

УДК 532.5: 550.3: 551.24.01

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В СИСТЕМЕ УПРУГАЯ ЛИТОСФЕРА–ВЯЗКАЯ АСТЕНОСФЕРА

© 2021 г. Л. И. Лобковский^{a,b,*}, М. М. Рамазанов^{c,**}

^a Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Россия

^b Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Московская обл., Россия

^c Институт проблем геотермии и возобновляемой энергетики –
филиал Объединенного института высоких температур РАН, Махачкала, Дагестан, Россия

*E-mail: llobkovsky@ocean.ru

**E-mail: mukamay-ipg@mail.ru

Поступила в редакцию 09.04.2021 г.

После доработки 06.05.2021 г.

Принята к публикации 22.06.2021 г.

Рассмотрена задача о возникновении термомеханических волн в системе, состоящей из двух горизонтальных слоев с реологиями линейно упругой среды для верхнего слоя (литосфера) и вязкой жидкости для нижнего (астеносфера) с учетом фазового перехода на их общей границе. Найдено точное решение задачи и изучены его свойства в зависимости от параметров. Показано, что при характерных значениях физических параметров литосферы и астеносферы существуют решения в виде умеренно затухающих деформационных тектонических волн, да-на геофизическая интерпретация полученных результатов.

Ключевые слова: математическая модель, термомеханические волны, литосфера, астеносфера, фазовый переход

DOI: 10.31857/S0568528121060104

Явление деформационных тектонических волн в литосфере Земли давно привлекает внимание геофизиков, главным образом, в связи с наблюдаемыми процессами миграции сейсмической активности. Эти волны имеют различные пространственно-временные масштабы, связанные с характерными структурами земной коры (определяемыми ее блоково-слоистым строением, наличием разломов и т.д.) и исследуются с помощью разных моделей, предлагаемых для описания конкретных наблюдаемых особенностей распространения сейсмической активности в том или ином регионе. Разнообразие предложенных моделей отражено в различных названиях описываемых волн, например, волны сейсмоактивности [1–4], деформационные волны активизации разломов [5–13], волны крипа [14], D-волны (волны опасности) [15], деформационные фронты [16], деформационные автоволны [17, 18], тектонические волны [19–25]. Проблема миграции сейсмической активности имеет полувековую историю систематических исследований, в которых рассматривается триггерный эффект возникновения сейсмичности в результате воздействия на геосреду деформационных волн в литосфере. В качестве примера отметим работы известного японского сейсмолога К. Касахара [4, 21], где на основе геодезических съемок разных лет были проанализированы данные о скоростях и направлениях миграции землетрясений для некоторых регионов мира. Так, сопоставление миграции сейсмических событий в Японии (1950–1970 гг.) и Перу (1966–1970 гг.) показало, что существует общая тенденция миграции по направлению от океана к суше, т.е. векторные скорости миграции землетрясений (величиной порядка нескольких десятков км/год) совпали с направлениями субдукции литосферы Тихого океана под Японскую островную дугу, с одной стороны, и Андийскую континентальную окраину – с другой. Вообще, наблюдаемые скорости миграции сейсмических событий в разных регионах Земли варьируют от нескольких десятков до первых сотен км в год.

Впервые модель распространения тектонических напряжений в литосфере предложил В. Эльзассер [19, 20] для объяснения механизма миграции зон афтершоков после сильных землетрясений, рассмотрев одномерную задачу о связанных горизонтальных смещениях упругой

литосферы, подстилаемой вязкой астеносферой. Полученное уравнение диффузионного типа позволило оценить характерную скорость диффузии осредненных тектонических напряжений в литосфере, которая по порядку величины (несколько десятков км/год) совпадала с наблюдаемой скоростью миграции афтершоков. Однако диффузионная модель В. Эльзассера приводила к быстрому затуханию возмущений напряжений, вызванных сильным землетрясением, и не могла объяснить миграцию сейсмичности на большие расстояния порядка первых тысяч километров и возможность существования далеко распространяющихся фронтов деформаций. В дальнейшем были предложены более сложные механические модели тектонических волн в системе литосфера—астеносфера, учитывающие, в частности, изгибные деформации литосферы и воздействие астеносферного течения за счет вязкого сцепления на границе с литосферой [23–25]. В этих статьях рассматривалась математическая модель уединенных тектонических волн, энергетически поддерживаемых стационарным астеносферным потоком, который компенсирует вязкую диссипацию. Оценка скорости таких волн около 30 км/год, а длина волны порядка 100 км. Авторами работ [23–25] предполагалось, что описываемые уединенные тектонические волны типа солитонов способны без затухания распространяться на большие расстояния, вызывая активизацию сейсмических процессов. Другая модель, используя теорию Коссера микрополярного континуума для описания внутренней зернистой микроструктуры вещества земной коры и литосферы [26], приводила к уравнению синус-Гордона, частным решением которого являются уединенные волны солитонного типа, которые также предлагалось рассматривать как незатухающие тектонические волны, определяющие посредством триггерного эффекта миграцию сейсмической активности [27, 28].

Модель тектонических волн, возбуждаемых сильнейшими землетрясениями в Алеутской дуге и распространяющихся в сторону Арктики, была рассмотрена в работе [29]. При этом в отличие от цитируемых выше моделей тектонических волн, предложенных для объяснения миграции сейсмической активности, эта модель является термомеханической, учитывающей фазовый переход на границе литосфера—астеносфера (плавление или кристаллизация мантийного вещества), зависящий от теплового режима окружающей геосреды. В последней работе при выводе определяющих уравнений термомеханической модели деформационных волн в системе литосфера—астеносфера с фазовой границей между этими средами делались некоторые предположения (например, приближение тонкой плиты, рассматриваемой как оболочка), позволяющие существенно упростить основные соотношения и получить волновые решения в аналитической форме. Обоснование этих предположений требует, вообще говоря, специального исследования с оценкой их влияния на точность и адекватность полученных решений.

В настоящей работе предлагается более точная постановка термомеханической задачи о возникновении и движении тектонических деформационных волн в системе литосфера—астеносфера с учетом фазового перехода (частичное плавление) на подошве литосферы без каких-либо упрощающих предположений, что дает возможность установления количественных критериев существования волновых решений и их зависимости от определяющих параметров окружающей геосреды.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задана система, состоящая из двух слоев: литосферы вместе с корой и астеносферы, общая граница которых является границей фазового перехода (рис. 1). Предполагается, что литосфера подчиняется реологии линейно упругого тела, а астеносфера является двухфазной частично расплавленной средой с реологией вязкой несжимаемой жидкости. Требуется исследовать возможность распространения волн в такой системе в неизотермическом режиме и определить свойства этих волн.

1.1. Переходный слой

На самом деле граница фазового перехода — это не линия (поверхность), а некоторый переходный слой конечной толщины, содержащий очень малый процент расплава порядка 0.1% в форме отдельных не связанных друг с другом микровключений жидкой фазы. Основной слой астеносферы содержит расплавленную фазу порядка нескольких процентов от общего объема среды, которая имеет связную межзеренную структуру, обеспечивая фильтрационную проницаемость среды. При этом эффективная вязкость астеносферы определяется деформациями твердого скелета. Несмотря на то что обычно переходный слой с начальным плавлением литосферы в виде изолированных микровключений расплава имеет малую толщину (порядка 100 м) в срав-

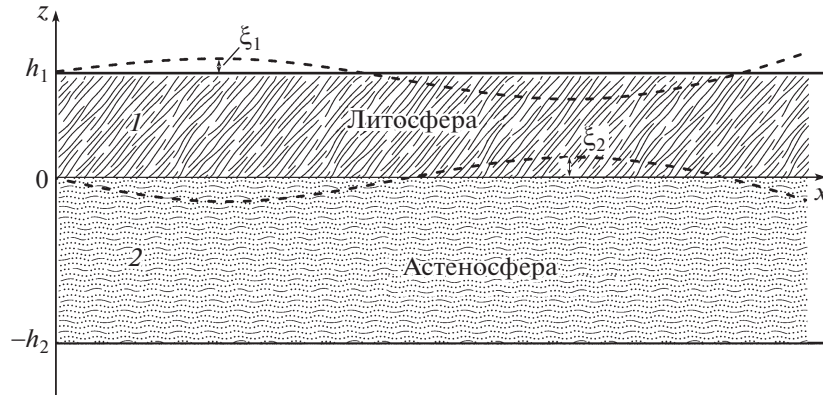


Рис. 1. Модель задачи. Слой верхней мантии, состоящий из литосферы и астеносферы: 1 – возмущенные границы литосферы.

нении с характерными мощностями (около 100 км) слоев упругой литосферы и двухфазной вязкодеформируемой астеносферы, им не всегда можно пренебречь. С другой стороны, непосредственный учет этого слоя в данной задаче сильно осложнит ее решение. Поэтому влияние переходного слоя между литосферой и астеносферой эффективным образом учитывается с помощью обобщенного граничного условия, вывод которого приводится ниже.

Через ξ_1 , ξ_2 обозначены верхняя и нижняя границы переходного слоя, т.е. граница с литосферой и астеносферой соответственно. Средняя линия переходного слоя обозначена ξ . Соответствующие значения в невозмущенном состоянии обозначены через ξ_{10} , ξ_{20} , ξ_0 , а невозмущенная толщина слоя – $\delta_0 = \xi_{10} - \xi_{20}$. Предполагается, что возмущения полей и границ малы по сравнению с их невозмущенными значениями, соответствующими механическому равновесию. В данном случае уравнение переноса тепла для простоты используется в приближенном виде

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v} h) = \lambda \Delta T, \quad dh = C_p dT \quad (1.1)$$

Здесь h – удельная энтальпия.

В силу тонкости слоя горизонтальными производными в нем можно пренебречь по сравнению с вертикальными. После интегрирования по толщине (1.1) запишется в виде

$$\int_{\xi_2}^{\xi_1} \left[\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho v_z h - \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dz = 0$$

Интегрирование во втором слагаемом с точностью до малых величин приводит к следующему выражению

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\xi_{20}}^{\xi_{10}} (\rho h) dz + \left[\rho \left(v_z - \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) h - \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right]_{\xi_{20}+0}^{\xi_{10}-0} = 0$$

С учетом непрерывности потока энергии, т.е. выражения в квадратных скобках на верхней и нижней границах переходного слоя, получается

$$\rho C_p \delta_0 \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \left[\rho \left(v_z - \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) h - \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right]_{\xi_{20}-0}^{\xi_{10}+0} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $\bar{T}$ – средняя температура в переходном слое

$$\bar{T} = \frac{1}{\xi_{10} - \xi_{20}} \int_{\xi_{20}}^{\xi_{10}} T dz \quad (1.3)$$

Формальное стягивание в (1.2), (1.3) верхней и нижней границы ξ_{10} , ξ_{20} к средней линии ξ_0 (при фиксированном коэффициенте $\rho C_p \delta_0$) приводит к следующему обобщенному граничному условию:

$$\rho C_p \delta_0 \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{\xi_0} + \left[\rho \left(v_z - \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) h - \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right]_{\xi_0-0}^{\xi_0+0} = 0$$

Если учесть условие непрерывности потока массы через границу, окончательно можно написать

$$\rho C_p \delta_0 \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\zeta_0} + q \rho \left(v_z - \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \Big|_{\zeta_0} - \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right]_{\zeta_0-0}^{\zeta_0+0} = 0, \quad q = [h]_{\zeta_0-0}^{\zeta_0+0} \quad (1.4)$$

Здесь q — удельная теплота фазового перехода.

Если толщина переходного слоя δ_0 равна нулю, из (1.4) следует обычное условие непрерывности потока энергии при пересечении границы фазового перехода. Таким образом, первое слагаемое здесь учитывает эффект теплового влияния переходного слоя.

Для оценки величины δ_0 вновь рассматривается уравнение переноса тепла (1.1). Поскольку температура в слое меняется вдоль кривой плавления, т.е. слабо, то можно пренебречь правой частью уравнения. Другими словами, внутри слоя пренебрегается кондуктивным переносом тепла по сравнению с конвективным. Тогда сравнение первых двух членов уравнений по порядку величины дает

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{\rho v q c}{\delta_0} \quad (1.5)$$

Здесь c — концентрация расплава.

С учетом того, что температура меняется вдоль кривой плавления, (1.5) перепишется в виде

$$\rho C_p \frac{dT}{dP} \rho g v \sim \frac{\rho v q c}{\delta_0}$$

Или

$$C_p \frac{dT}{dP} \rho g \sim \frac{q c}{\delta_0}$$

Если подставить сюда значения $C_p \approx 10^3$ Дж/(кг · °К), $\frac{dT}{dP} \approx 10^{-7.0}$ К/Па, $\rho g \approx 10^4$ Па/м, $q \approx 3 \times 10^5$ Дж/кг, $c \approx 10^{-3}$, получается $\delta_0 \approx 300$ м.

1.2. Математическая формулировка задачи

Уравнения безынерционных движений в упругой среде запишутся в виде [30]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho_l g_i &= 0, \quad g_i = (0, 0, -1) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \nabla T &= \chi_l \Delta T \\ \sigma_{ik} &= \frac{E}{2(1+\sigma)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{2\sigma}{1-2\sigma} \delta_{ik} \theta \right), \quad i, j = x, y, z \\ \theta &= \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь: σ_{ik} — тензор напряжений; σ — коэффициент Пуассона; u_i — вектор перемещений; T — поле температуры; g_i — вектор напряженности поля тяжести; ρ_l — плотность литосферы; χ_l — температуропроводность; E_l — модуль Юнга; θ — сжимаемость.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости имеют вид [31]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho_a g_i &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T &= \chi_a \Delta T \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}, \quad i, j = x, y, z$$

$$\sigma'_{ik} = \eta_a \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta_a \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

Здесь: p — поле давления; σ'_{ik} — тензор вязких напряжений; $\mathbf{v}_i$ — вектор скорости среды; T — поле температуры; g_i — вектор напряженности поля тяжести; ρ_a — плотность астеносферы; χ_a — температуропроводность; η_a, ζ_a — динамическая и вторая вязкости астеносферы.

Граничные условия

$$z = h_1: u_z = \xi_1, \quad \sigma_z = 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad T = T_1, \quad \tau = x, y$$

$$z = 0: [\sigma_z] = 0, \quad [\sigma_\tau] = 0, \quad [T] = 0, \quad \dot{\xi}_2 = K(T - T_*(P))$$

$$\rho_a(v_z - \dot{\xi}_2) = \rho_l(\dot{u}_z - \dot{\xi}_2), \quad v_x = \dot{u}_x$$

$$-\lambda_a \frac{\partial T_a}{\partial z} + \rho_a(v_z - \dot{\xi}_2)q = -\lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial z}$$

$$z = -h_2: v_z = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad T = T_2$$
(1.7)

Где условия, согласно линейной теории, заданы на невозмущенных границах; квадратные скобки означают скачок функции на границе.

В (1.7) на верхней границе заданы кинематическое условие и условия отсутствия напряжений, а также температура. На общей для слоев границе заданы условия непрерывности напряжений, температуры, потока массы и потока энергии, а также кинетическое уравнение фазового перехода. Необходимо так же добавить кривую фазового равновесия $T_*(P)$ и выражение для кинетического коэффициента K . На нижней границе астеносферы заданы условия прилипания и температура.

Задачу (1.5), (1.6) удобно переписать, используя поля перемещений и скоростей [30, 31].

Литосфера

$$\Delta^2 \mathbf{u} = 0$$

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \theta = -\rho_l g \frac{2(1+\sigma)}{E}, \quad \theta = \operatorname{div} \mathbf{u}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \nabla T = \chi_l \Delta T$$
(1.8)

Астеносфера

$$\Delta^2 \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho_a \mathbf{g} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \chi_a \Delta T$$
(1.9)

2. МЕХАНИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

При механическом равновесии поля зависят только от вертикальной координаты z , а границы занимают горизонтальное невозмущенное положение. В этом случае уравнения (1.7)–(1.9) принимают вид

Литосфера

$$u_z^{(4)} = 0$$

$$u_z'' + \frac{1}{1-2\sigma} \theta' = \rho_l g \frac{2(1+\sigma)}{E}$$
(2.1)

$$T_l'' = 0$$

Астеносфера

$$\begin{aligned} v_z &\equiv 0 \\ p_a' + \rho_a g &= 0 \\ T_a'' &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Граничные условия (1.7) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} z = h_1: \quad u_z' + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \theta &= 0, \quad \theta' - u_z'' = 0 \\ z = 0: \quad u_z' + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \theta &= -\frac{1+\sigma}{E} p \\ \theta' - u_z'' &= 0, \quad u_z = 0 \\ T_l &= T_a = T_* \\ -\lambda_a T_a' &= -\lambda_l T_l' \\ z = -h_2: \quad T_a &= T_n \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь в качестве уровня нулевых перемещений выбрана граница литосферы и астеносферы; штрих означает производную по z .

Решение этих уравнений

Литосфера

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{z(z-2h_1)}{4(1-\sigma)} a_0 \\ \theta &= \frac{1}{2(1-\sigma)} a_0 (z-h_1), \quad a_0 = \rho_l g \frac{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E} \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1+\sigma} \left(u_z' + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \theta \right) \\ \sigma_{zz}' &= \frac{E}{1+\sigma} \left(u_{zz}'' + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \theta' \right) = \frac{E}{1+\sigma} \frac{1}{2(1-2\sigma)} a_0 = \rho_l g \\ T &= T_* - \frac{T_* - T_l}{h_1} z \end{aligned} \quad (2.4)$$

Астеносфера

$$\begin{aligned} p &= -\rho_a g z + \rho_l g h_1 \\ T &= T_2 - \frac{T_2 - T_*}{h_2} (z + h_2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для температуры на границе между литосферой и астеносферой при заданных прочих параметрах выражение имеет вид

$$T_* = \frac{\lambda_1 h_2 T_1 + \lambda_2 h_1 T_2}{\lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1}$$

3. ЗАДАЧА ДЛЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

В дальнейшем будем рассматривать поперечные колебания. Для этого достаточно знать лишь вертикальную составляющую перемещения (скорости) и фактор сжимаемости θ . Считая возмущения механического равновесия малыми, будем использовать уравнение переноса тепла в линейизованном виде.

Используя для возмущений те же обозначения, что и для полных полей, запишем систему уравнений и граничные условия в безразмерном виде, вводя следующие масштабы величин: u_0 — длины; $\gamma_l u_0$ — температуры; $t_0 = u_0^2 / \chi_l$ — времени; $p_0 = \rho_l g u_0$ — давления.

Уравнения движения линейно упругой среды

$$\begin{aligned}\Delta^2 u_z &= 0 \\ \Delta u_z + \frac{1}{1-2\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0, \quad \theta = \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial u_z}{\partial t} &= \Delta T\end{aligned}\quad (3.1)$$

Уравнения движения линейно вязкой жидкости

$$\begin{aligned}\Delta^2 v_z &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + a_2 \Delta v_z &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} - v_z \gamma_2 &= \chi_2 \Delta T\end{aligned}\quad (3.2)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned}z = h_1: \quad u_z &= \xi_1, \quad \xi_1 + \frac{a_1}{1+\sigma} \left(u'_z + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \theta \right) = 0, \quad \theta' - u''_z - k^2 u_z = 0, \quad -\gamma_l \xi_1 + T = 0 \\ z = 0: \quad \xi_2 + \frac{a_1}{1+\sigma} \left(u'_z + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \theta \right) &= \rho_2 \xi_2 - p + 2a_2 v'_z \\ \theta' - u''_z - k^2 u_z &= -(1+\sigma) \frac{a_2}{a_1} (v''_z + k^2 v_z) \\ \rho_2 (v_z - \dot{\xi}_2) &= (\dot{u}_z - \dot{\xi}_2) \\ v'_z &= 2\sigma \dot{u}' + \frac{1-2\sigma}{k^2} \dot{u}''' \\ \dot{\xi}_2 &= a_3 (-\xi_2 + T_l + a_4 (-p + \rho_2 \xi_2)) \\ -\xi_2 + T_l &= -\gamma_2 \xi_2 + T_a \\ a_6 (\dot{T}_l - \dot{\xi}_2) &= T'_l - \lambda_2 T'_a + a_5 (\dot{u}_z - \dot{\xi}_2) \\ z = -h_2: \quad v_z &= 0, \quad v'_z = 0, \quad T = 0\end{aligned}\quad (3.3)$$

Здесь: штрих означает производную по z , точка — по времени; a_i , ($i = 1 \dots 6$) — безразмерные параметры; ξ_i ($i = 1, 2$) — отклонение границ литосферы от невозмущенных положений.

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{E_l}{\rho_l g u_0}, \quad a_2 = \frac{\eta \chi_l}{\rho_l g u_0^3}, \quad a_3 = \frac{K u_0^2 \gamma_l}{\chi_l}, \quad a_4 = \frac{\rho_l g}{\gamma_l} \frac{dT_*}{dp}, \\ a_5 &= \frac{\rho_l q \chi_l}{\lambda_l \gamma_l u_0}, \quad a_6 = \frac{\rho_l C_p \delta_0 \chi_l}{\lambda_l u_0} \\ \lambda_2 &= \frac{\lambda_a}{\lambda_l}, \quad \chi_2 = \frac{\chi_a}{\chi_l}\end{aligned}$$

Решения ищутся в виде нормальных возмущений

$$f(x, z, t) = \exp(\lambda t - i(k_x x + k_y y)) \tilde{f}(z) = \exp(\alpha t + i(\beta t - k_x x - k_y y)) \tilde{f}(z), \quad \lambda = \alpha + i\beta \quad (3.4)$$

Далее амплитуды величин, зависящие от z , обозначены так же, как и сами величины. Тогда, если подставить искомые поля, записанные в виде (3.4) в (3.1)–(3.3), получится система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитуд и соответствующие граничные условия. Общее решение этой системы запишется в виде

Литосфера

$$\begin{aligned} u_z &= (c_1 + c_2 kz) \exp(-kz) + (c_3 + c_4 kz) \exp(kz) \\ \theta &= -2k(1 - 2\sigma)(c_2 \exp(-kz) + c_4 \exp(kz)) \\ T_l &= \lambda(d_1 + d_2 kz) \exp(-kz) + \lambda(d_3 + d_4 kz) \exp(kz) + C_1 \exp(-\omega_1 z) + C_2 \exp(\omega_1 z) \\ \omega_1 &= \sqrt{\lambda + k^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Астеносфера

$$\begin{aligned} v_z &= (c_5 + c_6 kz) \exp(-kz) + (c_7 + c_8 kz) \exp(kz) \\ p &= 2a_2 k(c_6 \exp(-kz) + c_8 \exp(kz)) \\ T_a &= \frac{\gamma_2}{\chi_2}(d_5 + d_6 kz) \exp(-kz) + \frac{\gamma_2}{\chi_2}(d_7 + d_8 kz) \exp(kz) + C_3 \exp(-\omega_2 z) + C_4 \exp(\omega_2 z) \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{\lambda}{\chi_2} + k^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

В (3.5), (3.6) все коэффициенты c_i , C_i , d_i постоянны и пока произвольны.

Из уравнений переноса тепла получена зависимость d_i от c_i

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\lambda} c_1 - \frac{2k^2}{\lambda \omega_1^2} c_2, & d_2 &= \frac{1}{\omega_1^2} c_2 \\ d_3 &= \frac{1}{\lambda} c_3 + \frac{2k^2}{\lambda \omega_1^2} c_4, & d_4 &= \frac{1}{\omega_1^2} c_4 \\ d_5 &= \frac{\chi_2}{\lambda} c_5 - \frac{2k^2 \chi_2}{\lambda \omega_2^2} c_6, & d_6 &= \frac{1}{\omega_2^2} c_6 \\ d_7 &= \frac{\chi_2}{\lambda} c_7 + \frac{2k^2 \chi_2}{\lambda \omega_2^2} c_8, & d_8 &= \frac{1}{\omega_2^2} c_8 \end{aligned}$$

Поскольку система линейная и однородная, то, не ограничивая общности, можно положить $\xi_2 = 1$. Если исключить из условий на поверхности величину ξ_1 , то из (3.3) получится 13 уравнений для определения 13 комплексных величин c_i , ($i = 1 \dots 8$), C_i , ($i = 1 \dots 4$) и λ . Из полученной системы можно найти значения постоянных величин, а вместе с ними и все решение в аналитическом виде.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассматривается двумерная задача в плоскости xz . Решение системы уравнений (3.3) для коэффициентов (3.5), (3.6) найдено градиентными методами итераций. В качестве опорных при расчетах использовались следующие значения величин:

$$\begin{aligned} \rho_l &= 3.14 \times 10^3 \text{ кг/м}^3; \rho_{ll} = 3.2 \times 10^3 \text{ кг/м}^3; \rho_a = \rho_{al} = 3.3 \times 10^3 \text{ кг/м}^3; \rho_2 = \rho_{al}/\rho_{ll} = 1.031; \chi_l = 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}; \\ \lambda_l &= 2.6 \text{ Вт/мК}; \gamma_l = 10^{-2} \text{ }^\circ\text{С/м}; u_0 = 10^2 \text{ м}; g = 9.8 \text{ м/с}^2; \eta_a = 5 \times 10^{17} \text{ Па} \cdot \text{с}; E_l = 5 \times 10^{10} \text{ Па}; \sigma = 0.2; \\ \chi_2 &= 1; \delta_0 = 285 \text{ м}; \lambda_2 = 1; \gamma_2 = 1; h_l = 150 \times 10^3 \text{ м}; h_a = 100 \times 10^3 \text{ м}; T_* = 1500 \text{ }^\circ\text{С}; R = 8.31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{ }^\circ\text{К)}; \\ \Gamma_* &= \frac{dT_*}{dP} = 10^{-7} \text{ }^\circ\text{К/Па}. \end{aligned}$$

Здесь ρ_l , ρ_a — средние плотности литосферы и астеносферы, а ρ_{ll} и ρ_{al} — их значения в окрестности их общей границы.

Процессы ползучести играют существенную роль в нижней литосфере, где они могут приводить к релаксации упругих напряжений. Свойства пород здесь можно описать реологическим законом, который одновременно учитывает линейную упругость и ньютоновскую или нелинейную вязкость. Такие тела называют вязкоупругими. Тем не менее в рассматриваемой задаче, литосферу, включая нижнюю ее часть, несмотря на высокую температуру, можно считать упругим

слоем. Такое предположение опирается на известный факт, что при низких уровнях напряжений и относительно высоких скоростях деформации порода ведет себя как упругое тело [32]. Чтобы убедиться в этом, можно рассмотреть характерное время вязкоупругой релаксации $\tau_{ve} = 2\mu/E$ и сравнить его с истинным характерным временем рассматриваемых процессов τ_0 .

Для того чтобы тело можно было считать упругим, должно выполняться условие

$$\tau_{ve} \gg \tau_0. \quad (4.1)$$

Для литосферы в качестве минимальной оценки вязкости принята величина $\mu = 10^{20}$ Па · с. Характерное время задачи составляет 20 лет. Таким образом, $\tau_0 = 6 \times 10^8$ с.

Для τ_{ve} получается оценка $\tau_{ve} = 2 \times 10^{20} / (5 \times 10^{10}) = 4 \times 10^9$ с. Следовательно, неравенство (4.1) выполнено. При больших вязкостях левая часть (4.1) будет еще больше.

Интересно проверить реологию астеносферы. Для того чтобы астеносферу можно было считать вязкой жидкостью, необходимо выполнение обратного к (4.1) неравенства. Поскольку весовая доля расплавленного вещества порядка всего одного процента, значение модуля Юнга возьмем то же. В статье рассматривались вязкости астеносферы в пределах $\mu = 5 \times 10^{17} \div 5 \times 10^{18}$. Тогда

$$\tau_{ve} = 5 \times 10^{17} \div 5 \times 10^{18} / (5 \times 10^{10}) = 10^7 \div 10^8 \ll \tau_0 = 6 \times 10^8$$

Таким образом, рассмотренная в задаче реология вполне приемлема.

В статье, для определенности, на нижней границе астеносферы рассмотрены условия прилипания и заданная температура. Расчеты были сделаны и для случая плоской границы без касательных напряжений. Результаты относительно слабо отличаются. Во втором случае волна бежит немного быстрее, что предпочтительнее с точки зрения целей работы.

Кинетический коэффициент K рассчитывался по формуле [33]

$$K = \frac{16 r_a v_a M Q_0}{9 R T_k^2} \exp(-E_a / R T_k)$$

где r_a — радиус атома; v_a — частота колебаний атомов в окрестности границы; M — молярный вес; Q_0 — теплота превращения на единицу массы; T_k — критическая температура по Кельвину; R — универсальная газовая постоянная; E_a — энергия активации.

Для расчетов рассматривались значения

$$r_a = 10^{-10} \text{ м}, v_a = 10^{13} \text{ с}^{-1}, Q_0 = 5 \times 10^5 \text{ Дж/}^\circ\text{К}, T_k = 1500 \text{ }^\circ\text{К}, M = 16 \text{ г/моль}$$

Для энергии активации рассматривались два значения. Если в качестве характерного времени взять период колебаний решетки в заданной точке, т.е. $\tau_0 \sim 1$ год, то для отношения характерного времени процесса к характерному времени плавления получатся оценки

$$\tau_0 \times K \approx 1.3 \text{ при } E_a = 144 \text{ кДж/моль}$$

$$\tau_0 \times K \approx 9 \text{ при } E_a = 120 \text{ кДж/моль}$$

Во втором варианте процесс плавления можно считать равновесным. Можно отметить, что для обоих этих случаев результаты качественно схожи, однако с ростом энергии активации скорость волны быстро убывает.

На рис. 2 показана критическая кривая 1 зависимости отношения локальных плотностей слоев на границе сред от длины волны. Пунктиром показана та же кривая, но с учетом поверхностного натяжения границы (переходного слоя) между литосферой и астеносферой. Видно, что вклад поверхностного натяжения в расчетной области (отрезок 2) мал. Ниже этой кривой, механическое равновесие устойчиво, а выше — неустойчиво. Как видно из рис. 2, если взять отношение плотностей астеносферы и литосферы вблизи их границы равным, например, $\rho_2 = 1.031$ (показано штрихпунктиром 3), то при превышении длиной волны критического значения волна затухает. При длинах волны меньших критического возмущение нарастает.

Представляет интерес область, отмеченная кривой 2 на рис. 2, точкам которой соответствуют быстрые затухающие волны. При этом декремент затухания растет при движении вдоль этой кривой слева на право. Групповая же скорость волн при этом на интересующем нас начальном участке так же растет, как показывает кривая 2 на рис. 3. Кривая 1 на рис. 3 есть зависимость групповой скорости нейтральных волн, соответствующих кривой 1 на рис. 2, от их длины.

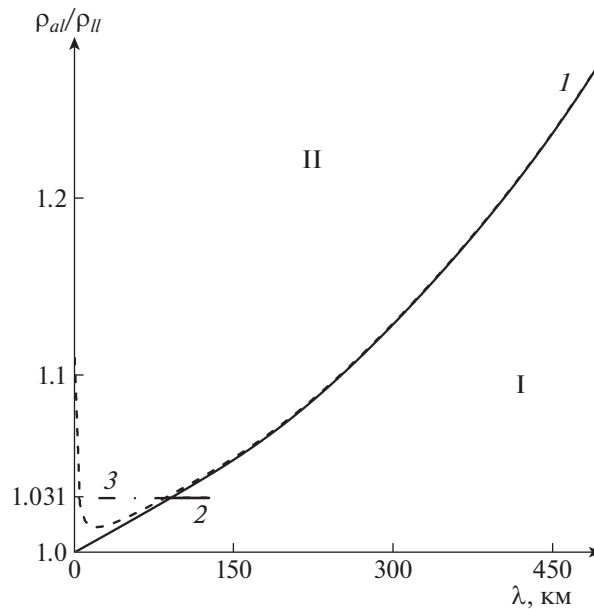


Рис. 2. Граница областей устойчивости (I) и неустойчивости (II) механического равновесия в плоскости длина волны — отношение плотностей слоев в окрестности их границы: маленьким отрезком 2 показана область, характерная для литосферы и астеносферы; 3 указывает рассматриваемое значение отношения плотностей. Пунктир — нейтральная кривая с учетом поверхностного натяжения границы (переходного слоя) между литосферой и астеносферой.

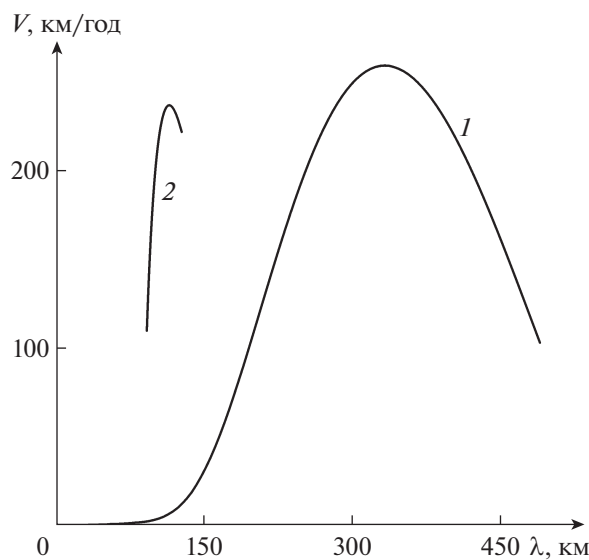


Рис. 3. Зависимость величины групповой скорости волн от длины волны на нейтральной кривой, показанной на рис. 1; отрезок 2 соответствует отрезку 2 на рис. 2.

На рис. 4 показана зависимость величины групповой скорости волны от приведенного модуля Юнга при $\rho_2 = 1.031$, $\alpha = 0.1$ для различных значений теплоты фазового перехода. Из рисунка видно, что увеличение модуля Юнга литосферы приводит к существенному росту групповой скорости волн. Увеличение теплоты фазового перехода — напротив, приводит к резкому уменьшению скорости волны. На рис. 5 приведены аналогичные зависимости для длины волны. Видно, что длина волны так же растет с ростом модуля Юнга.

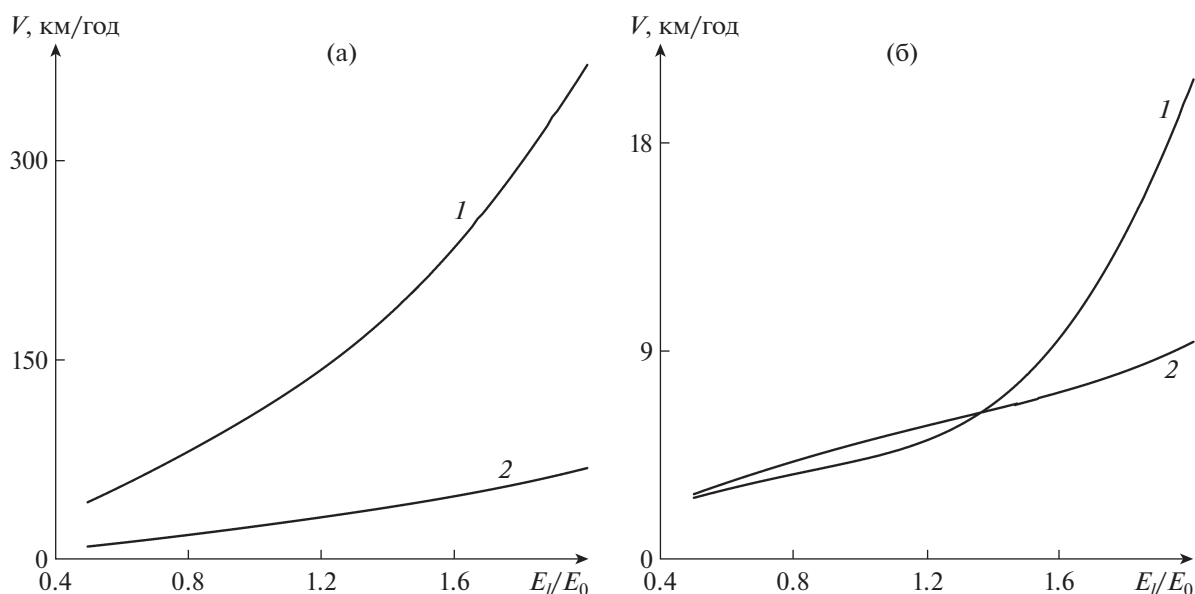


Рис. 4. Зависимость величины групповой скорости волны от приведенного модуля Юнга при $\rho_2 = \rho_{al}/\rho_{II} = 1.031$, $\alpha = 0.1$: $q/q_0 = 1$; 1, 2) для равновесного (а) и неравновесного (б) фазового перехода.

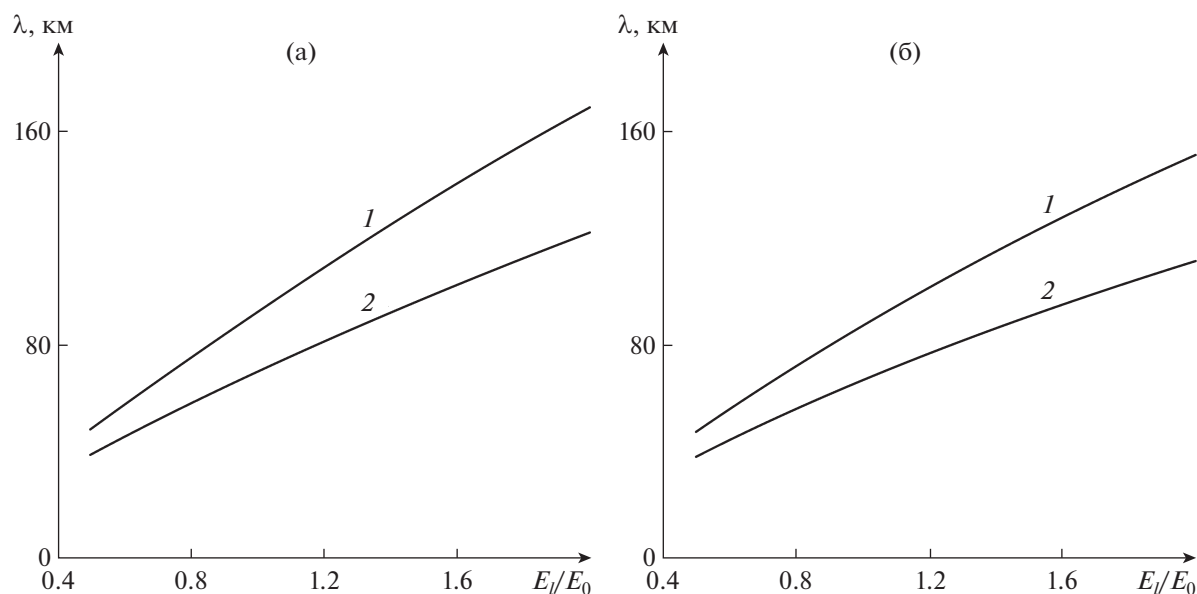


Рис. 5. Зависимость длины волны от приведенного модуля Юнга при $\rho_2 = \rho_{al}/\rho_{II} = 1.031$, $\alpha = 0.1$: $q/q_0 = 1$; 1, 2) для равновесного (а) и неравновесного (б) фазового перехода.

На рис. 6 показана зависимость величины групповой скорости волны от приведенной вязкости астеносферы при $\rho_2 = 1.031$, $\alpha = 0.1$ для различных значений теплоты фазового перехода. Видно, что кривые для равновесного фазового перехода монотонно убывают. При этом рост теплоты фазового перехода приводит к резкому уменьшению скорости. Для неравновесного фазового перехода картина иная. В зависимости от теплоты фазового перехода кривая либо растет, либо ведет себя немонотонно. Эта картина относится к относительно небольшим значениям кинетического коэффициента фазового перехода. При больших коэффициентах вид кривых на рис. 6б переходит к виду типа рис. 6а. На рис. 7 приведены аналогичные зависимости для длины

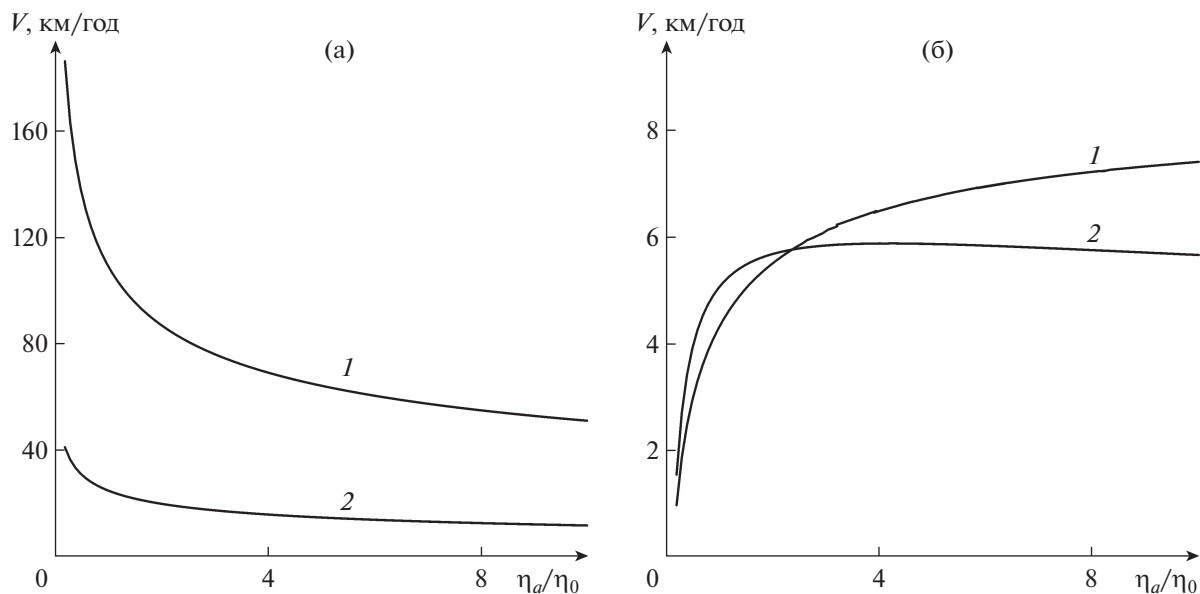


Рис. 6. Зависимость величины групповой скорости волны от приведенной вязкости астеносферы при $\rho_2 = \rho_{al}/\rho_{II} = 1.031$, $\alpha = 0.1$: $q/q_0 = 1$; 1.1 линии (1, 2), для равновесного (а) и неравновесного (б) фазового перехода.

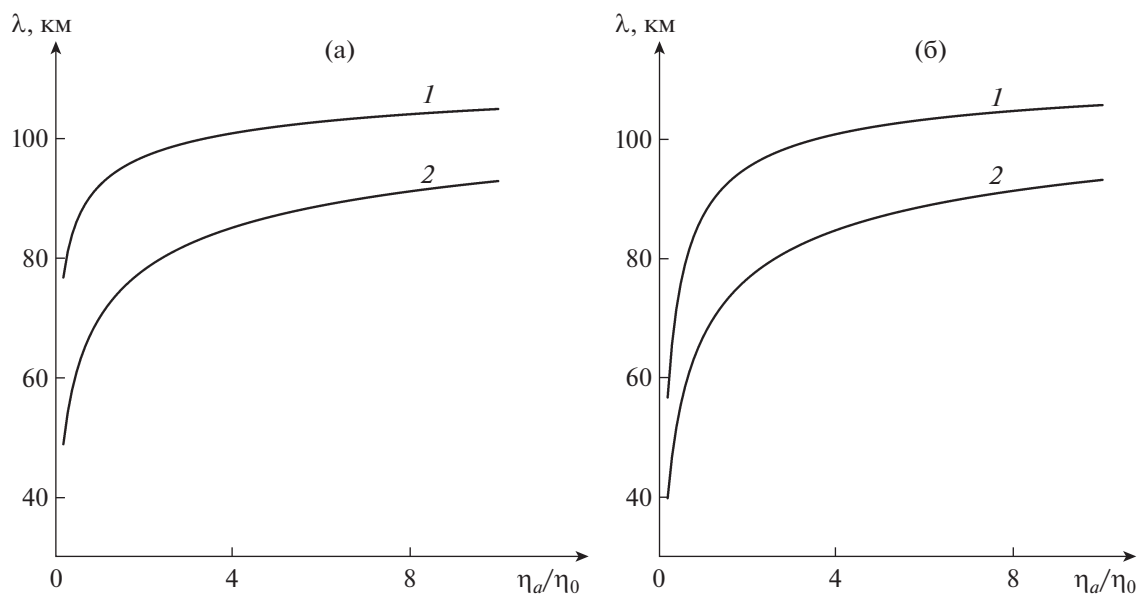


Рис. 7. Зависимость длины волны от приведенной вязкости астеносферы при $\rho_2 = \rho_{al}/\rho_{II} = 1.031$, $\alpha = 0.1$: $q/q_0 = 1$; 1.1 линии (1, 2), для равновесного (а) и неравновесного (б) фазового перехода.

волны. Видно, что длина волны монотонно растет с ростом вязкости астеносферы и убывает с ростом теплоты фазового перехода.

В расчетах предполагалось, что в начале координат точки среды переместились на один метр. По мере движения амплитуда перемещений в волне будет затухать. Закон затухания для различных значений вязкости астеносферы показан на рис. 8. Следует заметить, что для равновесного фазового перехода с уменьшением вязкости перемещения затухают медленнее, а для неравно-

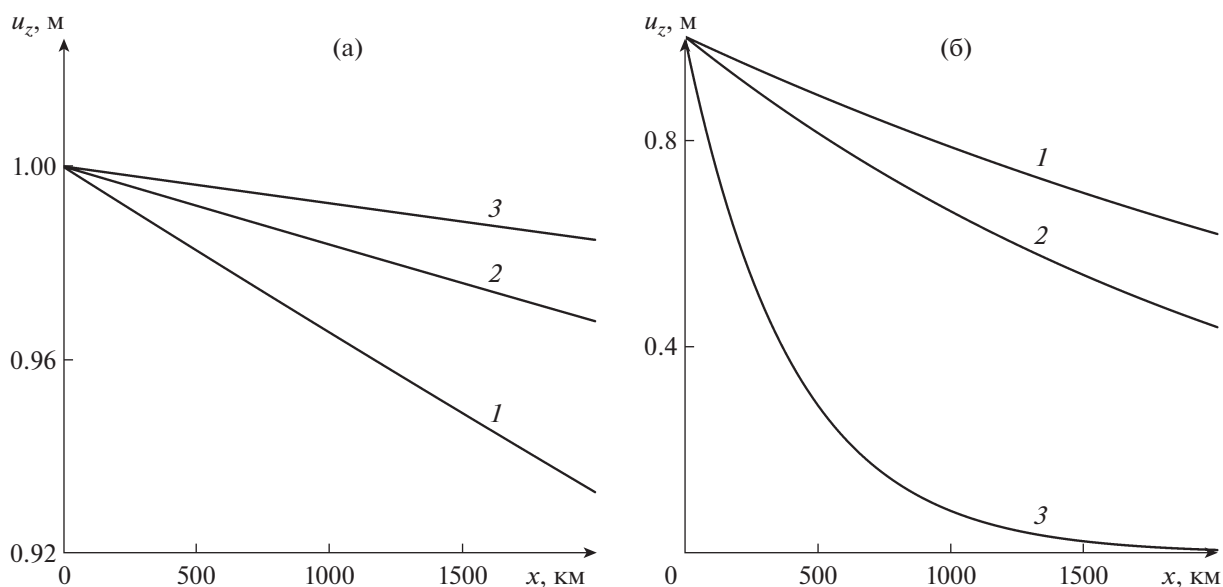


Рис. 8. Закон затухания амплитуды перемещения в пространстве при $\rho_2 = \rho_{al}/\rho_{ll} = 1.031$, $\alpha = 0.1$ и: $\eta_a/\eta_0 = 10$; 1; 0.1 линии (1–3), для равновесного (а) и неравновесного (б) фазового перехода.

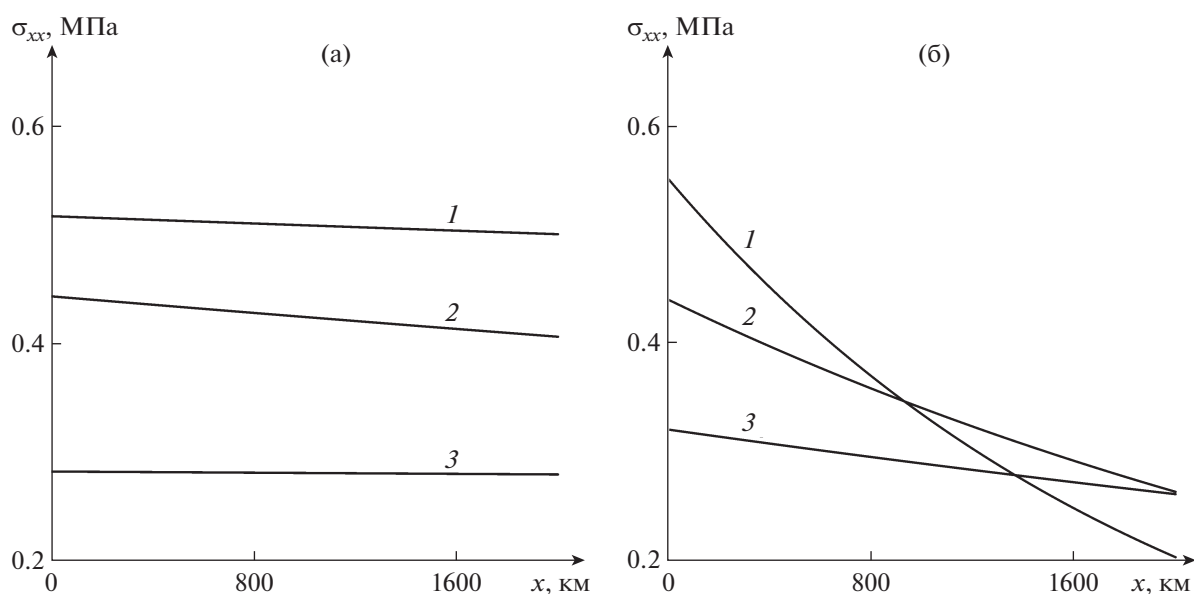


Рис. 9. Закон затухания амплитуды растягивающих напряжений в пространстве при $\rho_2 = \rho_{al}/\rho_{ll} = 1.031$, $\alpha = 0.1$: $(E/E_0, \eta_a/\eta_0, q/q_0) = (1, 1, 1)$; $(1, 20, 1)$; $(2, 1, 1)$ линии (1–3), для равновесного (а) и неравновесного (б) фазового перехода.

весного фазового перехода, при относительно небольших кинетических коэффициентах фазового перехода, картина обратная.

На рис. 9 показана аналогичная закономерность для горизонтальных растягиваемых напряжений. Видно, что напряжения достигают величин порядка одного мегапаскаля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована задача возникновения и распространения деформационных тектонических волн в системе упругая литосфера–вязкая астеносфера в термомеханической постановке, учи-

тывающей фазовый переход на границе двух сред. Показано, что при характерных значениях физических параметров литосферы и астеносферы существуют решения определяющих уравнений с соответствующими граничными условиями в виде умеренно затухающих деформационных тектонических волн в системе литосфера—астеносфера, которые генерируют добавочные напряжения в земной коре и литосфере на больших расстояниях от источника возбуждения волн (порядка первых тысяч километров). Величины этих напряжений вполне достаточны, чтобы явиться триггерным механизмом для возникновения наведенной сейсмичности вдоль пути следования тектонических волн, приводя к наблюдаемой миграции сейсмической активности.

Работа выполнена в рамках государственных заданий: Института океанологии им. Р.П. Ширшова РАН (тема № 0128-2021-0004) и Института проблем геотермии и возобновляемой энергетики — фил. ОИВТ РАН (тема № АААА-А19-119111390085-7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mogi K.* Relationship between shallow and deep seismicity in the western Pacific region // *Tectonophysics*. 1973. V. 17. № 1–2.
2. *Вилькович У.В., Шнирман М.Г.* Волны миграции эпицентров (примеры и модели) // Математические модели строения Земли и прогноз землетрясений. Вычислительная сейсмология. Вып. 14. М.: Наука, 1982. С. 27–37.
3. *Гамбурцев А.Г.* Сейсмический мониторинг литосферы. М.: Наука, 1992. 200 с.
4. *Kasahara K.* Migration of crustal deformation // *Tectonophysics*. 1979. V. 52. № 1–4. P. 329–341.
5. *Allen C.R.* Active faulting in northern Turkey // *California Institute of Technology, California*, 1969. P. 32–34.
6. *Шерман С.И., Горбунова Е.А.* Волновая природа активизации разломов Центральной Азии на базе сейсмического мониторинга // *Физическая мезомеханика*. 2008. Т. 11. № 1. С. 115–122.
7. *Быков В.Г.* Нелинейные волновые процессы в геологических средах. Владивосток: Дальнаука, 2000. 190 с.
8. *Bykov V.G., Trofimenko S.V.* Slow strain waves in blocky geological media from GPS and seismological observations on the Amurian plate // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2016. V. 23. № 6. P. 467–475. <https://doi.org/10.5194/npg-23-467-2016>
9. *Bykov V.G.* Nonlinear waves and solitons in models of fault block geological media // *Russian Geology and Geophysics*. 2015. V. 56. № 5. P. 793–803. <https://doi.org/10.1016/j.rgg.2015.04.010>
10. *Шерман С.И.* Деформационные волны как триггерный механизм сейсмической активности в сейсмических зонах континентальной литосферы // *Геодинамика и тектонофизика*. 2013. Т. 4. № 2. С. 83–117. <https://doi.org/10.5800/GT-2013-4-2-0093>
11. *Gorbunova E.A., Sherman S.I.* Slow deformation waves in the lithosphere: registration, parameters, and geodynamic analysis (Central Asia) // *Russian Journal of Pacific Geology*. 2012. V. 6. № 1. P. 13–20. <https://doi.org/10.1134/S18197>
12. *Степанко А.А.* Структура литосферной мантии Сибирского кратона и сейсמודинамика деформационных волн в Байкальской сейсмической зоне // *Геодинамика и тектонофизика*. 2013. Т. 4. № 4. С. 387–415. <https://doi.org/10.5800/GT-2013-4-4-0108>
13. *Trofimenko S.V., Bykov V.G., Merkulova T.V.* Space-time model for migration of weak earthquakes along the northern boundary of the Amurian microplate // *Journal of Seismology*. 2017. V. 21. № 2. P. 277–286. <https://doi.org/10.1007/s10950-016-9600-x>
14. *Savage J.A.* A theory of creep waves propagation along a transform faults // *Journal of Geophysical Research*. 1971. V. 76. № 8. P. 1954–1966. <https://doi.org/10.1029/JB076i008p01954>
15. *Губерман Ш.А.* D-волны и землетрясения / В сб. Теория и анализ сейсмологических наблюдений. Вычислительная сейсмология. Вып. 12. М.: Наука, 1979. С. 158–188.
16. *Sholz C.* A physical interpretation of the Haicheng earthquake prediction // *Nature*. 1977. V. 267 (5607). P. 121–124. <https://doi.org/10.1038/267121a0>
17. *Makarov P.V., Peryshkin A.Y.* Slow motions as inelastic strain autowaves in ductile and brittle media // *Physical Mesomechanics*. 2017. V. 20. № 2. P. 209–221. <https://doi.org/10.1134/S1029959917020114>
18. *Кузьмин Ю.О., Жуков В.С.* Современная геодинамика и вариации физических свойств горных пород. М.: Изд-во Московского государственного горного университета, 2004. 262 с.
19. *Elsasser W.* Convection and stress propagation in the upper mantle / In *Application of Modern Physics to Earth and Planet. Interior*. New York: Wiley, 1969. P. 223–246.

20. *Melosh H.J.* Nonlinear stress propagation in the Earth's upper mantle // *J. Geophys. Res.* 1976. № 32 (81). P. 5621–5632.
21. *Касахара К.* Механика землетрясений. М.: Мир, 1985. 264 с.
22. *Дубровский В.А.* Тектонические волны // *Изв. АН СССР. Физика Земли.* 1985. № 1. С. 29–33.
23. *Николаевский В.Н., Рамазанов Т.К.* Теория быстрых тектонических волн // *Прикладная математика и механика.* 1985. Т. 49. № 3. С. 426–469.
24. *Маламуд А.С., Николаевский В.Н.* Циклы землетрясений и тектонические волны. Душанбе: Дониш, 1989. 132 с.
25. *Николаевский В.Н., Рамазанов Т.К.* О волнах взаимодействия литосферы с астеносферой / *Гидрогеодинамические предвестники землетрясений.* М.: Наука, 1984. С. 120–128.
26. *Эринген А.К.* Теория микрополярной упругости. Разрушение. М.: Мир. 1975. С. 646–751.
27. *Михайлов Д.Н., Николаевский В.Н.* Тектонические волны ротационного типа с излучением сейсмических сигналов // *Физика Земли.* 2000. № 11. С. 3–10.
28. *Гарагаш И.А.* Микродеформации предварительно напряженной дискретной геофизической среды // *Докл. РАН.* 1996. Т. 347. № 1. С. 95–98.
29. *Гарагаш И.А., Лобковский Л.И.* Деформационные тектонические волны как возможный триггерный механизм активизации эмиссии метана в Арктике // *Арктика: экология и экономика.* 2021. Т. 11. № 1. С. 42–50.
30. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. 4-е изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 248 с.
31. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. 3-е изд., перераб. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с.
32. *Тёркот Д., Шуберт Дж.* Геодинамика: Геологические приложения физики сплошных сред. Ч. 1. Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 360 с.
33. *Любов Б.Я.* Теория кристаллизации в больших объемах. Монография. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. 256 с.