 1. 012005.
11. *Han-Ming Li, Wan-Yuan Shi, Ermakov Michael K.* Thermocapillary flow instabilities of medium Prandtl number liquid in rotating annular pools // International Journal of Thermal Sciences. October 2017. V. 120. P. 233–243. https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2017.06.016
12. *Cheng-Zhi, Zhu Lan Peng* The effect of rotation on the thermal-solutal capillary-buoyancy flow in a shallow annular pool with various capillary ratios // International Journal of Thermal Sciences. May 2020. V. 152. Article 119482.
https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.119482
13. *Dong-Ming Mo*, *Sen Zhang, Li Zhang, Deng-Fang Ruan, You-Rong Li.* Effect of Heat Dissipation on Thermocapillary Convection of Low Prandtl Number Fluid in the Annular Pool Heated from Inner Cylinder // Microgravity Science and Technology. Published online: 29 April 2020. V. 32. P. 661–672.
https://doi.org/10.1007/s12217-020-09788-x
14. *C.Z. Zhu, J.J. Yu, Y.R. Li, L. Peng.* A numerical study on the thermal capillary-buoyancy convection of a binary mixture driven by rotation and surface-tension gradient in a shallow annular pool // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2021. V. 171. P. 121035.
https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.121035
15. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
16. *Boussinesq J.* Theorie analytique de la chaleut. T. 2. Paris, Gaufhier-Villars, 1903. 625 p.
17. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. СПб.: Изд-во “Лань”, 2008. 400 с.
18. *Шварц К.Г.* Конечно-амплитудные пространственные возмущения адвективного течения во вращающемся горизонтальном слое жидкости // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6. Спец. вып. Ч. 2. Тр. Междунар. конф. RDAMM-2001. С. 702–707.
19. *Тарунин Е.Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.
20. *Шварц К.Г.* Влияние вращения на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое жидкости при малом значении числа Прандтля // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 2. С. 29–38.