

УДК 533.6.011

ОБЛАСТИ ПОНИЖЕННОЙ ПОЛНОЙ ЭНТАЛЬПИИ В БЛИЖНЕМ СЛЕДЕ ЗА ТЕЛОМ В ПОТОКЕ ВЯЗКОГО ГАЗА

© 2022 г. А. И. Алексюк^{a,b,c,*}

^a Манчестерский университет, Математический факультет, Манчестер, Великобритания

^b МГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

^c Институт водных проблем РАН, Москва, Россия

*E-mail: andrey.aleksyuk@manchester.ac.uk

Поступила в редакцию 13.09.2021 г.

После доработки 21.09.2021 г.

Принята к публикации 21.09.2021 г.

Изучается влияние формы обтекаемого тела на степень охлаждения (снижение температуры торможения) газа в областях пониженной полной энтальпии в следе. Течения моделируются путем численного решения уравнений Навье–Стокса для задач двумерного обтекания теплоизолированных тел потоком вязкого совершенного газа при числах Рейнольдса $Re = 1000$ и Маха $M_\infty = 0.4$. В качестве обтекаемых тел рассматриваются цилиндры эллиптического сечения и пара круговых цилиндров, расположенных поперек потока. Обсуждается точность результатов упрощенной модели для описания этого явления на основе поля скоростей в развитом следе. Приводятся примеры, показывающие, что неучет перераспределения полной энтальпии при вихреобразовании в подобных моделях может приводить к значительным расхождениям с данными численных расчетов в вихревых ядрах.

Ключевые слова: полная энтальпия, вязкий совершенный газ, вихревой след, эллиптический цилиндр

DOI: 10.31857/S0568528122010017

Интерес к процессу перераспределения полной энтальпии i_0 в потоках сжимаемого газа, помимо фундаментального, связан с устройствами, способными разделять поток газа на холодный и горячий (с низкой и высокой температурой торможения) без механической работы или внешнего теплоподвода (например, вихревая труба Ранка–Хилша и труба Леонтьева) [1, 2]. В настоящее время исследуются различные методы повышения эффективности таких устройств [3–5]. В связи с этим актуальным является изучение процесса разделения энергии (перераспределения полной энтальпии) в канонических течениях. Один из примеров таких течений рассматривается в настоящей работе – изучается энергоразделение в потоке газа при обтекании тел.

Вопрос разделения энергии при обтекании тел обсуждался во многих экспериментальных и теоретических работах [6–16]. Основной мотивацией для этих исследований послужил эффект Эккерта–Вайса [6] (или “эффект аэродинамического охлаждения” [8]), который заключается в формировании области с низкой температурой восстановления на подветренной стороне теплоизолированного цилиндра: при определенных условиях температура восстановления может быть ниже статической температуры набегающего потока.

Из закона сохранения энергии, записанного в безразмерной форме (см. раздел 1)

$$\frac{di_0}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho Re} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) + \frac{\gamma}{\rho Re Pr} \nabla^2 T \quad (0.1)$$

следует, что перераспределение полной энтальпии i_0 в жидких частицах может происходить в результате пульсаций давления, работы вязких напряжений и теплопроводности. Если нестационарностью и диссипативными механизмами можно пренебречь (как, например, вне области следа), то полная энтальпия в жидких частицах сохраняется. В области развитого следа можно пренебречь диссипативными механизмами, поэтому процесс энергоразделения определяется пульсациями давления. Вблизи поверхности тела, вообще говоря, необходимо учитывать все ме-

ханизмы. Оценка степени влияния этих механизмов (слагаемых в уравнении (0.1)) на основе численных расчетов [14] подтверждает эти соображения.

Наиболее выраженное снижение i_0 наблюдается вблизи кормовой части тела, при этом падение полной энтальпии вдоль пограничного слоя во фронтальной части цилиндра оказывается значительно меньшим и, следовательно, не может служить объяснением этого эффекта. По результатам экспериментов [8] была предложена связь эффекта Эккерта–Вайса с процессом вихреобразования, которая также была неявно подтверждена в последующих экспериментальных работах [7, 9]. В [9] было показано, что эффект ослабевает при внесении в область формирования вихрей разделительной пластины. В [7] наблюдалось значительное уменьшение i_0 за счет интенсификации вихрей при резонансе между частотами стоячих акустических волн в аэродинамической трубе и срыва вихрей. В численных расчетах [16] воздействие на процесс вихреобразования осуществлялось путем изменения расстояния между двумя цилиндрами, расположенными поперек потока. Было показано существенное влияние процесса вихреобразования на интенсивность эффекта Эккерта–Вайса и предложено его объяснение. Согласно [16] эффект определяется балансом двух факторов:

(i) *охлаждение* – вихрь формируется вблизи поверхности тела таким образом, что на начальном этапе интенсивно роста он перемещается к центральной линии следа. При этом давление в вихре уменьшается, т.е. первое слагаемое в уравнении (0.1) отрицательное. Это является основной причиной образования областей охлажденной жидкости вблизи кормовой части тела;

(ii) *нагрев* – на следующем этапе, при смещении формирующегося вихря вниз по течению и сходу в поток, возникает интенсивное течение газа в зазоре между кормовой частью цилиндра и вихрем. Этот поток заполняет пространство вблизи тела нагретым газом, который возникает вследствие пульсаций давления в срывающихся с тела сдвиговых слоях. Кроме того, поскольку ядро вихря – это область пониженного давления, за вихрем, движущимся вниз по течению, $\partial p/\partial t > 0$. Эти обстоятельства оказывают противоположный эффект, стремясь увеличить осредненное по времени значение энтальпии торможения.

Таким образом, несмотря на то, что вблизи кормовой части поверхности тела все три механизма имеют сравнимый порядок, охлаждение поверхности тела определяется недиссипативным слагаемым. Изменение режима взаимодействия срывающихся вихрей с поверхностью тела может приводить к существенному увеличению интенсивности этих процессов. В разделе 2.1 обсуждаются влияние формы обтекаемого тела на эффект Эккерта–Вайса и распределение i_0 в области формирования вихрей.

Представление о распределении полной энтальпии в развитом следе можно получить, опираясь на экспериментальные данные и результаты численного моделирования [7, 9, 12, 14–16]. Осредненная по времени полная энтальпия \bar{i}_0 принимает пониженные значения вблизи центральной линии следа (здесь и далее осредненные по времени величины обозначаются чертой сверху). Минимальные значения достигаются в области формирования вихрей. Эффект ослабевает по мере удаления вниз по течению. Однако следует отметить, что стремление \bar{i}_0 к значению в набегающем потоке $i_{0\infty}$ может быть немонотонным из-за перестройки развитого вихревого следа, приводящей к появлению локальных экстремумов \bar{i}_0 .

Как было отмечено выше, процесс разделения энергии в развитом следе можно описать, пренебрегая действием вязких сил и теплопроводности. В [7] дано следующее объяснение охлаждения газа вблизи центральной линии следа. Траектории жидких частиц в развитом следе устроены таким образом, что перед (за) вихрями частицы движутся в область (из области) следа. Учитывая, что давление в ядрах вихрей понижено, имеем $\partial p/\partial t < 0$ ($\partial p/\partial t > 0$) перед (за) вихрем. Поэтому согласно уравнению (1) i_0 убывает при движении частиц к центральной части следа. Изменение полной энтальпии вдоль траекторий представлено в [14] на основе численных расчетов.

Используя модель дорожки Кармана на основе бесконечных вихревых цепочек, можно установить связь между полной энтальпией и параметрами вихревой дорожки вдоль центральной линии следа [7, 15]:

$$\bar{i}_0 - i_{0\infty} = -\frac{\Gamma_0}{l}(1 + U) \quad (0.2)$$

Здесь l – период дорожки Кармана; Γ_0 и $1 + U$ – циркуляция вихрей и их скорость в системе координат, связанной с цилиндром. В [15] эта идея была развита на случай следов, состоящих из N вихревых цепочек, и продемонстрирована согласованность оценок, полученных на основе

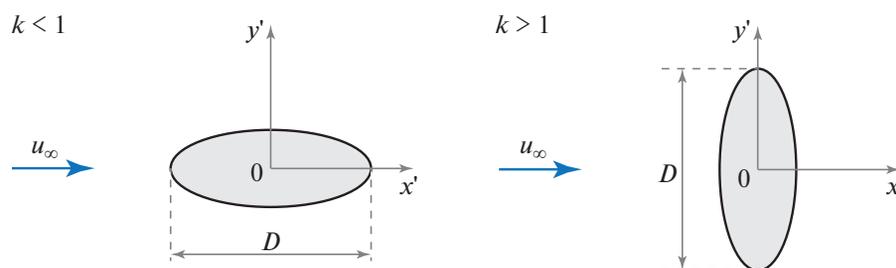


Рис. 1. Схема обтекания эллиптического цилиндра.

этой упрощенной модели, с численными результатами. Одной из основных трудностей при построении этих моделей является предположение о распределении температуры в вихревых ядрах, на которое оказывает влияние процесс вихреобразования. Этот вопрос обсуждается в разделах 2.2 и 2.3, опираясь на численный эксперимент.

Применимость подобных оценок осложняется в ситуации, когда крупномасштабные вихревые структуры в следе неупорядочены. Однако в расчетах и экспериментах (см. [16]) наблюдается подобие осредненных по времени профилей скоростей и полной энтальпии, причем обычно выполняется неравенство

$$\max_y [i_{0\infty} - \bar{i}_0(x, y)] < \max_y [1 - \bar{u}(x, y)]$$

Оно согласуется с уравнением (0.2) и может быть независимо получено для асимптотического дальнего следа при $Pr < 1$.

В настоящей работе рассматриваются процессы перераспределения полной энтальпии в ближнем следе за эллиптическим цилиндром и парой цилиндров на основе численного моделирования. Решаются начально-краевые задачи для уравнений Навье–Стокса, описывающие двумерные течения вязкого совершенного газа при числах Рейнольдса $Re = 1000$, Маха $M_\infty = 0.4$ и Прандтля $Pr = 0.72$. Постановка задачи обтекания тел и численный метод описаны в разделе 1. В разделе 2 обсуждаются результаты моделирования. Основное внимание уделяется вопросам: влияния формы обтекаемого тела на интенсивность энергоразделения (раздел 2.1); возникновения областей с пониженными значениями полной энтальпии i_0 в развитом следе и адекватности результатов упрощенной модели для их описания (разделы 2.2 и 2.3).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

1.1. Постановка задачи. Рассматриваются задачи обтекания цилиндра эллиптического сечения и пары круговых цилиндров в декартовой системе координат (x', y') , выбранной следующим образом: набегающий поток имеет скорость $(u_\infty, 0)$; в случае эллиптического цилиндра его центр находится в начале координат, в случае пары круговых цилиндров – центры расположены в точках $(0, 0)$ и $(0, L)$. Сечение эллиптического цилиндра удобно параметризовать, используя длину большой оси эллипса D и параметр сжатия k , равный отношению длин полуосей вдоль y' и x' (см. рис. 1). Таким образом, при $k = 1$ течение соответствует обтеканию кругового цилиндра диаметра D , при $k = 0$ и $k = \infty$ – бесконечно тонкой пластины длины D , расположенной вдоль и поперек потока соответственно. В случае пары круговых цилиндров также имеется два параметра, определяющих геометрию течения – диаметр цилиндров D и расстояние между их центрами L .

Течение жидкости описывается моделью вязкого совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями c_v, c_p при постоянном объеме и давлении, коэффициентами теплопроводности κ и вязкости μ . Решаются уравнения Навье–Стокса, которые в безразмерной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \rho \frac{d}{dt} \left(T + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) &= -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) + \frac{\gamma}{\text{RePr}} \nabla^2 T \\ p &= (\gamma - 1) \rho T \end{aligned}$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ – тензор вязких напряжений со следующими компонентами:

$$(\tau_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$\rho(x, y, t)$, $p(x, y, t)$, $\mathbf{u}(x, y, t) = (u, v)$ и $T(x, y, t)$ – плотность, давление, вектор скорости и температура; $\gamma = 1.4$ – показатель адиабаты. Числа Рейнольдса, Прандтля и Маха вводятся следующим образом:

$$\text{Re} = \frac{\rho_\infty u_\infty D}{\mu}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\kappa}, \quad M_\infty = \frac{u_\infty}{c_\infty}$$

где ρ_∞ – плотность набегающего потока, $c_\infty = \sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}$ – скорость звука в набегающем потоке. Обезразмеривание выполнено с использованием следующих соотношений:

$$t = \frac{u_\infty t'}{D}, \quad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}'}{D}, \quad p = \frac{p'}{\rho_\infty u_\infty^2}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}'}{u_\infty}, \quad T = \frac{c_p T'}{u_\infty^2}$$

Здесь размерные величины обозначаются штрихами.

Уравнения решаются в переменных (p, \mathbf{u}, T) , для которых ставятся следующие граничные условия:

– на поверхности цилиндра $\mathbf{u} = (0, 0)$ и $\nabla T \cdot \mathbf{n} = 0$ (здесь \mathbf{n} – вектор единичной внешней нормали);

– на бесконечности $\mathbf{u} = (1, 0)$, $p = 1/(\gamma M_\infty^2)$, $T = 1/[\gamma(\gamma - 1)M_\infty^2]$.

Начальные условия задаются с помощью добавления конечного интервала по времени, на котором происходит плавный разгон цилиндра(ов) из состояния покоя (с соответствующим изменением граничных условий и добавлением в уравнения сил инерции).

Решение уравнений зависит от следующих параметров: чисел Рейнольдса Re , Прандтля Pr , Маха M_∞ и параметра сжатия k (случай эллиптического цилиндра) или расстояния между цилиндрами L/D (случай пары цилиндров).

Следует упомянуть ограничения модели, связанные с учетом некоторых аспектов реальной физики течения, таких как трехмерность и мелкомасштабные турбулентные пульсации. Отсутствие этих аспектов в модели не является препятствием для правильного описания ключевых физических причин перераспределения полной энтальпии, поскольку модель включает: все три возможных механизма изменения полной энтальпии в жидкой частице, см. уравнение (0.1); характерные особенности потока, которые влияют на перераспределение полной энтальпии (процесс вихреобразования, вихревые дорожки и влияние сжимаемости). Соответствие между результатами расчетов в рамках используемой модели и экспериментальными данными подробно обсуждается в [16].

1.2. Численный метод. В разделе кратко описывается используемый численный метод, более подробная информация может быть найдена в работах [14, 16].

Задачи решаются численно стабилизированным методом конечных элементов (Galerkin least-squares method) на неструктурированных треугольных сетках. По времени используется неявная схема Эйлера. Система нелинейных алгебраических уравнений, полученная в результате дискретизации, решается итерационным методом Ньютона в сочетании с обобщенным методом минимальных невязок. Для уменьшения влияния искусственных дальних границ решение строится в большой расчетной области: $[-200, 400] \times [-200, 200]$.

Расчетная сетка имеет вложенную структуру со следующим разрешением в интересующих нас областях: в ближнем следе ($-1.5 \leq x \leq 26$) и вблизи поверхности цилиндров размер шага составляет около 0.025 и 0.0005 соответственно. Это приблизительно соответствует 40–70 вычислительным узлам поперек сформировавшихся вихрей, динамических и тепловых пограничных слоев при $Re = 10^3$ и $Pr = 0.72$. Шаг по времени $\Delta t = 0.0025$.

Подробное исследование влияния параметров численного метода (шага по времени и разрешения сетки) на решение (интегральные характеристики, частоты, распределение полной энтальпии в следе) для рассматриваемых режимов течения, а также сопоставление с данными других авторов представлено в работах [14, 16]. Показано, что уменьшение выбранного разрешения сетки и шага по времени не приводит к существенным изменениям результатов.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Влияние формы обтекаемого тела на области пониженной полной энтальпии. Пример влияния формы обтекаемого тела на распределение осредненной по времени полной энтальпии \bar{i}_0 при $Re = 1000$, $M_\infty = 0.4$ и $Pr = 0.72$ представлен на рис. 2. Для задачи обтекания эллиптического цилиндра значения параметра k выбраны из промежутка $0.1 \leq k \leq 10$, на котором след меняется от узкого стационарного без образования вихрей при $k = 0.1$ до широкого следа с формированием крупных вихрей высокой интенсивности при $k = 10$. Также рассматривается случай обтекания пары круговых цилиндров при $L/D = 1.1$, когда след за парой цилиндров становится подобен течению за одним телом с общей вихревой дорожкой. На рисунке характерная длина для этой задачи была выбрана равной $2.1D$ (по миделеву сечению) для удобства сравнения с результатами обтекания эллиптического цилиндра. При этом геометрия обтекаемой пары тел близка к случаю $k = 2$, это проявляется в схожих картинах течения и интенсивности перераспределения полной энтальпии (однако вихревой след за парой цилиндров оказывается менее упорядоченным).

На рис. 2а изображены картины течения в момент времени, соответствующий локальному максимуму коэффициента подъемной силы. Порции газа с повышенной (пониженной) полной энтальпией переносятся вместе с вихрями, причем во внутренней (внешней) по отношению к центральной линии следа части вихря $i_0 < i_{0\infty}$ ($i_0 > i_{0\infty}$). Поэтому при осреднении по времени (рис. 2б) имеем понижение \bar{i}_0 вблизи центральной части следа. Такая неоднородность $i_0 = \gamma T + (u^2 + v^2)/2$ в вихрях объясняется распределением кинетической энергии: в системе координат, связанной с цилиндром, во внутренней (внешней) части кинетическая энергия меньше (больше) значения в набегающем потоке.

На рис. 2в, г видно, что вклад внутренней и кинетической энергии в перераспределение \bar{i}_0 неоднозначен и существенно зависит от k . При $k = 0.5$ и 1 перераспределение кинетической энергии способствует увеличению \bar{i}_0 в развитом следе и уменьшению в области формирования. При $k \geq 2$ – наоборот: из-за увеличения поперечного расстояния между вихрями и их циркуляции происходит падение средней скорости и кинетической энергии в центральной части следа; а в области формирования она возрастает из-за интенсивного поперечного течения при образовании вихрей. При стационарном течении ($k = 0.1$) в центральной части понижение i_0 происходит за счет отрицательного вклада кинетической энергии. Осредненная по времени температура в ближнем следе также существенно зависит от структуры следа и процесса вихреобразования: при малых k в следе она выше статической, и поэтому стремится увеличить i_0 ; при больших k – наоборот, температура становится значительно ниже T_∞ , способствуя повышению интенсивности энергоделения. Причиной такого поведения является баланс между нагревом и охлаждением вихрей в процессе их формирования, который обсуждается в разделе 2.3.

Интенсивность перераспределения полной энтальпии (интенсивность энергоделения) в области Ω оценивается по локальному минимуму осредненной по времени нормированной полной энтальпии:

$$E = \left| \min_{(x,y) \in \Omega} \frac{\bar{i}_0(x,y) - i_{0\infty}}{i_{0\infty}} \right|$$

Значения E вычисляются на поверхности цилиндра и для двух областей Ω в ближнем следе – области формирования вихрей и области развитого следа, в которых отчетливо наблюдаются ло-

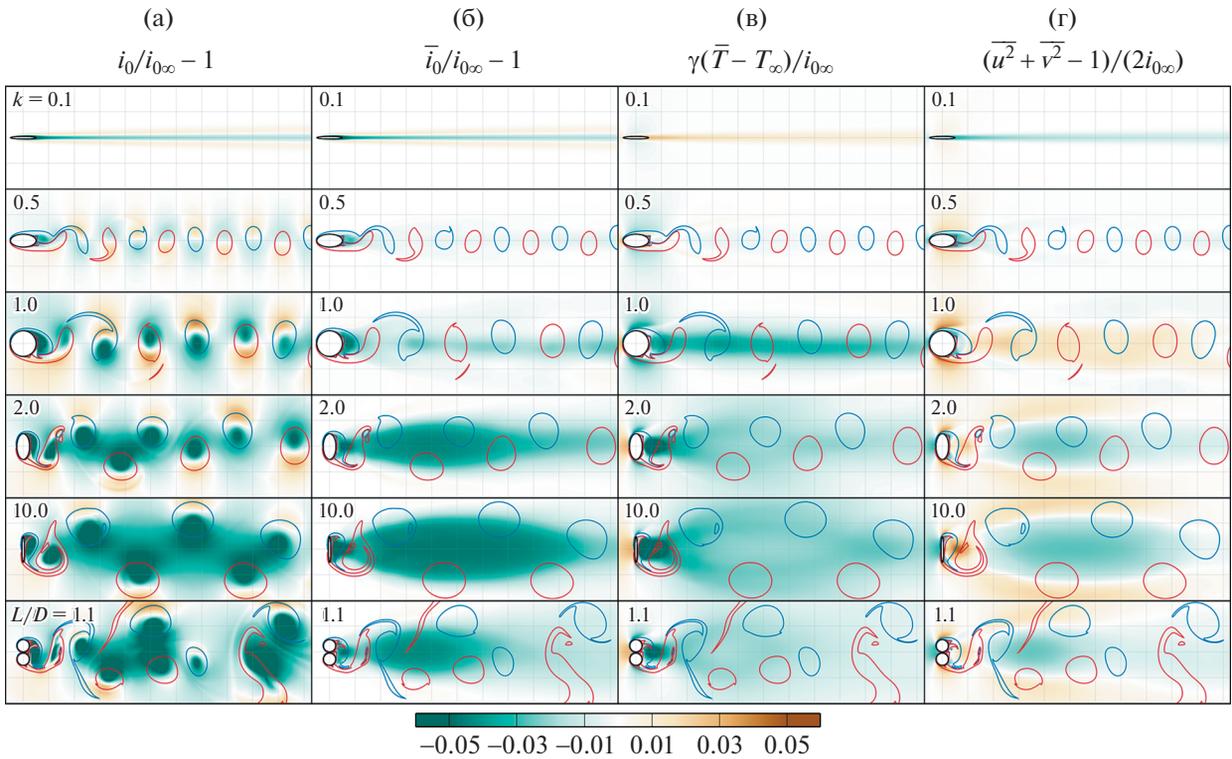


Рис. 2. Перераспределение полной энтальпии при обтекании тел различной формы: (а), (б) – мгновенное и осредненное по времени распределение полной энтальпии; (в), (г) – вклад изменения внутренней и кинетической энергии в распределение $\bar{i}_0: \bar{i}_0/i_{0\infty} - 1 = \gamma(\bar{T} - T_{\infty})/i_{0\infty} + (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 - 1)/(2i_{0\infty})$. Для случая $k = 0.1$ на рисунках (а), (б) масштаб цветовой шкалы уменьшен в 10 раз. Линии постоянной завихренности (кроме стационарного случая при $k = 0.1$) изображены в момент времени, который соответствует локальному максимуму коэффициента подъемной силы (красный и синий цвет линий соответствует $\omega = 1$ и $\omega = -1$).

кальные минимумы \bar{i}_0 (за исключением случаев $k = 0.1, 0.5$, см. рис. 2б). При $k \geq 0.5$ полная энтальпия имеет минимальные значения в области формирования вихрей (рис. 3). E в этой области растет с увеличением k и при $k = 10$ достигает 6.9%. Как видно на рис. 2, это связано с падением средней температуры. В развитом следе энергоделение наиболее интенсивно также при $k = 10 - 4.7\%$. Это не сильно отличается от значения E при $k = 2 (4.5\%)$, но при этом площадь области с пониженными значениями \bar{i}_0 заметно больше. Увеличение площади связано с ростом поперечного расстояния между вихрями.

На рис. 4 изображено распределение коэффициента восстановления $r = 2(i_0 - i_{0\infty}) + 1$ на поверхности цилиндра. Видно, что как только стационарное течение в ближнем следе становится неустойчивым и начинают формироваться вихри ($k > 0.1$), в кормовой части тела происходит резкое падение коэффициента восстановления, что подтверждает связь процесса вихреобразования с эффектом Эккерта–Вайса. Наиболее сильно он проявляется при $k = 10$ – возникает обширная область с отрицательным коэффициентом восстановления, при этом температура в точке $\theta = 180^\circ$ на 0.6% ниже статической в набегающем потоке. Следует отметить, что зависимость $\min_{\theta} r(\theta)$ от k немонотонна – для объяснения этого, а также локальных экстремумов в зависимости $r(\theta)$, необходимо детальное рассмотрение вихреобразования и баланса между процессами нагрева и охлаждения кормовой части тела, описанными во введении, подобно [16].

2.2. Модель перераспределения полной энтальпии в развитом следе. Рассмотрим упрощенную модель следа, которая позволяет качественно объяснить перераспределение i_0 . Подобные модели для вихревых дорожек и отдельных вихрей, в частности, обсуждались в [7, 9, 10, 15]. Будем предполагать, что в развитом следе:

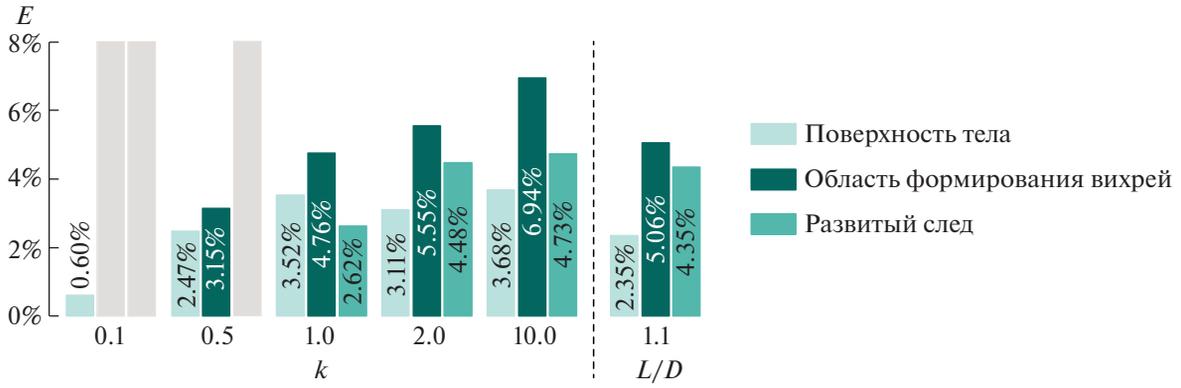


Рис. 3. Эффективность разделения энергии, $\min_{(x,y)}(\bar{i}_0/i_{0\infty} - 1)$, вычисленная на поверхности цилиндра, в области формирования вихрей и в развитом следе (область, в которой разыскивался минимум, ограничена: $x < 11$). Светло-серые полосы указывают на то, что при обтекании эллиптического цилиндра с малыми значениями k в рассматриваемой области локальный минимум отсутствует.

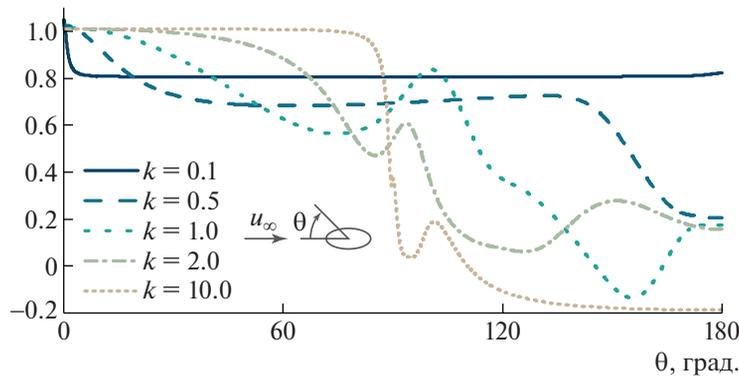


Рис. 4. Распределение коэффициента восстановления r по поверхности эллиптического цилиндра.

1) можно пренебречь диссипативными процессами (вторым и третьим слагаемыми в уравнении (0.1)), тогда изменение энthalпии описывается уравнением

$$\frac{di_0}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \tag{2.1}$$

2) течение в системе координат, связанной с движущимися вдоль оси x вихрями, можно считать стационарным, тогда из соотношения (2.1) следует, что в этой системе координат полная энthalпия i_0^* постоянна вдоль линий тока:

$$i_0^* = \gamma T + \frac{1}{2}[(u - 1 - U)^2 + v^2] = C = \text{const} \tag{2.2}$$

где $1 + U$ – скорость движения центров вихрей;

3) константа C постоянна ($C = \gamma T_\infty + 0.5U^2$) вне и внутри вихревых ядер. Это позволяет выписать явное выражение температуры через скорость

$$\gamma(T - T_\infty) = (1 + U)(u - 1) - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 - 1) \tag{2.3}$$

Распределение полной энthalпии (или температуры) внутри ядра является одной из основных трудностей для построения подобных моделей, поскольку: при формировании вихрей присутствуют механизмы, способные как повышать, так и понижать их температуру (и полную энthalпию); по мере движения вихрей вниз по потоку распределение температуры в ядрах может

качественно меняться (например, в [16] приведен пример ситуации, когда в ближнем следе вихри охлаждены, $T < T_\infty$, а в дальнем – нагреты, $T > T_\infty$).

Простейший способ замыкания модели, который используется в настоящей работе, – предположение, что в вихре также $C = \gamma T_\infty + 0.5U^2$. Таким образом, считается, что соотношение (2.3) выполнено во всей области развитого следа. В [7] рассматривалась модель, в которой предполагалось постоянство статической температуры в ядре вихря (поле скоростей описывалось парой вихревых цепочек, состоящих из вихрей Рэнкина). Применение этой модели для полученного численно поля скоростей осложняется необходимостью определения границы ядра при дополнительном ограничении, связанном с непрерывностью температуры, т.е., согласно (2.2), на границе ядра должно выполняться соотношение $(u - 1 - U)^2 + v^2 = \text{const}$. Способ корректного построения такой границы неочевиден. Поэтому данную модель удобнее использовать совместно с некоторой аппроксимацией поля скоростей (например, с помощью вихрей Рэнкина). Насколько хорошо оба эти предположения о распределении температуры в вихрях согласуются с численными расчетами, обсуждается в разделе 2.3.

В литературе встречается также модель с изэнтропическим распределением температуры в вихре $T = T_\infty (p/p_\infty)^{1-\gamma}$ [17]. В этом случае, помимо поля скорости, в развитом следе необходимо знать распределение давления или плотности. Поскольку для рассматриваемых случаев в вихрях энтропия оказывается существенно выше энтропии в набегающем потоке, модель дает сильно заниженные значения температуры в вихрях (при использовании давления из численного расчета) и в настоящей работе не рассматривается.

Используя (2.3), получаем следующее выражение для полной энтальпии:

$$i_0 - i_{0\infty} = \gamma(T - T_\infty) + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 - 1) = (1 + U)(u - 1) \quad (2.4)$$

Для достижения минимальных значений $\bar{i}_0 - i_{0\infty}$ выгодно иметь большой дефект скорости $1 - \bar{u}$ (обычно $1 - \bar{u} > 0$), но при этом и высокую скорость движения вихрей $1 + U$ (обычно $-1 < U < 0$). Как видно из уравнения (2.3), последнее обстоятельство напрямую связано с распределением температуры – в рамках этой модели при фиксированном дефекте скорости ($1 - \bar{u}$) увеличение скорости движения вихрей $1 + U$ уменьшает среднюю температуру.

На рис. 5а, б видно, что модель действительно качественно повторяет распределение i_0 . Здесь скорость $1 + U$ определялась по вихрю, выделенному жирной линией, как скорость в точке локального максимума завихренности. Сопоставление имеет смысл только вблизи этого вихря.

Для применения модели достаточно знать поле скоростей в развитом вихревом следе. С помощью модели точечных вихрей (или обобщения, например, с заменой точечных вихрей вихрями Рэнкина) можно решить задачу об отыскании оптимальных с точки зрения интенсивности энергоразделения конфигураций следа, связав скорости u и U с характеристиками идеализированного вихревого следа (количеством вихревых цепочек, расстояниями между вихрями, циркуляцией вихрей – например, см. соотношение (0.2)) [7, 15].

2.3. Сопоставление результатов численного эксперимента и модели. По сути описанная модель дает явное выражение для температуры (2.3). На рис. 2в, г видно, что для рассматриваемых режимов вклады в \bar{i}_0 от перераспределения внутренней и кинетической энергии сопоставимы. Следовательно, при описании энергоразделения в следе выбор модели для распределения температуры в вихрях является существенным. В этом разделе рассмотрим вопрос о том, насколько модельное распределение температуры соответствует реальному.

На рис. 5в, г видно, что распределение температуры в вихрях, полученное в рамках модели, не соответствует результатам численного моделирования – температура в ядрах вихрей заметно ниже предсказаний модели при больших k (согласно (2.3), в центрах вихрей температура должна иметь локальный максимум). Именно это обстоятельство вызывает расхождения в распределении i_0 на рис. 5а, б. В пространстве между вихрями разница менее существенна.

Рассмотрим основные механизмы, определяющие температуру вихрей в ближнем следе. Изменение температуры T в жидких частицах описывается уравнением:

$$\frac{dT}{dt} = -p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho \text{Re}} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + \frac{\gamma}{\rho \text{RePr}} \nabla^2 T, \quad (2.5)$$

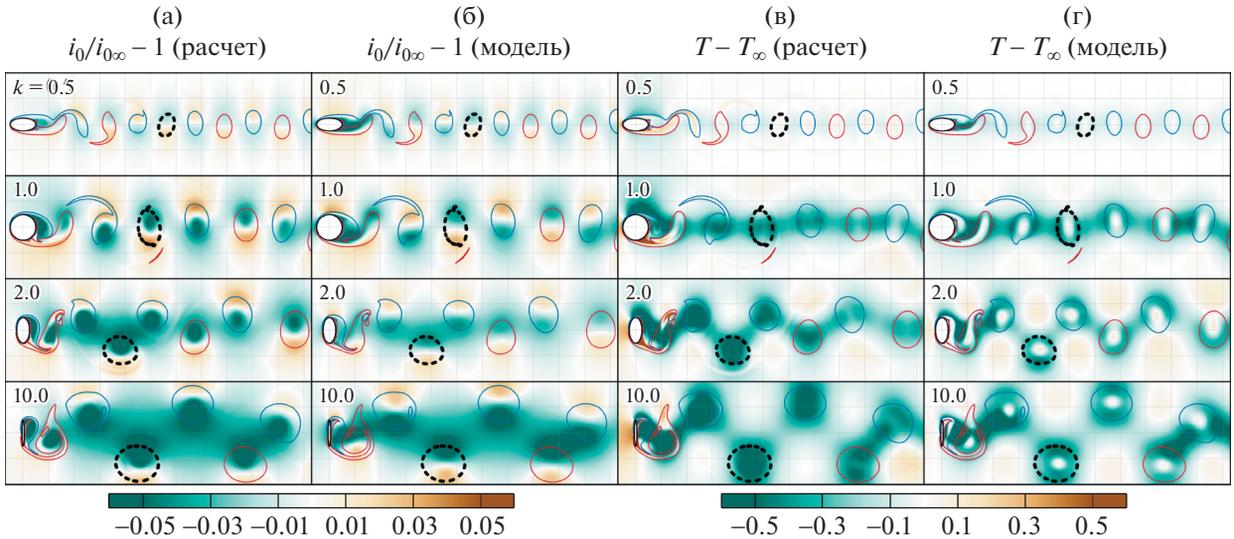


Рис. 5. Сопоставление полной энтальпии (а, б) и температуры (в, г), полученных путем решения уравнений Навье–Стокса (а, в) и предсказанных по полю скоростей (б, г): формулы (2.3), (2.4). На рисунке также изображены линии постоянной завихренности (красный и синий цвет соответствует $\omega = 1$ и $\omega = -1$); жирной штриховой линией отмечен вихрь, по которому определялась скорость U . Момент времени соответствует локальному максимуму коэффициента подъемной силы.

где первые два слагаемых в правой части отвечают за работу внутренних поверхностных сил давления и трения (первое и второе слагаемое соответственно); третье слагаемое — за изменения температуры в результате теплопроводности. Сумма первых двух слагаемых определяет переходы между внутренней энергией (в безразмерных переменных она совпадает с температурой) и кинетической энергией. Дополнительное изменение кинетической энергии $K = (u^2 + v^2)/2$ может происходить за счет работы внешних сил давления и трения (сумма первых двух слагаемых и четвертое слагаемое соответственно):

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho \text{Re}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{u}.$$

Температуру в формирующихся вихрях определяют два основных фактора. Первый — нагрев газа вблизи поверхности тела за счет работы внутренних сил (в первую очередь сил трения); второй — охлаждение в области формирования вихрей, в которой происходит существенное падение плотности (и, следовательно, температуры согласно первому слагаемому в правой части уравнения (2.5)). Поскольку при малых k ($k \leq 0.5$) имеем более обтекаемую форму тела, плотность за ним меняется слабо, и в вихрях наблюдается повышенная температура (рис. 2в, 5в). При больших k ($k > 1.0$) происходит существенное разрежение газа — температура вихрей при их формировании понижена. Так, например, в численных расчетах при $k = 0.1$ максимальное падение плотности составляет около 5%, в то время как при $k = 10$ в вихревых ядрах оно может превышать 40%. В рамках описанной выше модели в центре вихря достигается максимальное значение плотности:

$$\rho_{\max} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{\infty}^2 U^2 \right)^{1/(\gamma - 1)}$$

Рассмотрим более подробно распределение температуры в вихрях, выделенных на рис. 5. На рис. 6 приведены температура и модуль скорости V (в системе координат, связанной с вихрем) в сечениях вихря $x = x_0$ и $y = y_0$, где (x_0, y_0) — координаты центра вихря. Внутри вихревых ядер зависимость скорости V от расстояния до центра (x_0, y_0) близка к линейной (рис. 6а, б). В этой области возникает качественное отличие в распределении температуры при $k \geq 1$ (рис. 6в, г): в рамках модели она растет, в расчете ядро имеет температуру ниже, чем в окружающей среде. Однако при $k = 0.5$, как и в модели, имеем локальный максимум в центре вихря. Как упоминалось ранее

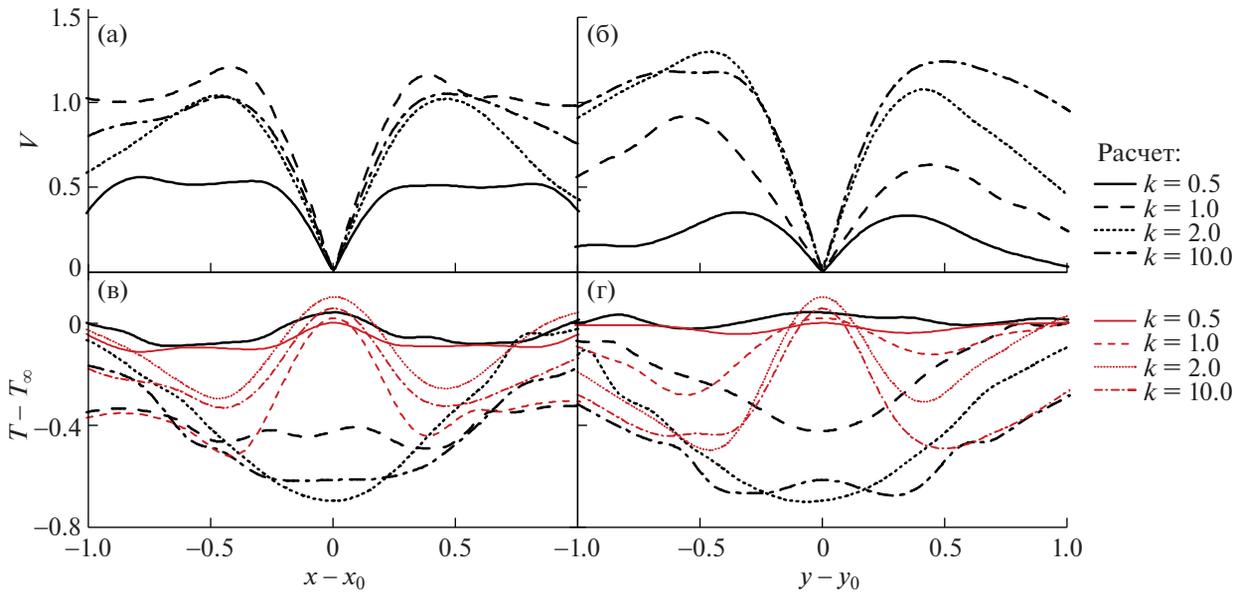


Рис. 6. Распределение скорости и температуры в вихревых ядрах. Представлены сечения вихрей, отмеченных жирной штриховой линией на рис. 5, линиями $x = x_0$ (б, г) и $y = y_0$ (а, в), где (x_0, y_0) – координаты центра вихря. (а), (б) – модуль скорости в системе координат, связанной с вихрем; (в), (г) – температура $T - T_\infty$, полученная при решении уравнений Навье–Стокса (черная линия) и вычисленная по формуле (2.3) (тонкая красная линия).

(раздел 2.2), при построении модели можно предположить, что в вихревых ядрах статическая температура постоянна. Такое предположение лучше согласуется с численным экспериментом только при $k \geq 1$, хотя, как видно на рис. 6в, г, при больших k все равно приводит к завышению значений температуры (в рамках модифицированной модели температура должна равняться температуре на границе ядра).

Результаты численных расчетов (рис. 5в и б) показывают, что температура в ядрах вихрей может как повышаться, так и понижаться. Это определяется течением в области формирования вихрей. Рассматриваемые модели на основе поля скоростей в развитом следе не учитывают этого обстоятельства. Поэтому предположение о распределении температуры в ядре вихря, приведенное к (2.3), оказывается грубым.

Таким образом, в ближнем следе за плохообтекаемым телом следует ожидать, что предсказания i_0 в вихрях с помощью упрощенной модели будут завышенными, поскольку она не учитывает дополнительное охлаждение вихрей в процессе их формирования. Для “широких” следов оценка интенсивности энергоразделения будет точнее в силу того, что в пространстве между вихрями, где достигается минимум \bar{i}_0 , распределение температуры хорошо согласуется с расчетами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе численного решения уравнений Навье–Стокса проведено исследование процесса перераспределения полной энтальпии в следе за цилиндрическими телами различного сечения в потоке вязкого совершенного газа при $Re = 1000$, $M_\infty = 0.4$ и $Pr = 0.72$.

Для плохообтекаемых тел имеет место более интенсивное перераспределение полной энтальпии в осредненном по времени потоке: уменьшается значение локального минимума \bar{i}_0 и увеличивается размер области существенно пониженных \bar{i}_0 . При обтекании эллиптического цилиндра с отношением поперечного размера к продольному $k = 10$ получено снижение минимального значения \bar{i}_0 (которое достигается в области формирования вихрей) на 6.9% по сравнению со значением в набегающем потоке. Для кругового цилиндра ($k = 1$) это значение составляет 4.8%, а

при $k = 0.1$ – всего 0.6%. Также при $k = 10$ происходит значительное увеличение площади области пониженных значений \bar{i}_0 в развитом следе с минимумом, составляющим 4.7%.

Интенсификация перераспределения \bar{i}_0 в развитом следе объясняется более интенсивным падением кинетической энергии в центральной части следа из-за увеличения циркуляции срывающихся вихрей и поперечного расстояния между ними и значительным разрежением в области формирования вихрей. Это приводит к снижению температуры в вихрях, срывающихся в поток.

Рассмотрена упрощенная модель, позволяющая оценить интенсивность перераспределения полной энтальпии i_0 в развитом ближнем следе по полю скоростей. Качественно результаты согласуются с численными расчетами. Недостатком модели является неучет перераспределения i_0 при формировании вихрей. Этот процесс существенно влияет на температуру газа в ядрах вихрей в ближнем следе, которая может оказаться как выше, так и ниже статической в набегающем потоке. Для плохообтекаемых тел это приводит к завышению значений i_0 , предсказываемых моделью.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ им. М.В. Ломоносова при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-19-00234.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eiamsa-ard S., Promvong P.* Review of Ranque–Hilsch effects in vortex tubes // *Renew. Sustain. Energy Rev.* 2008. V. 12. № 7. P. 1822–1842.
<https://doi.org/10.1016/j.rser.2007.03.006>
2. *Леонтьев А.И.* Газодинамический метод энергоразделения газовых потоков // *Теплофиз. выс. темп.* 1997. V. 35. № 1. P. 157–159.
3. *Azhanov G.M., Osiptsov A.N.* The efficiency of one method of machineless gasdynamic temperature stratification in a gas flow // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2017. V. 106. P. 1125–1133.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.10.090>
4. *Leontiev A., Zditovets A., Kiselev N., Vinogradov Y., Strongin M.* Experimental investigation of energy (temperature) separation of a high-velocity air flow in a cylindrical channel with a permeable wall // *Exp. Therm. Fluid Sci.* 2019. V. 105. P. 206–215.
<https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2019.04.002>
5. *Kiselev N., Leontiev A., Vinogradov Y., Zditovets A., Strongin M.* Effect of large-scale vortex induced by a cylinder on the drag and heat transfer coefficients of smooth and dimpled surfaces // *Int. J. Therm. Sci.* 2019. V. 136. P. 396–409.
<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2018.11.005>
6. *Eckert E., Weise W.* Messungen der temperaturverteilung auf der oberfläche schnell angeströmter unbeheizter körper // *Forsch. Ingenieurwes.* 1942. V. 13. № 6. P. 246–254.
<https://doi.org/10.1007/BF02585343>
7. *Kurosaka M., Gertz J.B., Graham J.E., Goodman J.R., Sundaram P., Riner W.C., Kuroda H., Hankey W.L.* Energy separation in a vortex street // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 178. P. 1–29.
<https://doi.org/10.1017/S0022112087001095>
8. *Ryan L.F.* Experiments on aerodynamic cooling. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 1951.
<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000092033>
9. *Thomann H.* Measurements of the recovery temperature in the wake of a cylinder and of a wedge at Mach numbers between 0.5 and 3. Tech. Rep. Report 84, National Aeronautical Research Institute (FFA), Sweden, 1959.
10. *Eckert E.R.G.* Cross transport of energy in fluid streams // *Wärme-und Stoffübertragung.* 1987. V. 21. № 2–3. P. 73–81.
<https://doi.org/10.1007/BF01377562>
11. *Ng W.F., Chakroun W.M., Kurosaka M.* Time-resolved measurements of total temperature and pressure in the vortex street behind a cylinder // *Phys. Fluids A: Fluid Dyn.* 1990. V. 2. № 6. P. 971–978.
<https://doi.org/10.1063/1.857604>
12. *Goldstein R.J., Kulkarni K.S.* Energy separation in the wake of a cylinder // *J. Heat Transfer.* 2008. V. 130. № 6. P. 061703–061703–9.
<https://doi.org/10.1115/1.2891222>

13. *Kulkarni K., Goldstein R.* Energy separation in the wake of a cylinder: Effect of Reynolds number and acoustic resonance // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2009. V. 52. № 17–18. P. 3994–4000.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.03.024>
14. *Aleksyuk A.I., Osiptsov A.N.* Direct numerical simulation of energy separation effect in the near wake behind a circular cylinder // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2018. V. 119. P. 665–677.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.11.133>
15. *Aleksyuk A.I.* Influence of vortex street structure on the efficiency of energy separation // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2019. V. 135. P. 284–293.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.01.103>
16. *Aleksyuk A.I.* The Eckert–Weise effect and energy separation under the flow interference behind side-by-side cylinders // *J. Fluid Mech.* 2021. V. 915. P. A95.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2021.128>
17. *Wu J.-Z., Ma H.-Y., Zhou M.-D.* Vorticity and vortex dynamics. Springer, 2006.
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-29028-5>