ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2022, № 1, с. 3–13

УДК 532.516

АКУСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ, ИНДУЦИРОВАННОЕ КОЛЕБАНИЕМ СТЕНКИ ПЛОСКОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА

© 2022 г. Д. А. Губайдуллин[a,*], П. П. Осипов[a,], Р. Р. Насыров[a,***]**

[a] *Федеральный исследовательский центр Казанский научный центр РАН, Институт механики и машиностроения, Казань, Россия*

**E-mail: gubaidullin@imm.knc.ru*

***E-mail: petro300@rambler.ru*

****E-mail: nasyrov.ravil@bk.ru*

Поступила в редакцию 30.03.2021 г.
После доработки 17.09.2021 г.
Принята к публикации 21.09.2021 г.

Рассмотрено движение вязкого сжимаемого газа в закрытом прямоугольном резонаторе, индуцированное гармоническим колебанием границы на первой резонансной частоте. Методом последовательных приближений исследуется двумерное акустическое течение в резонаторе произвольной ширины. Установлено существование акустического течения в виде четырех вихрей Рэлея и четырех вихрей Шлихтинга. Показано сходство акустических течений, возникающих при горизонтальных гармонических колебаниях каверны и при колебаниях стенки резонатора, что говорит о слабом влиянии способа генерации стоячей волны на картину акустического течения. Обнаружено, что по мере уменьшения ширины канала, размеры вихрей Шлихтинга увеличиваются по сравнению с размерами вихрей Рэлея. При ширине канала меньше шести толщин акустического пограничного слоя, вихри Рэлея исчезают и остаются только вихри Шлихтинга. Установлено, что в случае колеблющейся каверны центры вихрей Рэлея и Шлихтинга лежат в одном поперечном сечении, а в случае резонатора с колеблющейся границей центры вихрей Шлихтинга смещены в сторону вертикальных стенок.

Ключевые слова: акустические течения, резонатор, вихри Рэлея, вихри Шлихтинга

DOI: 10.31857/S0568528122010054

В волновых полях в вязкой жидкости при определенных условиях формируются акустические течения. Впервые задача о возникновении акустического течения, создаваемого плоской стоячей волной в двумерном канале произвольной ширины, аналитически исследована в [1]. В [2, 3] предложены различные модификации решения [1], но основное внимание уделялось течению за пределами пограничного слоя [3, 4]. В [5] показано, что внутри пограничного слоя возникают вихри Шлихтинга, направление вращения которых противоположно направлению вращения внешних вихрей Рэлея. Теоретический и численный анализ акустических течений, создаваемых стоячей волной вдоль непроницаемой стенки в полубесконечной области, проведен в [6–8].

В работе [9] получено аналитическое решение редуцированных уравнений Навье–Стокса в неинерциальной системе отсчета, связанной с прямоугольной вибрирующей каверной, и рассчитано акустическое течение, возникающее в одномерной стоячей волне давления. В [10] численно изучено акустическое течение в неподвижном двумерном прямоугольном резонаторе на основе полных уравнений Навье–Стокса для сжимаемого вязкого газа при гармоническом колебании левой границы. Показано, что в резонаторе образуется акустическое течение в виде вторичных вихрей Шлихтинга и Рэлея. Приведено сравнение и установлено хорошее согласование эпюр скорости акустического течения, полученных на основе аналитического решения редуцированных [9] и численного решения полных [10] уравнений Навье–Стокса. Несмотря на хорошее согласие результатов этих работ, отметим, что в них рассматриваются краевые задачи с различными граничными условиями и уравнениями. Поэтому целью данной работы является получение аналитического решения редуцированных уравнений Навье–Стокса для граничных условий, используемых в [10].

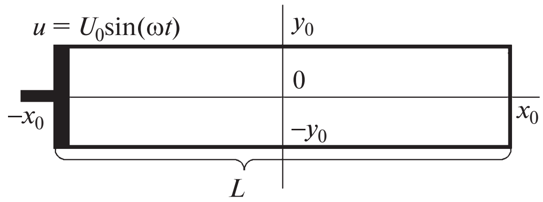

Рис. 1. Прямоугольный резонатор.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим закрытый прямоугольный резонатор длины $L = 2x_0$, занимающий в пространстве область $-x_0 \le x \le x_0$, $-y_0 \le y \le y_0$ (рис. 1). Акустическое течение в резонаторе возбуждается колебаниями левой границы. Уравнение неразрывности и редуцированные уравнения Навье–Стокса можно записать, следуя работе [9]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} = 0$$
$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1.1)$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Эта система из трех уравнений связывает четыре величины ρ, p, u, v. Для ее замыкания используется адиабата Пуассона $\rho/\rho_0 = (p/p_0)^{1/\gamma}$.

Заметим, что вместо уравнения импульса поперек канала используется условие равенства нулю поперечного градиента давления. При этом поперечная компонента скорости определяется из уравнения неразрывности. Подробное обоснование этого подхода дано в [11], где введен параметр порядка малости $\eta = y_0/L$, и получены оценки

$$\frac{v}{u} = O(\eta), \quad \frac{\partial p/\partial y}{\partial p/\partial x} = O(\eta)$$

которые указывают на то, что в узких длинных каналах движение жидкости и градиенты давления направлены преимущественно вдоль оси x.

Далее рассмотрим периодическое решение (1.1) при граничных условиях

$$\frac{1}{2y_0}\int_{-y_0}^{y_0} u(-x_0, y, t)dy = U_0 e^{i\omega t}$$
$$u(x_0, y, t) = 0 \qquad (1.2)$$
$$u(x, -y_0, t) = 0, \quad v(x, -y_0, t) = 0$$
$$u(x, y_0, t) = 0, \quad v(x, y_0, t) = 0$$

2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Задача (1.1)–(1.2) может быть решена методом последовательных приближений в виде суммы возмущений первого и второго порядка малости [12]

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2, \quad p = p_0 + p_1 + p_2, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

Для политропного газа с точностью до малых третьего порядка можно записать разложение

$$p = p_0 + c_0^2(\rho - \rho_0) + \frac{(\gamma - 1)c_0^2}{2\rho_0}(\rho - \rho_0)^2 = p_0 + c_0^2\rho_1 + \frac{(\gamma - 1)c_0^2}{2\rho_0}\rho_1^2$$

откуда $p_1 = c_0^2\rho_1$, $p_2 = \dfrac{(\gamma - 1)c_0^2}{2\rho_0}\rho_1^2 + \rho_2 c_0^2 = \dfrac{\gamma - 1}{2\rho_0 c_0^2}p_1^2 + \rho_2 c_0^2$

Система (1.1) с точностью до малых третьего порядка примет вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial(\rho_1 + \rho_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_0 + \rho_1 + \rho_2)(u_1 + u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0 + \rho_1 + \rho_2)(v_1 + v_2)}{\partial y} = 0 \\
(\rho_0 + \rho_1 + \rho_2)\left(\frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial t} + (u_1 + u_2)\frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial x} + (v_1 + v_2)\frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial y}\right) = \\
= -\frac{\partial(p_1 + p_2)}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2(u_1 + u_2)}{\partial y^2} \\
\frac{\partial(p_1 + p_2)}{\partial y} = 0
\end{gathered} \tag{2.1}$$

2.1. Первое приближение

Для возмущения первого порядка малости из (2.1) можно записать систему

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \rho_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = 0, \quad \rho_0\frac{\partial u_1}{\partial t} - \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = 0, \quad p_1 = \rho_1 c_0^2$$

Решение этой системы ищется в комплексном виде

$$u_1 = \mathrm{Im}[\tilde{u}_1 e^{i\omega t}], \quad v_1 = \mathrm{Im}[\tilde{v}_1 e^{i\omega t}], \quad p_1 = \mathrm{Im}[\tilde{p}_1 e^{i\omega t}] \tag{2.2}$$

для граничных условий (1.2).

Вводя комплексные амплитуды, решение в первом приближении примет вид

$$\tilde{u}_1 = u_0(x)Y_x(y), \quad \tilde{v}_1 = -fy_0\frac{du_0}{dx}(x)Y_y(y), \quad \tilde{p}_1 = -(1 - f)\frac{\rho_0 c_0^2}{i\omega}\frac{du_0}{dx}$$

где

$$u_0(x) = \frac{0.5U_0}{1 - f}\left(\frac{\mathrm{ch}\alpha x}{\mathrm{ch}\alpha x_0} - \frac{\mathrm{sh}\alpha x}{\mathrm{sh}\alpha x_0}\right), \quad Y_x(y) = 1 - \frac{\mathrm{ch}\beta y}{\mathrm{ch}\beta y_0}, \quad Y_y(y) = \frac{y}{y_0} - \frac{\mathrm{sh}\beta y}{\mathrm{sh}\beta y_0}$$

$$\alpha = \frac{i\omega/c_0}{\sqrt{1 - f}}, \quad f = \frac{\mathrm{th}\beta y_0}{\beta y_0}, \quad \beta = \frac{1 + i}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

2.2. Второе приближение и акустическое течение

Выделение возмущения второго порядка малости из (2.1) дает систему

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\rho_2}{\partial t} + \rho_0\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial\rho_1 u_1}{\partial x} + \frac{\partial\rho_1 v_1}{\partial y}\right) \\
\rho_0\frac{\partial u_2}{\partial t} - \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial p_2}{\partial x} = -\frac{\partial\rho_1 u_1}{\partial t} - \rho_0\left(\frac{\partial u_1^2}{\partial x} + \frac{\partial u_1 v_1}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial p_2}{\partial y} = 0
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Осреднение системы (2.3) по периоду приводит к системе

$$\frac{\partial\overline{\rho_0 u_2 + \rho_1 u_1}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{\rho_0 v_2 + \rho_1 v_1}}{\partial y} = 0$$

$$\mu\frac{\partial^2 \overline{u}_2}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{p}_2}{\partial x} = \rho_0\left(\frac{\partial \overline{u_1^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u_1 v_1}}{\partial y}\right) \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \overline{p}_2}{\partial y} = 0$$

Второе уравнение может быть представлено в виде

$$\mu\frac{\partial^2 \overline{u}_2}{\partial y^2} = \frac{d\overline{p}_2}{dx} - F(x,y) \tag{2.5}$$

$$\text{где}\quad F(x,y) = -\rho_0\left(\frac{\partial \overline{u_1^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u_1 v_1}}{\partial y}\right) \tag{2.6}$$

Используя в (2.6) связь среднего по периоду произведения двух гармоник с их комплексными амплитудами $\overline{u_1 v_1} = 0.5\mathrm{Re}[\tilde{u}_1\tilde{v}_1^*]$, $\overline{u_1^2} = 0.5\mathrm{Re}[\tilde{u}_1\tilde{u}_1^*]$, можно записать

$$\frac{F(x,y)}{\mu} = -\frac{\rho_0}{2\mu}\mathrm{Re}\left[\frac{\partial(\tilde{u}_1\tilde{u}_1^*)}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{u}_1\tilde{v}_1^*)}{\partial y}\right] = -V_0\mathrm{Re}\left[G(x)\left(\frac{Y_x Y_x^*}{\delta^2} - \frac{y_0 f^*}{2\delta^2}\frac{d(Y_x Y_y^*)}{dy}\right)\right] \tag{2.7}$$

где $V_0 = \dfrac{|U_0|^2\delta^2}{x_0\nu} = \dfrac{2|U_0|^2}{x_0\omega}$, $G(x) = \dfrac{x_0}{|U_0|^2}\tilde{u}_0\dfrac{d\tilde{u}_0^*}{dx}$. Интегрирование (2.5) дважды по y приведет к уравнению

$$\mu\overline{u}_2 = \frac{y^2}{2}\frac{d\overline{p}_2}{dx} - \int\int F(x,y)dydy + \mu C_1(x)y + \mu C_0(x)$$

где $C_0(x)$, $C_1(x)$ – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

В силу симметрии задачи $\overline{u}_2$ является четной функцией от y, откуда $C_1(x) = 0$ и окончательно

$$\overline{u}_2 = \frac{y^2}{2\mu}\frac{d\overline{p}_2}{dx} - \frac{1}{\mu}\int\int F(x,y)dydy + C_0(x)$$

Двойной интеграл от (2.7) записан в виде

$$\frac{1}{\mu}\int\int F(x,y)dydy = -V_0\mathrm{Re}\left[G(x)\left(H_1 + iH_2\right)\right] \tag{2.8}$$

где $H_1 = \dfrac{1}{\delta^2}\left(\iint Y_x Y_x^* dydy - \dfrac{y^2}{2}\right)$, $H_2 = \dfrac{1}{\delta^2}\left(\int Y_x Y_y^* dy + \dfrac{if^* y^2}{4}\right)$

Используя соотношения

$$\beta^2 + \beta^{*2} = 0,\quad \beta^2 - \beta^{*2} = \frac{4i}{\delta^2},\quad \mathrm{Re}[iz] = -\mathrm{Im}[z],\quad \mathrm{sh}\,iz = i\sin z,\quad \mathrm{ch}\,iz = \cos z$$

получаем

$$H_1 = \frac{\mathrm{ch}(2y/\delta) - \cos(2y/\delta)}{8|\mathrm{ch}\beta y_0|^2} - \mathrm{Im}\frac{\mathrm{ch}\beta y}{\mathrm{ch}\beta y_0}$$

$$H_2 = f^*\frac{\mathrm{ch}\beta y - \beta y\,\mathrm{sh}\beta y}{4\mathrm{ch}\beta y_0} + \frac{1}{4}\frac{\mathrm{ch}\beta^* y}{\mathrm{ch}\beta^* y_0} - \frac{\mathrm{ch}(2y/\delta) + i\cos(2y/\delta)}{8\beta\delta|\mathrm{ch}\beta y_0|^2}$$

Для средней скорости

$$\bar{u}_2 = V(G,y) + C_2(x)y^2 + \bar{u}_2(x,0)$$

где $V(G,y) = V_0\mathrm{Re}[G(H_1(y) + iH_2(y))]$, а в $C_2(x)$ войдут коэффициенты при исключенных из (2.8) членов пропорциональных y^2

$$C_2(x) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{d\bar{p}_2}{dx} + \frac{\rho_0\left|U_0^2\right|}{2x_0}\mathrm{Re}\left[(2 - f^*)G(x)\right]\right)$$

Это соотношение необходимо для определения давления $\bar{p}_2$.

2.3. Средняя массовая скорость

Эту величину определяют как

$$\bar{\mathbf{u}}_2^M = \frac{\overline{\rho\mathbf{u}}}{\bar{\rho}} \approx \frac{\overline{(\rho_0 + \rho_1)(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)}}{\overline{\rho_0 + \rho_1}} \approx \bar{\mathbf{u}}_2 + \frac{\overline{\rho_1\mathbf{u}_1}}{\rho_0}$$

Первое соотношение (2.4) показывает, что средняя массовая скорость соленоидальна, т.е. $\mathrm{div}\bar{\mathbf{u}}_2^M = 0$. Она связана с комплексными амплитудами $\bar{\mathbf{u}}_2^M = \bar{\mathbf{u}}_2 + \dfrac{\mathrm{Re}[\tilde{p}_1\tilde{\mathbf{u}}_1^*]}{2\rho_0 c_0^2}$, откуда в проекции на ось x получаем

$$\begin{aligned}\bar{u}_2^M &= \bar{u}_2(x,y) + \frac{\mathrm{Re}[\tilde{p}_1\tilde{u}_1^*]}{2\rho_0 c_0^2} = \bar{u}_2(x,y) + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2}\mathrm{Re}\left[-(1-f)\frac{\rho_0 c_0^2}{i\omega}\frac{d\tilde{u}_0(x)}{dx}\tilde{u}_0^*(x)Y_x^*(y)\right] = \\ &= \bar{u}_2(x,y) + V_0\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{4}i(1-f)G^*(x)Y_x^*(y)\right]\end{aligned} \quad (2.9)$$

В силу соленоидальности поля массовой скорости введена функция тока ψ так, что

$$\bar{u}_2^M = \partial\psi/\partial y, \quad \bar{v}_2^M = -\partial\psi/\partial x \quad (2.10)$$

Проинтегрировав уравнение (2.9) по y, получится функция тока в виде

$$\psi(G,y) = \theta(G,y) + A_3(G)\frac{y^3}{y_0^3} + A_1(G)\frac{y}{y_0} \quad (2.11)$$

где $\theta(G,y) = V_0\delta\,\mathrm{Re}\left[G(x)\{H_3(y) + iH_4(y)\} + \frac{1}{4}i(1-f)G^*(x)H_5(y)\right]$, $H_{3,4} = \delta^{-1}\int H_{1,2}dy$, $H_5 = \delta^{-1}\int Y_x^* dy$.

Коэффициенты четных степеней y приняты равными нулю, потому что ψ должна быть нечетной функцией от y. Из соотношений (2.9), (2.11) получено

$$A_3(x) = \frac{C_2(x)}{3}y_0^3, \quad A_1(x) = C_0(x)yy_0 + V_0\mathrm{Re}\left[\frac{1}{4}i(1-f)G^*(x)y\right]y_0$$

$$H_3 = \frac{\mathrm{sh}(2y/\delta) - \sin(2y/\delta)}{16|\mathrm{ch}\beta y_0|^2} - \mathrm{Im}\frac{\mathrm{sh}\beta y}{\beta\delta\mathrm{ch}\beta y_0}$$

$$H_4 = f^*\frac{2\mathrm{sh}\beta y - \beta y\mathrm{ch}\beta y}{4\beta\delta\mathrm{ch}\beta y_0} + \frac{i}{4\beta\delta}\frac{\mathrm{sh}\beta^* y}{\mathrm{ch}\beta^* y_0} - \frac{\mathrm{sh}(2y/\delta) + i\sin(2y/\delta)}{16\beta\delta|\mathrm{ch}\beta y_0|^2}$$

$$H_5 = \frac{y}{\delta} - \frac{i}{\beta\delta}\frac{\mathrm{sh}\beta^* y}{\mathrm{ch}\beta^* y_0}$$

Из (2.9), (2.10) выражена средняя продольная массовая скорость

$$\bar{u}_2^M(G,y) = V(G,y) + V_0\mathrm{Re}\left[\frac{1}{4}i(1-f)G^*Y_x^*\right] + \frac{1}{y_0}\left[3A_3(G)\frac{y^2}{y_0^2} + A_1(G)\right]$$

Так как $Y_x^*(y_0) = Y_x(y_0) = 0$, то неизвестные функции $A_1(G)$ и $A_3(G)$ определяются условиями прилипания и не протекания, соответственно

$$\overline{u}_2^M(G, y_0) = 0:\ V(G, y_0) + \frac{3}{y_0}A_3(G) + \frac{1}{y_0}A_1(G) = 0$$

$$\psi(G, y_0) = 0:\ \theta(G, y_0) + A_3(G) + A_1(G) = 0$$

откуда

$$\begin{cases} A_1(G) = -\dfrac{3}{2}\theta(G, y_0) + \dfrac{1}{2}y_0V(G, y_0) \\ A_3(G) = \dfrac{1}{2}\theta(G, y_0) - \dfrac{1}{2}y_0V(G, y_0) \end{cases}$$

Поперечная компонента средней массовой скорости находится дифференцированием (2.11). В силу линейной зависимости величин θ, A_3, A_1 от G получено

$$\overline{v}_2^M(G, y) = -\left(\theta(G', y) + A_3(G')\frac{y^3}{y_0^3} + A_1(G')\frac{y}{y_0}\right)$$

где $G'(x) = \dfrac{dG(x)}{dx}$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 2 представлены продольная и поперечная составляющие безразмерной скорости первого приближения (2.2) на левой границе резонатора. Ввиду симметричности компоненты скорости u и антисимметричности компоненты v представлены эпюры только для верхней полуплоскости резонатора. Графики соответствуют различным фазам периода T с шагом $T/8$. Ввиду условия прилипания скорость на вертикальной границе равна нулю. Видно, что продольная компонента скорости на левой границе почти всюду постоянна (не зависит от y), но сильно меняется в вязком пограничном слое, стремясь к нулю на верхней и нижней стенках. В отличие от продольной компоненты скорости, поперечная составляющая изменяется линейно по y почти всюду кроме вязкого пограничного слоя. Заметим, что эти эпюры соответствуют предположению об одномерном характере поля давления, т.е. $\partial p/\partial y = 0$.

На рис. 3 представлены продольная и поперечная составляющие средней массовой скорости течения для параметров, представленных в статье [10]. В качестве масштаба скоростей использована скорость Рэлея $u_R = \dfrac{3}{16}\dfrac{U_m^2}{c_0}$ – характерная скорость акустического течения, где U_m – максимальная скорость акустического течения. Здесь сплошной линией изображены эпюры средней скорости, рассчитанные в [10] для резонатора с колеблющейся левой границей. Точками изображены результаты, рассчитанные в [9] для каверны, совершающей продольные колебания. Пунктирной линией изображены эпюры скоростей, рассчитанные для резонатора с колеблющейся левой стенкой. Видно, что они хорошо согласуются с результатами для колеблющейся каверны.

На рис. 4 представлены линии тока акустического течения в виде четырех вихрей Рэлея и четырех вихрей Шлихтинга. Видно сходство акустических течений, возникающих при горизонтальных колебаниях каверны (а) и при колебаниях левой стенки резонатора (б). Однако, в отличие от случая колеблющейся каверны, акустическое течение, индуцированное колебанием левой стенки, имеет перетоки вблизи подвижной стенки. В случае колеблющейся каверны центры вихрей Рэлея и Шлихтинга лежат в одном поперечном сечении, а в случае резонатора с колеблющейся стенкой эти центры не лежат на одной прямой, причем центры вихрей Шлихтинга смещены в сторону боковых границ.

Хотя частота возбуждения ω в полученном решении является произвольной, принято рассматривать возбуждение на самой низкой резонансной частоте системы, которую обозначим ω_1. Метод определения ω_1 как функции y_0/δ состоит в том, чтобы найти значение ω, при котором продольная компонента скорости акустического течения является наибольшей в центре резонатора. Для оцен-

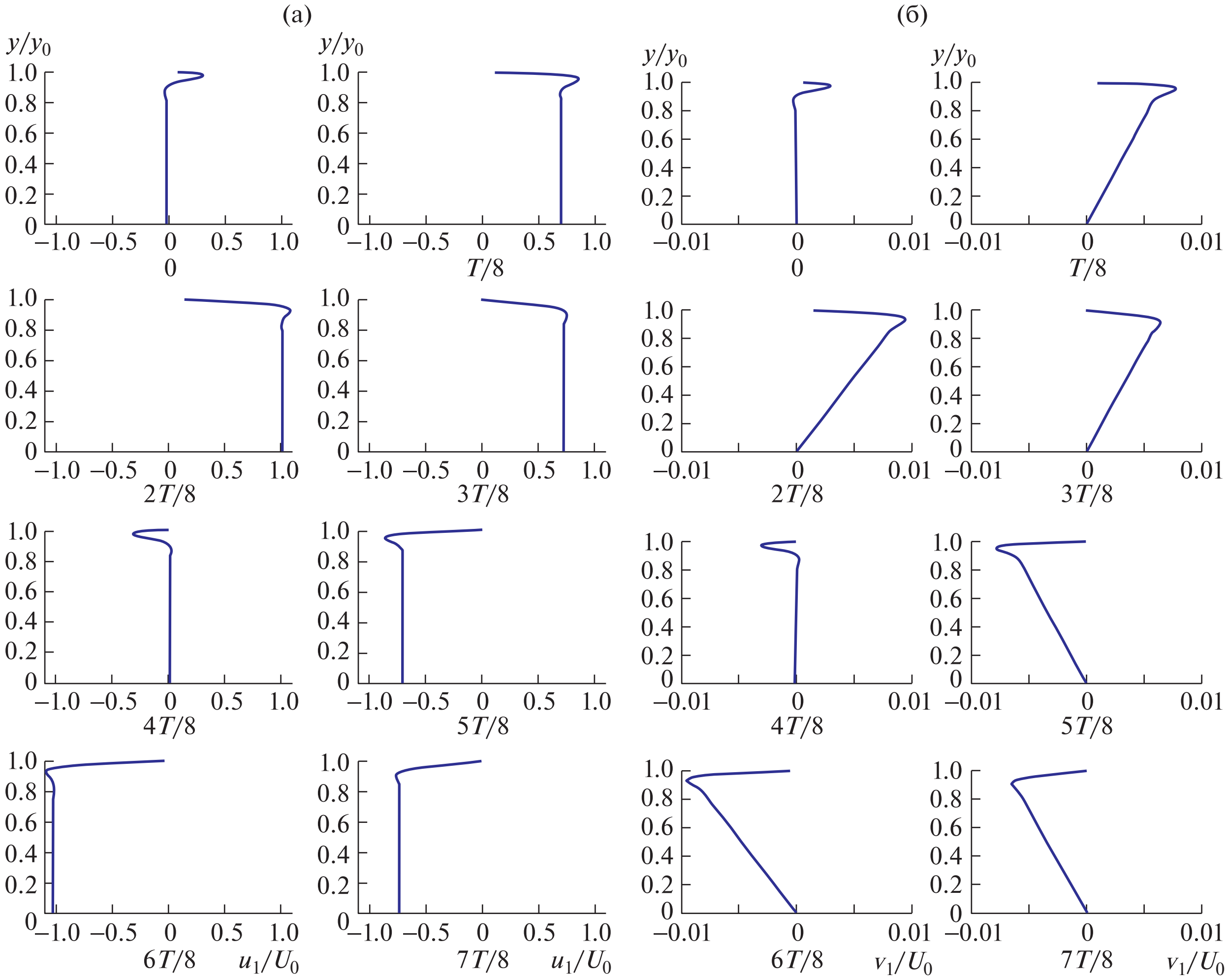

Рис. 2. Продольная (а) и поперечная (б) составляющие скорости первого приближения.

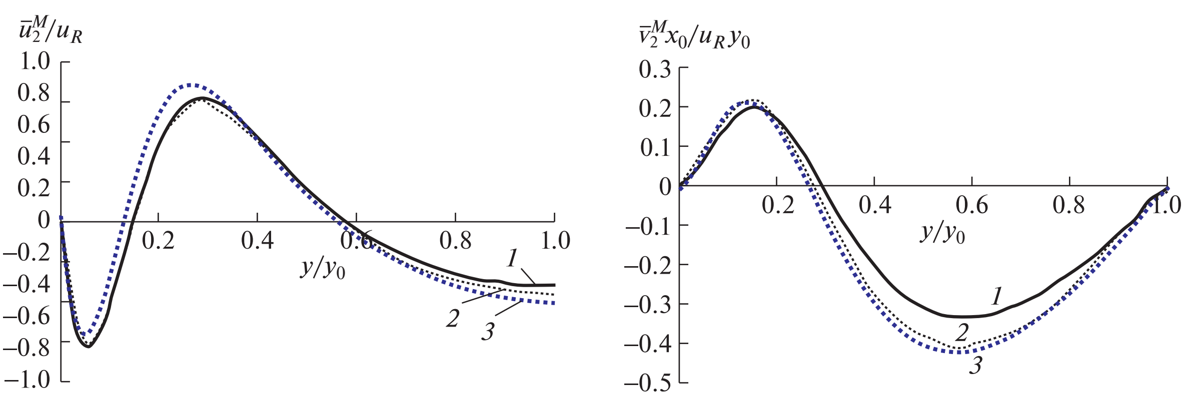

Рис. 3. Продольная (а) и поперечная (б) составляющие средней массовой скорости: *1* – результаты [10]; *2* – результаты [9]; 3 – настоящая работа.

ки комплексной амплитуды продольной компоненты скорости в центре резонатора $|\tilde{u}_x(0,0)|$ использовано выражение комплексной амплитуды продольной компоненты скорости в первом приближении $\tilde{u}(x,y) = \dfrac{0.5U_0}{1-f}\left(\dfrac{\operatorname{ch}\alpha x}{\operatorname{ch}\alpha x_0} - \dfrac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha x_0}\right)\left(1 - \dfrac{\operatorname{ch}\beta y}{\operatorname{ch}\beta y_0}\right)$. Пусть $\omega_0 = \pi c_0/L$ – фундаментальная резо-

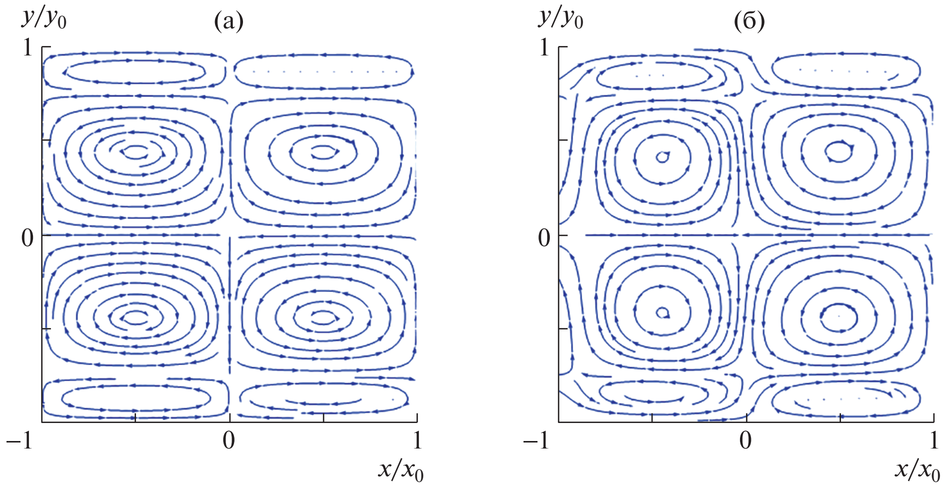

Рис. 4. Линии тока акустического течения: а – колеблющаяся каверна; б – колеблющаяся левая граница.

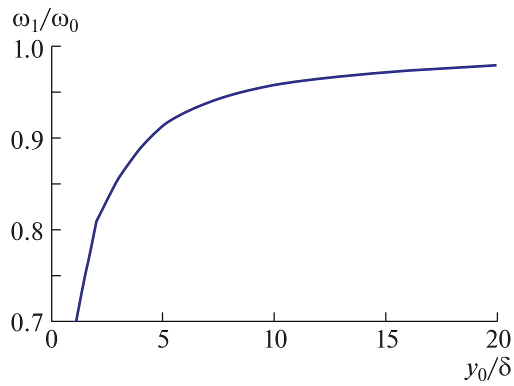

Рис. 5. Резонансная частота как функция ширины канала.

нансная частота. Значения ω_1/ω_0, полученные таким образом, показаны на рис. 5. При $\omega_1 = \omega_0$ решение можно построить как функции от x/x_0 и y/y_0 в зависимости от единственного параметра y_0/δ.

На рис. 6а и б первые столбцы представляют линии тока; вторые столбцы – распределения продольной компоненты скорости в сечении $x/x_0 = 0.5$ (на рис. 6б сплошная линия – средняя массовая скорость, пунктирная линия – средняя скорость); третьи столбцы – распределения поперечной составляющей средней массовой скорости в сечении $x/x_0 = 0$. Видно сходство акустических течений, возникающих при горизонтальных колебаниях каверны (рис. 6а) и при колебаниях левой стенки резонатора (рис. 6б), а также хорошее согласование средних массовых скоростей. На рис. 6б в столбце 2 представлен график продольной массовой и средней скорости. Они хорошо согласуются при толщине резонатора более десяти толщин акустического пограничного слоя $y_0 \geq 10\delta$. В случае, когда ширина резонатора менее шести толщин вязкого пограничного слоя $y_0 < 6\delta$, акустическое течение представлено только вихрями Шлихтинга, вихри Рэлея не образуются.

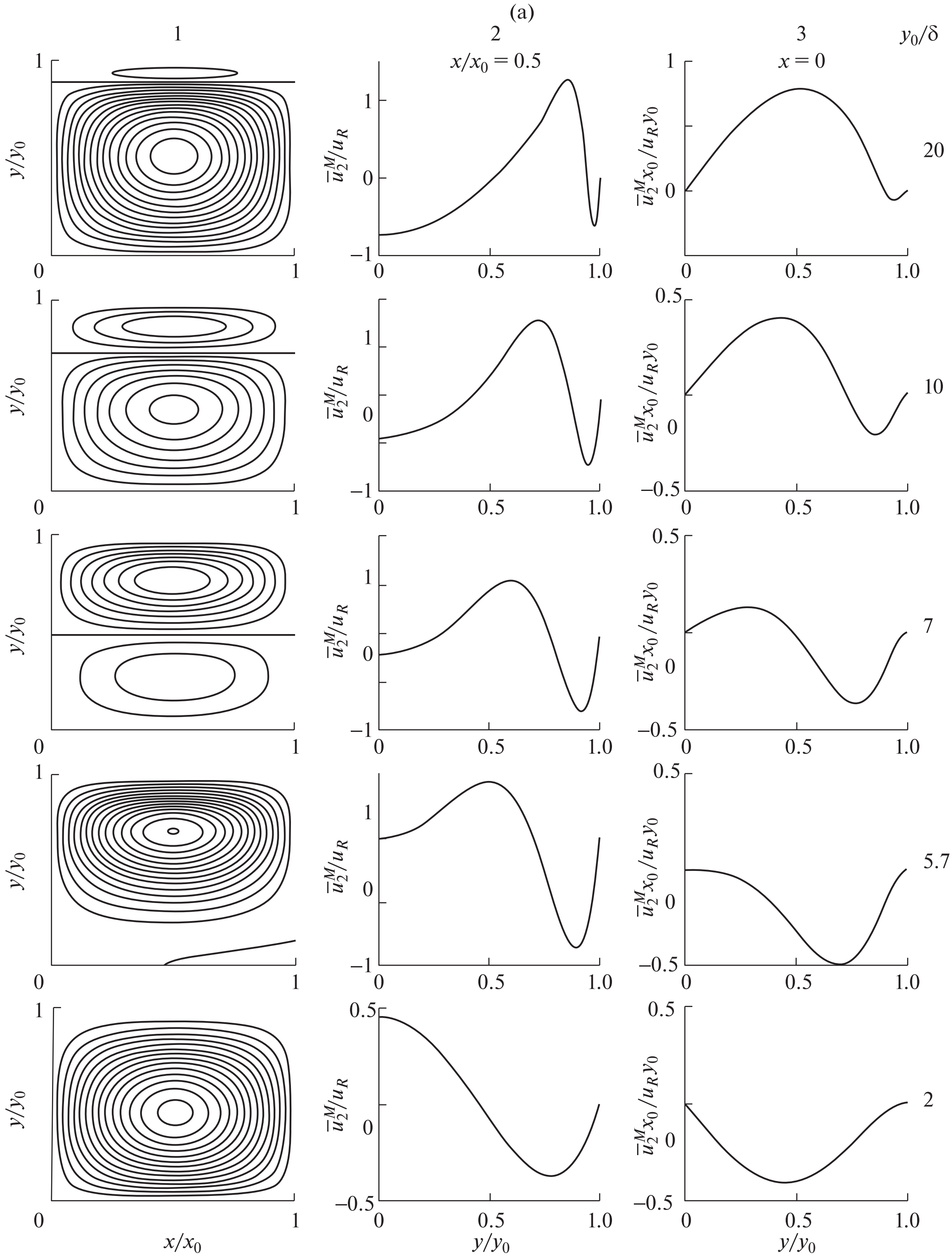

Рис. 6. Параметры акустического течения: а – [9]; б – результаты настоящей работы; *1* –линии тока; *2* – распределения продольной компоненты скорости в сечении $x/x_0 = 0.5$ (сплошная линия – средняя массовая скорость, пунктирная линия – средняя скорость); *3* – распределения поперечной составляющей средней массовой скорости в сечении $x/x_0 = 0$.

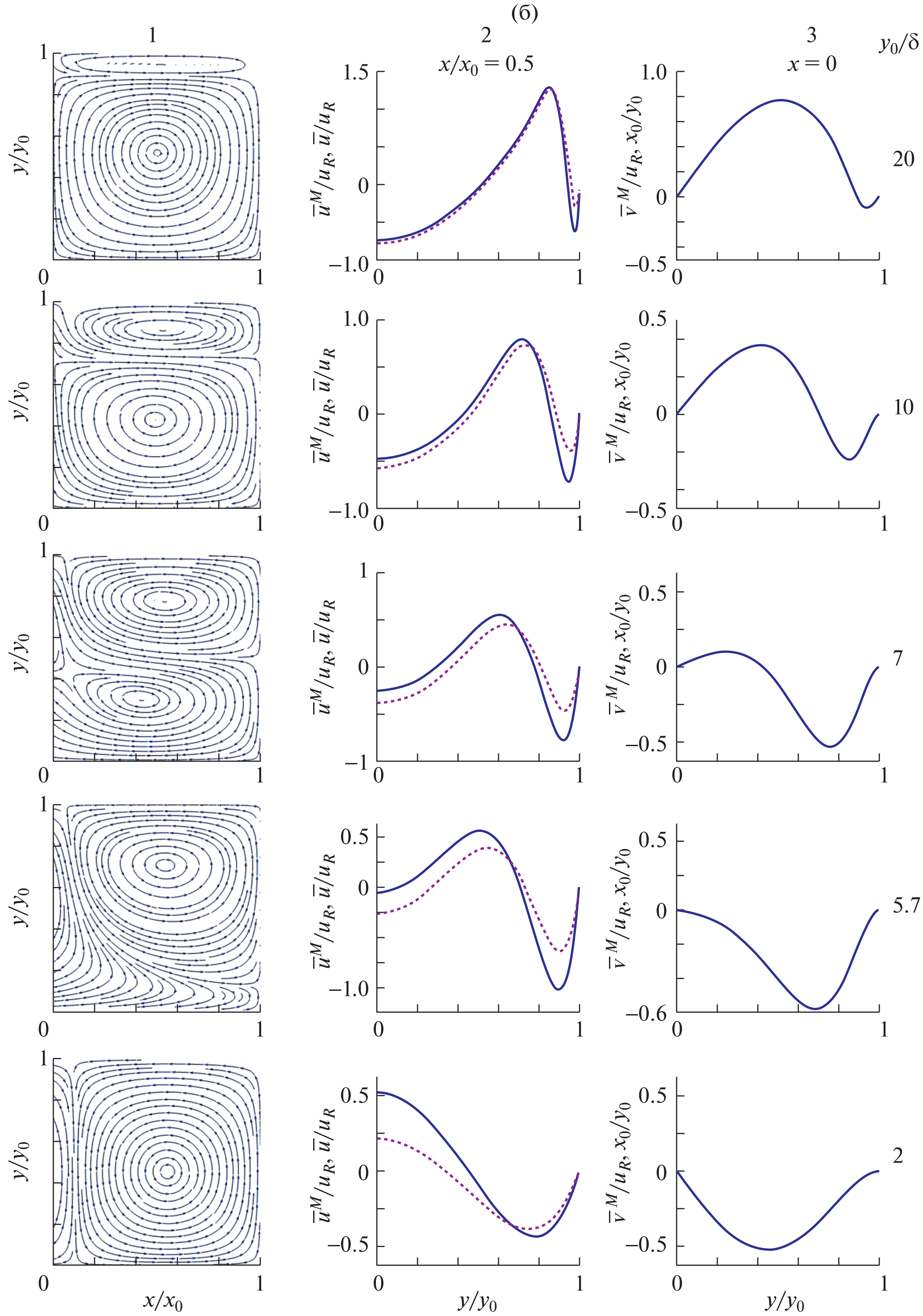

Рис. 6. Окончание.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученное приближенное решение задачи об акустическом течении в прямоугольном резонаторе, возбужденном колебанием левой границы на резонансной частоте, отличается от решения [9]. Однако сравнение решений показывает хорошее согласие между ними за исключением области вблизи колеблющейся стенки, в частности в каверне и в резонаторе образуются вихри Рэлея и Шлихтинга. Условием применимости полученного решения является малость толщины пограничного слоя по сравнению с длиной акустической волны, а мгновенная скорость частиц газа пренебрежимо мала по сравнению со скоростью звука. Используемая модель не учитывает конвективное ускорение частиц газа и образование периодической ударной волны при больших амплитудах колебаний. Установлено сходство акустических течений, возникающих при горизонтальных гармонических колебаниях каверны и при колебаниях левой стенки резонатора, что говорит о малом влиянии способа генерации стоячей волны на паттерны акустических течений. В случае колеблющейся каверны центры вихрей Рэлея и Шлихтинга лежат в одном поперечном сечении, а в случае резонатора с колеблющейся границей центры вихрей Шлихтинга смещены в сторону боковых стенок. Обнаружено существование перетоков вблизи колеблющейся стенки резонатора, которое обусловлено постановкой граничных условий.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20070).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lord Rayleigh (Srutt J.W.)* On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems // Philos. Trans. R. Soc. London. 1884. V. 175. Sec. 3. P. 1–21. https://doi.org/10.1098/rstl.1884.0002
2. *Westervelt P.J.* The theory of steady rotational flow generated by a sound field // J. Acoust. Soc. Am. 1953. V. 25. P. 60–67. https://doi.org/10.1121/1.1907009
3. *Nyborg W.L.* Acoustic streaming // Physical Acoustics. 1965. V. 2. Part B. Chap. 11. P. 290–295. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-395662-0.50015-1
4. *Nyborg W.L.* Acoustic streaming // Nonlinear Acoustics. 1998. Chap. 7. Sec. 3.3.
5. *Schlichting H., Gersten K.* Boundary-Layer Theory. New York: Springer Inc. 2017. 814 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-52919-5
6. *Zarembo L.K.* Acoustic streaming // High-Intensity Ultrasonic Fields. 1971. Part III. P. 135–199. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-5408-7_3
7. *Rudenko O.V., Soluyan S.I.* Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics. New York: Plenum. 1977. P. 206–210. https://doi.org/10.1002/jcu.1870060222
8. *Gubaidullin D.A., Osipov P.P., Nasyrov R.R.* Numerical simulation of Schlichting streaming induced by standing wave in rectangular enclosure // Journal of Physics: Conf. ser. 2014. V. 567. № 12017. 8 p. https://doi.org/10.1088/1742-6596/567/1/012017
9. *Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Zabolotskaya E.A.* Acoustic streaming generated by standing waves in two-dimensional channels of arbitrary width // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 113. P. 153–160. https://doi.org/10.1121/1.1528928
10. *Aktas M.K., Farouk B.* Numerical simulation of acoustic streaming generated by finite-amplitude resonant oscillations in an enclosure // J. Acoust. Soc. Am. 2004. V. 116. № 5. P. 2822–2831. https://doi.org/10.1121/1.1795332
11. *Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Zabolotskaya E.A.* Nonlinear two-dimensional model for thermoacoustic engines // J. Acoust. Soc. Am. 2002. V. 111. P. 2076–2086. https://doi.org/10.1121/1.1467675
12. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.