ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2021, № 6, с. 38–50

УДК 532.516.5:532.526.7:532.62

ПУЛЬСИРУЮЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НАД КАВЕРНОЙ, СОДЕРЖАЩЕЙ СЖИМАЕМЫЙ ГАЗОВЫЙ ПУЗЫРЕК

А. И. Агеев[a,*], **А. Н. Осипцов**[a,**]

[a] *МГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия*

**E-mail: aaiageev@mail.ru*

***E-mail: osiptsov@imec.msu.ru*

Поступила в редакцию 15.06.2021 г.
После доработки 22.07.2021 г.
Принята к публикации 22.07.2021 г.

Исследуется задача о двумерном пульсирующем течении вязкой жидкости в плоском канале над прямоугольной микрокаверной, частично или полностью заполненной сжимаемым газом. Такая постановка может моделировать механизм снижения трения при течении вязкой жидкости в ламинарном подслое турбулентного потока над текстурированной полосчатой супергидрофобной поверхностью, содержащей периодически расположенные прямоугольные микрокаверны, заполненные газом. Предполагается, что размер каверн гораздо меньше толщины канала. На макромасштабе решается задача об одномерном нестационарном течении вязкой жидкости в плоском канале с условиями прилипания на стенках при гармоническом изменении перепада давления. Полученное таким образом решение используется для формулировки нестационарных по времени и периодических по пространству граничных условий для течения на масштабе выбранной каверны (микромасштабе), при этом мгновенный объем газового пузырька в каверне зависит от мгновенного значения давления над пузырьком. Течение на микромасштабе над каверной с газовым пузырьком предполагается стоксовым. Численное решение строится с использованием оригинального варианта метода граничных интегральных уравнений. Проведено параметрическое численное исследование поля течения в пульсирующем сдвиговом течении над каверной со сжимаемым газовым пузырьком. Изучены осредненные характеристики эффективного “проскальзывания” жидкости над каверной и снижения трения в пульсирующем течении над полосчатой супергидрофобной стенкой.

Ключевые слова: супергидрофобная поверхность, микрокаверна, газовый пузырек, межфазная граница, эффективное проскальзывание, граничные интегральные уравнения, пульсирующее течение, плоский канал

DOI: 10.31857/S0568528121060013

Поверхности, имеющие структурированную шероховатость (текстуру) в сочетании с химической гидрофобностью называются супергидрофобными поверхностями. В элементах шероховатости (микрокавернах) таких поверхностей, обтекаемых вязкой жидкостью, силами поверхностного натяжения могут удерживаться микропузырьки газа. Такое состояние поверхности называется состоянием Касси [1]. Поскольку на границе пузырьков трение практически отсутствует, на супергидрофобной поверхности возникает осредненное (макроскопическое) проскальзывание жидкости и происходит заметное снижение осредненного трения. Для практических нужд существенный интерес представляет задача оптимизации текстуры супергидрофобных поверхностей с целью минимизации трения при обтекании таких поверхностей вязкой жидкостью. Необходимость решения этой задачи поддерживает интерес к параметрическому численному моделированию течений вязкой жидкости вдоль супергидрофобных поверхностей. Характерный размер микрокаверн супергидрофобных поверхностей, как правило, не превосходит долей миллиметра, поэтому локальное течение над каверной характеризуется малыми числами Рейнольдса. В основном, в литературе рассматриваются текстуры, образованные периодической системой бесконечных прямоугольных микрокаверн, полностью занятых газом или другой маловязкой жидкостью, при этом форма межфазной границы считается известной и заданной. Для плоской межфазной границы и периодических граничных условий на масштабе одной каверны решение такой задачи в приближении Стокса удается получить разложением в ряд Фурье или с использованием теории функций комплексного переменного [2–5]. Однако величина эффективной длины скольжения и снижение трения, вычисленные при таких предположениях, дают слишком завышенные значения по сравнению с результатами имеющихся экспериментальных измерений. Экспериментальные наблюдения течения на масштабе каверн показывают, что форма поверхности пузырька, как правило, искривлена, а каверна может быть лишь частично заполнена газом, т.е. положение мениска может не совпадать с верхними угловыми точками микрокаверны. Учет этих факторов при стационарном обтекании каверн с газовыми пузырьками проведен в работах [6–8], где был развит оригинальный вариант метода граничных интегральных уравнений для оператора Стокса, учитывающий наличие чередующихся граничных условий (прилипание/отсутствие трения) на границах расчетной области. И форма межфазной поверхности, и ее положение по отношению к угловым точкам каверны существенным образом влияют на осредненные характеристики проскальзывания жидкости и снижение осредненного трения. В последние годы в литературе появляются численные расчеты течений вблизи микрокаверн с учетом не только кривизны мениска, но и деформации межфазной поверхности, различных геометрических форм каверны, а также различных отношений вязкостей внешнего потока и среды, заполняющей каверну [9, 10]. Таким образом, можно считать, что факторы, влияющие на эффект снижения трения при ламинарных стационарных течениях вдоль полосчатых супергидрофобных поверхностей, изучены достаточно подробно. В то же время для нестационарных и турбулентных течений вдоль супергидрофобных поверхностей вопрос о возможных механизмах снижения трения остается малоизученным, хотя имеются экспериментальные подтверждения заметного снижения трения на супергидрофобной поверхности в турбулентном потоке [11]. При попытках численного моделирования турбулентных течений в каналах с супергидрофобными стенками обычно ставятся условия проскальзывания Навье (пропорциональность скорости проскальзывания вертикальному градиенту продольной скорости на стенке). При этом для реализации эффекта заметного изменения турбулентного трения в расчетах требуется задавать довольно значительные величины “длины проскальзывания” скорости, превосходящие аналогичные величины для стационарного течения. В [12] обнаружено, что при турбулентном течении в круглой трубе проскальзывание в продольном направлении приводит к снижению сопротивления, а проскальзывание в поперечном направлении, наоборот, увеличивает сопротивление трубы. Имеются и попытки прямого моделирования граничных условий на супергидрофобной стенке чередующимися участками прилипания жидкости и отсутствия касательных напряжений на микромасштабе [13]. Тем не менее практически отсутствуют исследования влияния пульсаций скорости и давления в ламинарном подслое турбулентного потока на поведение газовых пузырьков в микрокавернах супергидрофобных поверхностей и, как результат, на величину осредненного проскальзывания скорости. Исключение составляет краткая заметка [14], в которой численно исследовано сдвиговое стоксово течение над плоской прямоугольной каверной с газовым пузырьком, пульсирующим под действием гармонического изменения внешнего давления. В [14] показано, что при определенных условиях осредненное проскальзывание жидкости над каверной при наложенных пульсациях давления может быть больше, а трение меньше, чем в аналогичном стационарном течении.

В настоящей работе постановка [14] существенно дополнена учетом осцилляций продольной скорости жидкости над каверной, что более соответствует реальным условиям пристеночной зоны турбулентного течения над супергидрофобной поверхностью.

1. ПУЛЬСИРУЮЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

В качестве внешнего течения над каверной с газовым пузырьком для определенности рассмотрим пульсирующее течение вязкой жидкости в плоском канале ширины H^* в декартовых координатах x^*, y^*, где координата x^* направлена по нижней стенке канала, звездочками здесь и далее отмечены размерные переменные.

Уравнения одномерного нестационарного движения жидкости в размерной форме имеют вид

$$\rho^*\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu^*\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}, \quad \frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь u^* – продольная компонента скорости, p^* – давление, μ^* – динамическая вязкость жидкости. Из второго уравнения следует, что $p^* = p^*(t^*, x^*)$. Предполагается монохроматическое пульсационное изменение перепада давления в канале, так что продольный градиент давления имеет вид

$$\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = -K^* - A^* \sin \omega^* t^*$$

Здесь K^* – модуль градиента давления в канале при отсутствии пульсаций давления, A^* и ω^* – амплитуда и частота пульсаций давления. Вводятся следующие безразмерные переменные: $(x^*, y^*) = (xH^*, yH^*)$, $p^* = pH^*K^*$, $u^* = uU^*$, $t^* = t/\omega^*$. Масштаб скорости U^* соответствует течению в канале в отсутствие пульсаций давления: $U^* = K^*H^2/\mu^*$. В безразмерной форме уравнения движения записываются в виде

$$B\frac{\partial u}{\partial t} = 1 + A\sin(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
$$A = \frac{A^*}{K^*}, \quad B = \mathrm{Sh}\cdot\mathrm{Re} = \frac{\rho^*\omega^* H^2}{\mu^*} \tag{1.2}$$

Здесь $\mathrm{Sh} = \omega^* H^*/U^*$ и $\mathrm{Re} = \rho^* U^* H^*/\mu^*$ – числа Струхаля и Рейнольдса течения в канале. Рассматриваются режимы течения, когда все члены в уравнении импульса имеют одинаковый порядок, т.е. $\mathrm{Sh}\cdot\mathrm{Re} = B \sim O(1)$.

В качестве граничных условий для скорости задаются условия прилипания на нижней и верхней стенках канала $u(t, y = 0) = u(t, y = 1) = 0$.

В безразмерной форме распределение давления вдоль канала имеет вид:

$$p = p_0 + A\sin t - (A\sin(t))x \tag{1.3}$$

Здесь p_0 – безразмерное давление в стационарном течении в сечении канала, принятом за начало отсчета. Решение уравнения (1.2) для профиля скорости можно представить в виде суммы стационарного течения и пульсационной компоненты

$$u(t, y) = u_0(y) + u_1(t, y)$$

Профиль классического стационарного течения Пуазейля имеет вид

$$u_0(y) = \frac{1}{2}(y - y^2) \tag{1.4}$$

Из линейности (1.2) следует, что $u_1(t, y)$ можно искать как действительную часть решения представленного ниже уравнения для комплексной функции $V(t, Y)$ с соответствующими граничными условиями

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} - A_1 i \exp(it), \quad Y = y\sqrt{B}, \quad A_1 = \frac{A}{B}, \quad V(t,0) = V(t,\sqrt{B}) = 0 \tag{1.5}$$

Здесь i – мнимая единица. Решение (1.5) ищется в виде $V(t, Y) = A_1\exp(it)g(Y)$, тогда для $g(Y)$ из (1.5) получается краевая задача

$$\frac{d^2 g}{dY^2} - ig - i = 0, \quad g(0) = g(\sqrt{B}) = 0 \tag{1.6}$$

Аналитическое решение обыкновенного дифференциального уравнения (1.6) находится стандартным методом. Это решение можно представить в виде

$$g(Y) = \frac{\mathrm{Cosh}(cY - c\sqrt{B}/2)}{\mathrm{Cosh}(c\sqrt{B}/2)} - 1, \quad c = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \tag{1.7}$$

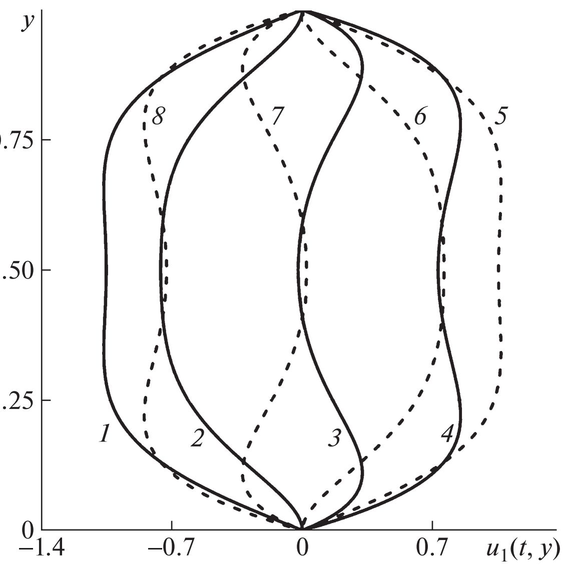

Рис. 1. Мгновенные профили пульсационной составляющей скорости $u_1(t, y)$ для последовательных моментов времени; $B = 100$, $A = 100$, сплошные линии: $t = \{0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4\}$ (*1–4*), пунктирные: $t = \{\pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4\}$ (*5–8*).

Здесь Cosh(Z) – косинус гиперболический от аргумента Z. Теперь находим искомую пульсационную компоненту решения для скорости $u_1(t, y)$, взяв действительную часть от $V(t, Y)$

$$
\begin{gathered}
u_1(t,y) = \mathrm{Real}\{(A/B)g(y\sqrt{B})\exp(it)\} = \\
= \alpha\left[\exp(Y_1)\cos(Y_1+t) + \exp\left(Y_1+\sqrt{\frac{B}{2}}\right)\cos\left(Y_1-\sqrt{\frac{B}{2}}+t\right) + \right. \\
\left. + \exp\left(-Y_1+\sqrt{\frac{B}{2}}\right)\cos\left(-Y_1+\sqrt{\frac{B}{2}}+t\right) + \exp(-Y_1+\sqrt{2B})\cos(t-Y)\right] - \frac{A}{B}\cos(t) \\
\alpha = \frac{A}{B[1+2\exp(\sqrt{B/2})\cos(\sqrt{B/2})+\exp(\sqrt{2B})]}, \quad Y_1 = y\sqrt{\frac{B}{2}}
\end{gathered}
\tag{1.8}
$$

Аналогичные решения, но в других обозначениях, известны в литературе. В частности, в [15] построено решение для пульсирующего течения в канале, справедливое для более общих зависимостей градиента давления от времени.

Следует отметить, что пульсационная составляющая продольной компоненты скорости немонотонно зависит от вертикальной координаты (рис. 1) – локальные максимумы находятся на некотором расстоянии от стенок, изменяющемся в течение периода пульсаций давления.

Полученные выражения для мгновенных значений давления в жидкости $p(t, x)$ и профиля скорости $u(t, y) = u_0(y) + u_1(t, y)$ далее используются для задания граничных условий в задаче обтекания малой одиночной прямоугольной каверны, расположенной на нижней стенке канала и содержащей сжимаемый газ.

Как видно на рис. 2, колебания давления и трения на стенке происходят с одинаковым периодом, но смещенными фазами. Для других значений A качественное поведение кривых не изменяется. При больших значениях B существуют временные интервалы, когда давление уже падает (а значит, пузырек в каверне увеличивается), но трение еще растет (и наоборот). Как правило, увеличение давления над пузырьком приводит к движению межфазной поверхности в глубь каверны и, как следствие, к повышению осредненного трения. Таким образом, в соответствии с решением уравнений Навье–Стокса одновременные колебания давления на стенке и профиля продольной скорости могут приводить как к однонаправленным, так и к противоположно направленным воздействиям на осредненное трение в течении над микрокаверной с газовым пузырьком.

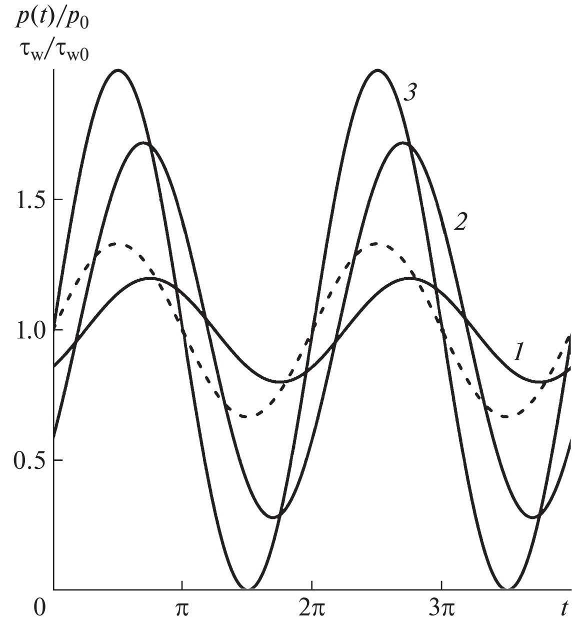

Рис. 2. Характерные зависимости давления (штриховая линия) и производной скорости (безразмерного трения) на стенке (непрерывная линия) от времени; $p_0 = 1$, трение τ_w отнесено к значению $\tau_{w0} = 1/2$, соответствующему течению в канале без пульсаций: *1*–*3* – $A = 1$, $B = 100, 10, 1$.

2. ТЕЧЕНИЕ НА МАСШТАБЕ КАВЕРНЫ

Вблизи стенки рассматривается обтекание внешним пульсирующим потоком одиночной прямоугольной микрокаверны, содержащей сжимаемый газовый пузырек. Такое течение соответствует обтеканию нестационарным потоком выделенного элемента периодической супергидрофобной поверхности, содержащей прямоугольные микрокаверны, частично или полностью заполненные сжимаемым газом (рис. 3).

На рис. 3 не соблюдены геометрические пропорции между размерами макроканала и микрокаверн. В реальности размер одиночной микрокаверны очень мал (не превосходит сотен микрометров), поэтому течение на макромасштабе (масштабе диаметра канала) играет роль "внешнего" асимптотического решения, а на масштабе микрокаверны – роль "внутреннего" асимптотического решения. Соответственно при формулировке граничных условий для течения на масштабе каверны с газовым пузырьком следует использовать пристеночную асимптотику решения, полученного в предыдущем разделе. Для описания течения вблизи каверны вводится локальная декартова система координат с центром в середине отрезка, соединяющего верхние края каверны.

В качестве локального линейного масштаба задачи выбирается длина L^* периода текстуры супергидрофобной стенки канала ($L^* \ll H^*$), в качестве масштаба скорости U^*_{in} выбирается скорость жидкости внешнего стационарного течения при отсутствии пульсаций на расстоянии L^* от стенки; масштаб пространственного перепада давления вблизи каверны $\mu^* U^*/L^*$, а полное размерное давление во «внутренней» области можно представить в виде

$$p^*_{in} = K^* H^* \left(p_0 + A\sin t + \frac{L^*}{H^*} p_{in}(t, x_{in}, y_{in})\right) \tag{2.1}$$

Здесь величина безразмерного давления ($p_0 + A\sin(t)$) совпадает с соответствующей величиной, найденной из внешней задачи в предыдущем разделе в сечении канала над серединой каверны – см. (1.3). Индекс *in* здесь и ниже относится к параметрам течения во внутренней области: $(x^*, y^*) = (x_{in}L^*, y_{in}L^*)$, $u^* = uU^*_{in}$, $v^* = vU^*_{in}$. Локальное течение на масштабе L^* с характерной скоростью U^*_{in} характеризуется малыми числами Рейнольдса, поэтому течение вблизи каверны описывается уравнениями Стокса

$$\nabla^2 \mathbf{u}_{in} - \nabla p_{in} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_{in} = 0 \tag{2.2}$$

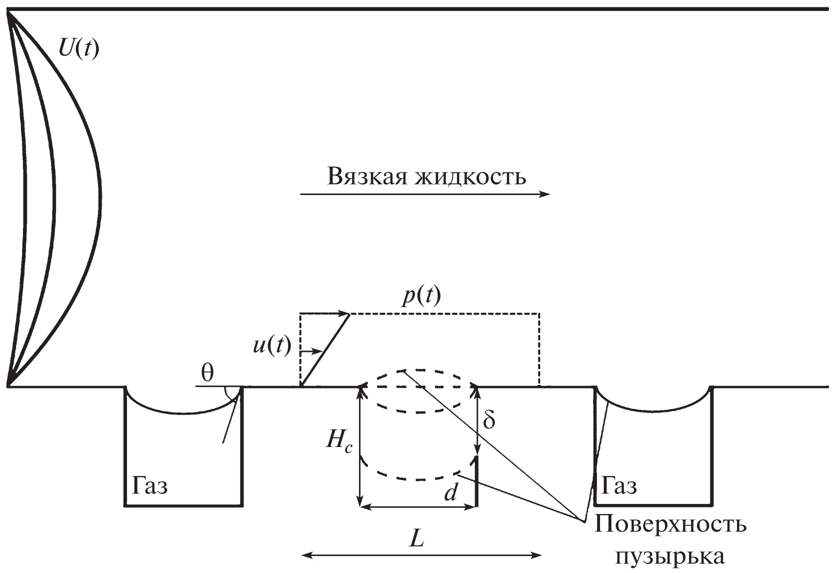

Рис. 3. Условная схема пульсирующего течения в канале над выделенной микрокаверной полосчатой супергидрофобной стенки; L – длина периода, H_c – глубина каверны, d – ширина каверны, δ – начальный сдвиг мениска в каверну; штриховые линии показывают возможные положения границы пузырька в процессе колебаний.

Пульсации внешнего потока оказывают двойственное воздействие на локальное течение в окрестности микрокаверны. Первое воздействие заключается в изменении мгновенного профиля скорости перед и за каверной, второе – в изменении мгновенного давления над каверной, а следовательно – объема газового пузырька и положения его поверхности, что приводит к изменению мгновенной области течения жидкости. Постановка задачи для уравнений (2.2) является квазистационарной – время входит как параметр при задании положения межфазной поверхности и скорости жидкости на границах расчетной области.

Для каждого момента времени на входе и выходе из расчетной области (до и после каверны) задается плоскопараллельный поток с линейным профилем скорости, соответствующем линейной части решения (1.8)

$$u_{in}(t,-1/2,y_{in}) = u_{in}(t,1/2,y_{in}) = (U^*/U_{in}^*)u(y) = u_0(y) + u_1(t,y)$$
$$y_{in} \in [0;1] = y\,H^*/L^*$$

На верхней границе расчетной области ($y_{in} = 1$), согласно выбранным масштабам, имеем: $u_{in} = u_{in}(t, -1/2, 1)$. На твердых стенках ставится условие прилипания $\mathbf{u} = 0$. На поверхности пузырька задаются условия непротекания для скорости жидкости $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0$ и отсутствия касательных напряжений: $\tau_{ij}n_j\mathbf{e}_i = 0$, здесь τ_{ij} – компоненты тензора касательных напряжений, n_j – компоненты вектора нормали, $\mathbf{e}_i$ – базисные векторы, i, j принимают значения 1 или 2; по повторяющимся индексам производится суммирование.

В каждый момент времени давление газа внутри пузырька считается однородным по пространству. Изменение давления вдоль межфазной поверхности в каверне, обусловленное движением жидкости, значительно меньше, чем разность статических давлений в жидкости над каверной и пузырьке воздуха в каверне [6], поэтому форма поверхности пузырька, как в статике, может быть аппроксимирована элементом дуги окружности. Размерный радиус кривизны мениска поверхности пузырька r^* определяется углом смачивания в точках касания мениска со стенками микрокаверны. В рассматриваемой постановке задаче этот угол считается заданным и известным.

В выбранной в данном разделе системе координат $x_{in}^*Oy_{in}^*$ с началом в середине каверны безразмерное уравнение формы поверхности пузырька имеет вид (индекс in далее опущен)

$$y = -\delta \pm \sqrt{r^2 - (d/2)^2} \mp \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-d/2, d/2] \tag{2.3}$$

При обезразмеривании в (2.3) все величины, имеющие размерность длины, отнесены к длине периода L^*; r — безразмерный радиус кривизны поверхности пузырька, d — безразмерная ширина каверны с газом, δ — безразмерный сдвиг краевых точек мениска в каверну. Выбор верхних или нижних знаков в (2.3) зависит от направления выпуклости поверхности пузырька: внутрь каверны или в сторону основного потока жидкости. Заметим, что в течение одного периода колебаний перепада давления в канале направление выпуклости пузырька может изменяться.

Мгновенный объем пузырька $V_g^*(t)$ определяются из условия сохранения массы газа в каверне m_g^*, при этом растворимость газа не учитывается. Предполагается, что газ совершенный, поэтому

$$p_g^*(t^*)V_g^*(t^*) = m_g^* R^* T_g^* \tag{2.4}$$

Индексом g обозначены параметры газа, R^* — газовая постоянная, T_g^* — температура газа, предполагаемая постоянной. Уравнение, связывающее статическое давление над пузырьком в середине каверны p_e^* и давление в пузырьке, имеет вид

$$p_e^*(t^*) - p_g^* = \pm\frac{\Sigma^*}{r^*(t^*)} \tag{2.5}$$

Здесь Σ^* — коэффициент поверхностного натяжения, радиус кривизны пузырька считается постоянным, пока пузырек движется внутри каверны и не достигает ее верхних углов. После того, как крайние точки мениска достигают верхних углов каверны, радиус кривизны находится из условий известного объема пузырька и уравнения дуги окружности, закрепленной в угловых точках каверны. Пульсирующее статическое давление p_e^* над каверной связано с решением макрозадачи для распределения давления (1.3) следующим образом:

$$p_e^*(t) = K^*H^*(p_0 + A\sin(t)) \tag{2.6}$$

Таким образом, при заданных значениях массы газа в пузырьке, температуры газа и угла смачивания постановка задачи об определении формы и положения межфазной поверхности в каверне (2.2)–(2.6) становится замкнутой и связанной с внешней задачей пульсирующего течения в канале. Следует отметить, что амплитуда колебаний давления в пузырьке может существенно варьироваться в зависимости от отношения амплитуды колебаний градиента давления в канале A к величине локального статического давления над каверной p_0; т.е. для различных каверн, расположенных вдоль нижней стенки канала, эта амплитуда различается. Поэтому при обсуждении результатов расчетов будет рассмотрено несколько качественно различных случаев колебаний мениска пузырька, представляющих наибольший интерес.

Для решения уравнений Стокса (2.2) при заданных мгновенных профиле скорости жидкости и положении мениска использован метод граничных интегральных уравнений [16], точнее — вариант алгоритма этого метода, разработанный ранее в [6–8]. Данный метод имеет существенные преимущества по сравнению с конечно-разностными методами решения уравнений Стокса, поскольку он позволяет снизить на единицу размерность исходной задачи и избежать проблем, связанных с конечно-разностной аппроксимацией бесконечных производных параметров вблизи точек сопряжения граничных условий прилипания на твердых стенках и отсутствия касательных напряжений на поверхности пузырька. Согласно методу граничных интегральных уравнений поле скорости жидкости $\mathbf{u}$, удовлетворяющее уравнениям (2.2), может быть получено сверткой фундаментальных решений оператора Стокса с некоторыми их заранее неизвестными плотностями, распределенными по границе области течения

$$\begin{gathered}\Lambda u_j(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma f_i(\mathbf{x})G_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,dl(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma u_i(\mathbf{x})T_{ijk}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)n_k(\mathbf{x})\,dl(\mathbf{x}) \\ G_{ij} = -\delta_{ij}\ln r + \frac{\xi_i\xi_j}{r^2}, \quad T_{ijk} = -4\frac{\xi_i\xi_j\xi_k}{r^4} \\ \boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \quad r = |\boldsymbol{\xi}|\end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ и $T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ — фундаментальные решения двумерного оператора Стокса "стокслет" и "стресслет"; $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_0$ — точки, лежащие на границе или внутри расчетной области соответственно; Λ равняется 1/2 или 1 для граничных и внутренних точек расчетной области; Γ — граница расчетной области; $\mathbf{f} = \sigma_{ij} n_j \mathbf{e}_i$ – вектор напряжений; i, j и k равняются 1 или 2; по повторяющимся индексам производится суммирование.

Плотности распределения фундаментальных решений находятся из граничных интегральных уравнений (2.7), записанных для точек границы расчетной области. В результате решения этих уравнений также вычисляется скорость жидкости на межфазной границе. Численное решение граничных интегральных уравнений находится методом коллокаций, при этом граница расчетной области представляется в виде полигональной кривой, содержащей прямолинейные участки ("элементы"), а интегралы заменяются дискретными суммами локальных интегралов по каждому элементу. На каждом элементе плотности распределения "стресслетов" и "стокслетов" считаются постоянными. В результате получается система линейных алгебраических уравнений для дискретных значений указанных плотностей. При записи граничных интегральных уравнений на элементах, где $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \to 0$, возникают два типа сингулярностей: логарифмическая и типа $1/r$. Интегралы по элементам, содержащим сингулярности, вычисляются аналитически с помощью введения локальной ортогональной системы координат с началом в середине элемента, так же как в [18]. Интегралы по другим элементам вычисляются с использованием квадратурных формул пятого порядка. К полученной системе линейных алгебраических уравнений необходимо добавить уравнения, соответствующие граничным условиям, заданным на межфазной границе и на входном/выходном сечениях канала, которые понимаются в смысле уравнений, записанных для граничных точек. Периодические граничные условия для точек, лежащих на входном/выходном сечениях расчетной области, заменяются их разностным аналогом, который записывается для каждой точки входного/выходного сечения расчетной области и добавляется к системе линейных алгебраических уравнений в качестве дополнительных уравнений для неизвестных компонент вектора скорости $\mathbf{u}$. Получаемая в итоге система линейных алгебраических уравнений высокого порядка решается стандартным методом Гаусса. В наших расчетах типичное число граничных элементов достигало порядка 10^3. Это обеспечивало достаточную точность вычисления всех требуемых параметров течения (до двух значащих цифр), что проверялось дальнейшим увеличением числа граничных элементов.

Помимо [6–8], в последнее время метод граничных интегральных уравнений начал применяться и другими авторами для численного исследования течений вязкой жидкости вдоль супергидрофобных поверхностей. Например, в [17] использован вариант метода граничных уравнений для бигармонического уравнения, решение для которого строится в переменных "функция тока – завихренность". В [9] и [18] метод граничных интегральных уравнений применен для исследования стоксова течения жидкости над кавернами, заполненными другой вязкой жидкостью при конечном отношении вязкостей.

После определения поля скорости в жидкости и на поверхности пузырька из решения системы граничных интегральных уравнений, удовлетворяющих заданным граничным условиям, вычисляются мгновенные, осредненные по длине текстуры поверхности эффективные характеристики супергидрофобной поверхности: $u_w = \langle u_{in\,w} \rangle$ – осредненная скорость проскальзывания жидкости и $\tau_w = \langle \partial u_{in}/\partial y \rangle|_w$ – величина, пропорциональная осредненному трению на стенке. Для пузырька, выпуклого внутрь каверны, осредненную "длину скольжения" можно вычислить непосредственно по формуле $b = \langle u_{in\,w} \rangle / (\langle \partial u_{in}/\partial y \rangle|_w)$. Здесь $\langle \cdot \rangle$ обозначает операцию осреднения по длине периода текстуры, содержащего каверну, индекс w соответствует параметрам, вычисляемым на линии, проходящей через углы каверн. Для пузырька, поверхность которого выпучивается из каверны в область основного потока жидкости, используется специальная процедура вычисления осредненных величин скорости проскальзывания и трения, предложенная ранее в [8]. После вычисления мгновенных значений величин, осредненных по периоду текстуры, можно провести и осреднение по периоду пульсаций.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В работах [7, 8] было показано, что для периодической системы каверн, расположенных на супергидрофобной стенке, периодический профиль скорости, который вырабатывается между кавернами, мало отличается от линейного, когда система каверн достаточно разрежена ($d^*/L^* < 0.5$). Поэтому ниже представлены результаты расчета осредненных параметров течения на стенке u_w, τ_w при $d^*/L^* = 0.5$ и 0.6. Для меньших значений d^*/L^* эффекты, обусловленные пульсациями в потоке и смещением точек закрепления мениска в каверне, качественно повторяют представленные ниже результаты.

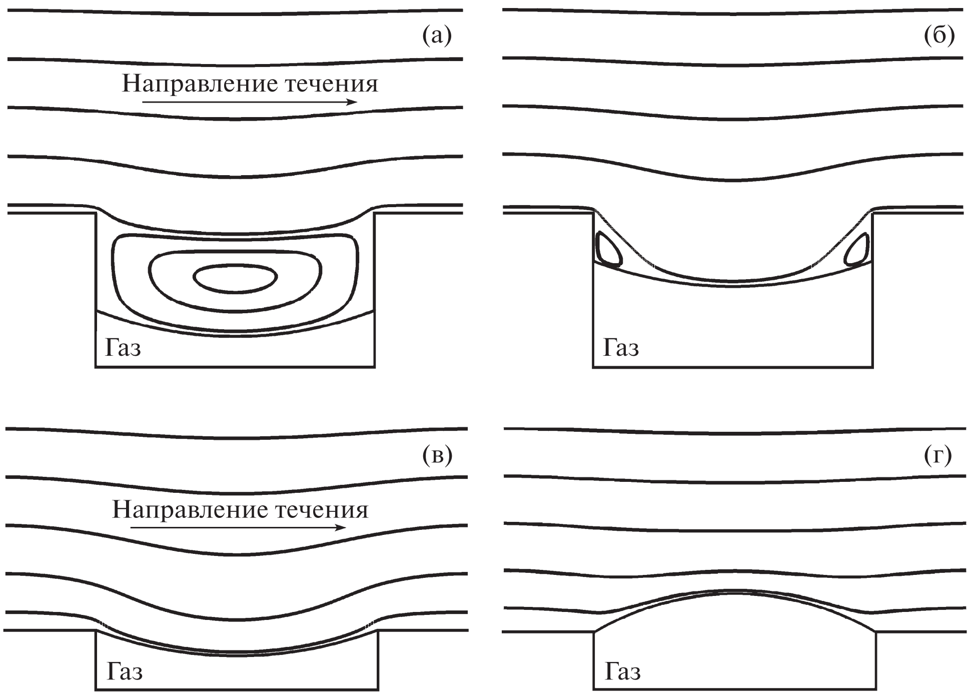

Рис. 4. Мгновенные картины линий тока над газовым пузырьком в каверне с $d^*/L^* = 0.6$, $H_c^*/L^* = 0.5$: (а, б) – $\delta^*/L^* = 0.2$ ($t = \pi/2$), 0.1 ($t = 0, \pi, 2\pi$), $\theta = -20°$; (в, г) – $\delta^*/L^* = 0$, $\theta = -20°$ ($t = 1.2\pi, 1.8\pi$), угол $\theta = 30°$ ($t = 3\pi/2$).

На рис. 4 показаны мгновенные картины линий тока в некоторые моменты времени, вычисленные для каверны с $d^*/L^* = 0.6$, $H_c^*/L^* = 0.5$ и начального условия $\delta^*/L^* = 0.1$, угол $\theta = -20°$; амплитуда пульсаций локального статического давления над пузырьком ~60%. Здесь θ есть угол между горизонталью и поверхностью пузырька (см. рис. 3). Представленные картины линий тока отражают основные особенности перестройки течения, происходящей в процессе одного колебания поверхности пузырька: образование одного большого вихря, занимающего все пространство в каверне над поверхностью пузырька; образование вихревых областей вблизи точек закрепления межфазной границы со стенками каверны; сдвиговое течение жидкости вдоль межфазной поверхности, когда каверна полностью занята газовым пузырьком. При этом поверхность пузырька может быть выпуклой в каверну или выступать из нее. Для более глубоких каверн внутри каверны могут возникать два крупных, противоположно вращающихся вихря.

Анализ мгновенных картин линий тока в расчетах показал, что структура течения жидкости над межфазной границей определяется долей газового участка d^*/L^*, глубиной каверны H_c^*/L^*, начальным положением мениска в каверне δ^*/L^* и мгновенной формой поверхности пузырька, определяемой амплитудой пульсаций давления над каверной.

На рис. 5–8 представлены зависимости от времени мгновенных значений осредненных по периоду L^* скорости проскальзывания u_w и трения τ_w, вычисленных для некоторых наборов параметров внешнего течения и геометрических характеристик начальной области течения, соответствующих качественно различным картинам колебаний межфазной поверхности. Для всех представленных расчетов значение безразмерного статического давления над каверной положено равной $p_0 = 1$, поэтому величина параметра A определяет амплитуду колебаний давления.

В расчетах, представленных на рис. 5, начальное состояние – искривленная межфазная граница, закрепленная в угловых точках каверны $\delta^*/L^* = 0$; предельное состояние, соответствующее минимальному локальному значению давления над пузырьком – прямолинейная форма межфазной границы, закрепленная в угловых точках каверны. Пульсации $\partial u/\partial y$ на стенке перед и за каверной в расчетах ~15%. Вычисленные значения u_w, τ_w отнесены к u_{w0}, τ_{w0}, соответствующим такому же начальному состоянию пузырька в стационарном течении в канале с профилем Пуазейля. Штриховыми линиями показаны расчеты, в которых пренебрегалось пульсациями профиля скорости, но учитывались пульсации давления, как в [14]. При $0 < t < 3.14$ давление в каверне больше начального значения, точки закрепления мениска смещаются относительно

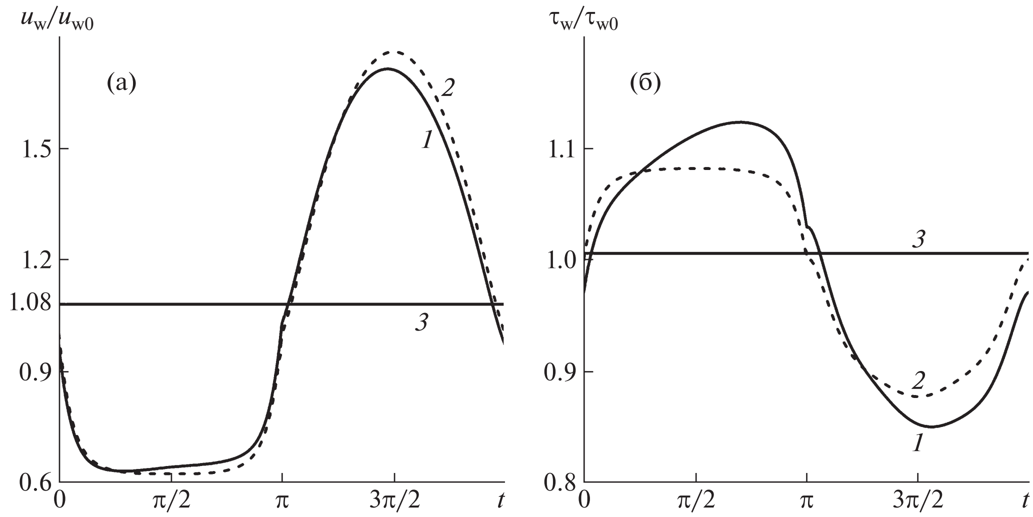

Рис. 5. Характерная зависимость мгновенных значений скорости проскальзывания жидкости u_w (а) и касательного трения τ_w (б), осредненных по пространственному периоду: *1* – пульсационное течение, *2* – пульсационное течение без учета пульсаций скорости, *3* – среднее значение эффективных параметров за период пульсаций давления; $A = 0.13$, $B = 1$, $H_c^*/L^* = 1$, $d^*/L^* = 0.5$, $\theta = -40°$.

вертикальных стенок каверны, а форма поверхности пузырька не изменяется; при $3.14 < t < 6.28$ – точки закрепления мениска совпадают с угловыми точками каверны, газ в каверне расширяется, а форма поверхности пузырька изменяется и стремится к предельному состоянию. При сжатии газа происходит ухудшение, а при расширении газа и выпрямлении межфазной границы – улучшение мгновенных характеристик супергидрофобной поверхности по сравнению с начальным состоянием. Для других значений геометрических параметров каверны и том же начальном состоянии пузырька зависимости мгновенных значений u_w, τ_w от t качественно совпадают с кривыми, представленными на рис. 5. Отсутствие симметрии у кривых (*1*) относительно четверти периода обусловлено сдвигом фаз у пульсаций давления над пузырьком и наклона мгновенного профиля скорости вблизи стенки. При учете в расчетах только пульсаций давления ветви кривых симметричны относительно четверти периода пульсаций (*2*). Среднее за период пульсаций значение эффективной длины скольжения для пульсационного течения $b = u_w/\tau_w \approx 0.03$, для отношения "длин скольжения" скорости в течениях с пульсациями и без пульсаций получаем $b/b_0 \approx 1.07$. Таким образом, для данного начального положения мениска и рассмотренных амплитудах колебаний местного давления над пузырьком, а также угла наклона набегающего на каверну сдвигового потока наложенные пульсации немного увеличивают "длину скольжения" скорости (основную характеристику эффективности снижения сопротивления на супергидрофобной поверхности) по сравнению со стационарным течением.

На рис. 6 представлена зависимость мгновенных значений u_w, τ_w, вычисленных для другого начального положения пузырька в каверне. В момент начала пульсаций $t = 0$ точки закрепления мениска смещены внутрь каверны, т.е. пузырек занимает только часть каверны. Предельное положение, соответствующее минимальному значению давления над пузырьком – прямолинейная межфазная граница, закрепленная в угловых точках каверны. Пульсации $\partial u/\partial y$ на стенке перед и за каверной в расчетах ~40%. Полученные результаты отнесены к u_{w0}, τ_{w0}, вычисленных для того же начального состояния пузырька в стационарном течении. При $0 < t < 3.14$ давление над межфазной границей больше начального давления, газ в каверне дополнительно сжимается, и мениск меняет свое положение относительно стенок каверны, при этом форма межфазной поверхности не изменяется; при $3.14 < t < 6.28$ – газ расширяется, точки закрепления мениска поднимаются до угловых точек каверны, форма межфазной границы стремится к предельному состоянию. При сжатии газа происходит ухудшение мгновенных характеристик, важных для супергидрофобной поверхности (длина скольжения), а при расширении газа и выпрямлении межфазной границы происходит улучшение этих характеристик по сравнению с начальным состоянием газа в каверне. Для других геометрических параметров каверны при том же начальном состоянии пузырька зависимость мгновенных значений параметров супергидрофобной поверх-

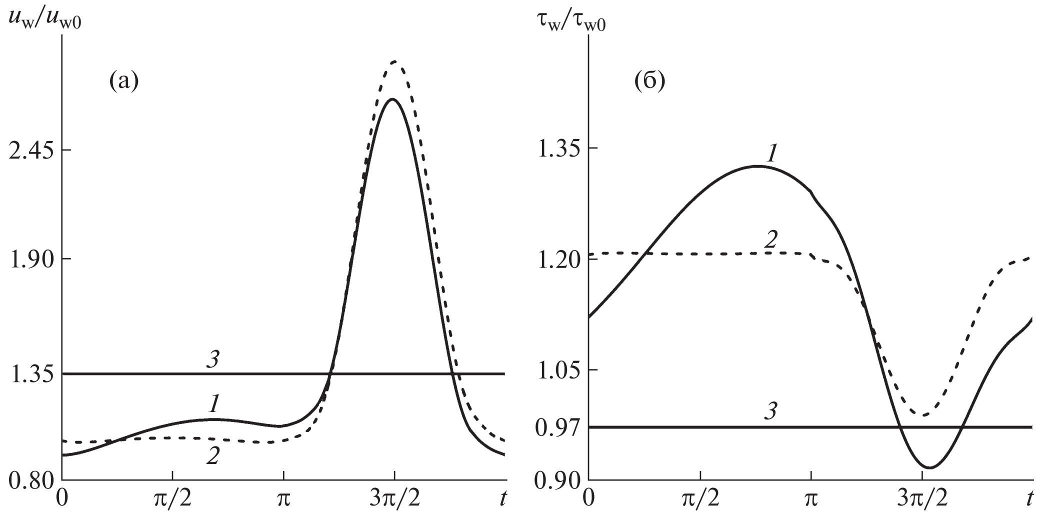

Рис. 6. Характерная зависимость мгновенных значений скорости проскальзывания жидкости u_w (а) и τ_w (б), осредненных по пространственному периоду: *1* – пульсационное течение, *2* – течение без пульсаций профиля скорости, *3* – среднее значение эффективных параметров за период пульсаций давления; $A = 0.46$, $B = 1$, $H_c^*/L^* = 0.5$, $d^*/L^* = 0.5$, $\delta^*/L^* = 0.1$, $\theta = -10°$.

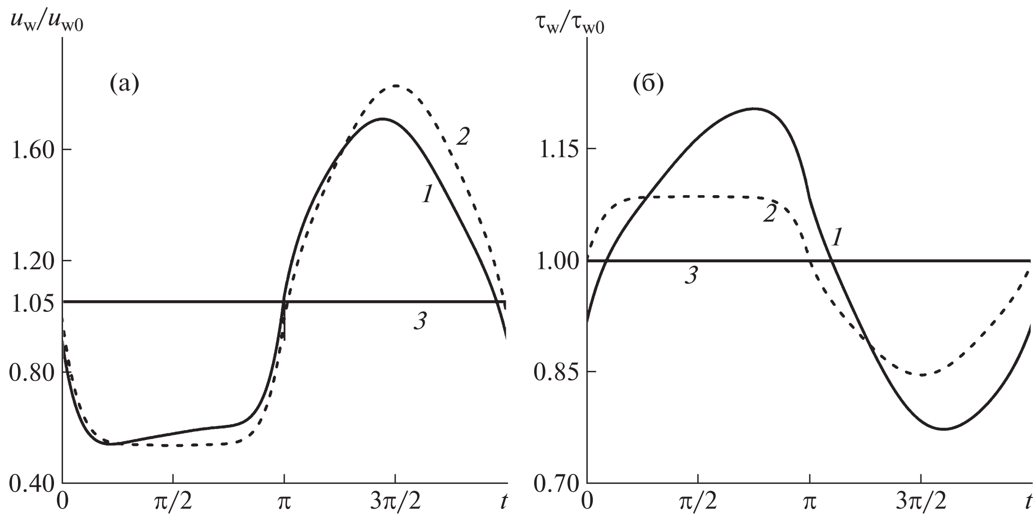

Рис. 7. Характерная зависимость мгновенных значений скорости проскальзывания жидкости u_w (а) и τ_w (б), осредненных по пространственному периоду: *1* – пульсационное течение, *2* – течение без пульсаций профиля скорости, *3* – среднее значение эффективных параметров за период пульсаций давления; $A = 0.22$, $B = 1$, $H_c/L = 1$, $d^*/L^* = 0.6$, $\theta = -30°$.

ности качественно совпадает с результатами на рис. 6. Из анализа результатов для рассмотренного случая следует, что среднее за период пульсаций значение скорости проскальзывания жидкости u_w меньше значения, соответствующего предыдущему рассмотренному случаю, когда в начальном состоянии газ занимал весь объем каверны, а точки закрепления мениска совпадали с угловыми точками каверны. В то же время среднее за период пульсаций значение τ_w существенно больше значения, соответствующего случаю закрепления межфазной границы в угловых точках каверны при тех же значениях A, B. Среднее за период пульсаций значение эффективной длины скольжения для рассматриваемого в работе пульсационного течения $b = u_w/\tau_w \approx 0.024$, а отношение длин скольжения скорости $b/b_0 \approx 1.39$. В данном случае наложенные колебания значительно улучшают свойство супергидрофобной поверхности снижать осредненное сопротивление трения.

На рис. 7 представлены результаты расчетов для ситуации, при которой после сжатия газа происходит его расширение с выпучиванием поверхности пузырька из каверны. В момент нача-

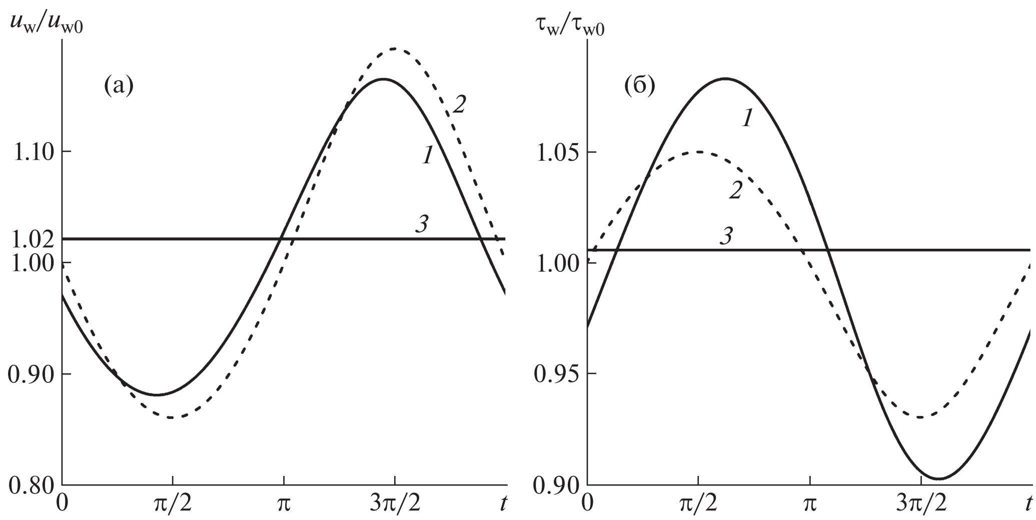

Рис. 8. Характерная зависимость мгновенных значений скорости проскальзывания жидкости u_w (а) и τ_w (б), осредненных по пространственному периоду: *1* – пульсационное течение, *2* – течение без пульсаций профиля скорости, *3* – среднее значение эффективных параметров за период пульсаций давления; $A = 0.08$, $B = 1$, $Hc/L = 1$, $d^*/L^* = 0.6$, $\theta = 20°$.

ла пульсаций $t = 0$ межфазная граница закреплена в угловых точках каверны; предельное положение – поверхность пузырька выступает из каверны. Пульсации $\partial u/\partial y$ на стенке перед и за каверной в расчетах ~25%. Результаты отнесены к u_{w0}, τ_{w0}, вычисленных для того же начального состояния пузырька в стационарном течении Пуазейля. Для других значений начальных данных и амплитуды пульсаций давления, определяющей интенсивность выпучивания газа из каверны, результаты качественно повторяют представленные на рис. 7. Среднее за период пульсаций значение эффективной длины скольжения для пульсационного течения $b = u_w/\tau_w \approx 0.05$, а $b/b_0 \approx 1.05$.

На рис. 8 представлены результаты для ситуации, когда в начальном состоянии $t = 0$ межфазная граница закреплена в угловых точках каверны и выступает из каверны во внешнее течение; предельное состояние, соответствующее максимальному значению местного давления над каверной – пузырек с прямолинейной межфазной границей. Пульсации $\partial u/\partial y$ на стенке перед и за каверной в расчетах ~9%. Результаты осредненных по L^* параметров отнесены к u_{w0}, τ_{w0}, вычисленных для того же начального состояния пузырька в стационарном течении при отсутствии пульсаций. Среднее за период пульсаций значение эффективной длины скольжения для пульсационного течения $b = u_w/\tau_w = 0.091$, $b/b_0 \approx 1.02$.

Анализ пульсаций объема газа в каверне, обусловленных пульсациями во внешнем потоке, показывает, что в широком диапазоне параметров существует временной интервал, когда точки закрепления мениска смещены внутрь каверны, при этом мгновенные свойства супергидрофобной поверхности существенно ухудшаются. Тем не менее основной качественный результат, полученный в расчетах, состоит в том, что небольшие гармонические колебания давления и скорости обтекания супергидрофобной поверхности с кавернами, занятыми газовыми пузырьками, не уменьшают (а для некоторых начальных положений мениска в каверне, даже заметно увеличивают) эффективную “длину проскальзывания” скорости потока на стенке, т.е. способствует снижению осредненного трения на супергидрофобной поверхности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведенных параметрических расчетов пульсирующего течения вязкой жидкости над двумерной микрокаверной с газовым пузырьком получены оценки изменения осредненных характеристик обтекания каверны (скорости скольжения, осредненного трения и “длины скольжения”) для различных параметров наложенных колебаний скорости и давления, а также исходных положений границы пузырька в каверне. Показано, что по сравнению со стационарным течением наложение колебаний не ухудшает (а при некоторых условиях даже улучшает) осредненные характеристики проскальзывания скорости вязкого потока и снижения трения в течении над супергидрофобной поверхностью полосчатой структуры с микрокавернами, занятыми газовыми пузырьками. Полученные результаты объясняют возможный механизм заметного снижения трения в турбулентных режимах течениях вязкой среды вдоль супергидрофобных поверхностей.

Работа выполнена по госбюджетному плану МГУ при частичной поддержке гранта РФФИ № 20-01-00103.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rothstein J.P.* Slip on superhydrophobic surfaces // Annu. Rev. Fluid Mech. 2010. V. 42. P. 89–109. https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-121108-145558
2. *Philip J.R.* Flows satisfying mixed no-slip and no-shear conditions // J. Appl. Math. Phys. 1972. V. 23. P. 353–372. https://doi.org/10.1007/BF01595477
3. *Vinogradova O.I., Belyaev A.V.* Wetting, roughness and flow boundary conditions // J. Phys.: Condens. Matter. 2011. V. 23. P. 184104. https://doi.org/10.1088/0953-8984/23/18/184104
4. *Teo C.J., Khoo B.C.* Analysis of Stokes flow in microchannels with superhydrophobic surfaces containing periodic array of micro-grooves // Microfluid and Nanofluid. 2009. V. 7. P. 353–382. https://doi.org/10.1007/s10404-008-0387-0
5. *Schonecker C., Hardt S.* Longitudinal and transverse flow over a cavity containing a second immiscible fluid // J. Fluid Mech. 2013. V. 717. P. 376–394. https://doi.org/10.1017/jfm.2012.577
6. *Агеев А.И., Осипцов А.Н.* Стоксово течение над каверной супергидрофобной поверхности, содержащей пузырек газа // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 6. С. 35–49.
7. *Ageev A.I., Golubkina I.V., Osiptsov A.N.* Application of boundary element method to Stokes flows over a striped superhydrophobic surface with trapped gas bubbles // Phys. Fluids. 2018. V. 30 (1). P. 012102. https://doi.org/10.1063/1.5009631
8. *Агеев А.И., Осипцов А.Н.* Стоксово течение в микроканале с супергидрофобными стенками // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 2. С. 59–71. https://doi.org/10.1134/S0568528119020014
9. *Alinovi E., Bottaro A.* Apparent slip and drag reduction for the flow over superhydrophobic and lubricant-impregnated surfaces // Phys. Rev. Fluids. 2018. V. 3 (12). P. 124002. https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.3.124002
10. *Asmolov E.S., Nizkaya T.V., Vinogradova O.I.* Flow-driven collapse of lubricant-infused surfaces // J. Fluid Mech. 2020. V. 901. P. A34. https://doi.org/10.1017/jfm.2020.537
11. *Henoch C., Krupenkin T.N., Kolodner P., Taylor J.A., Hodes M.S., Lyons A.M., Peguero C., Breuer K.* Turbulent drag reduction using superhydrophobic surfaces // Collection of Technical Papers: Third AIAA Flow Control Conference. 2006. V. 2. P. 840. https://doi.org/10.2514/6.2006-3192
12. *Min T., Kim J.* Effects of hydrophobic surface on skin-friction drag reduction // Physics of Fluids. 2004. V. 16 (7). P. L55. https://doi.org/10.1063/1.1755723
13. *Rastegari A., Rayhaneh A.* On the mechanism of turbulent drag reduction with super-hydrophobic surfaces // J. Fluid Mech. 2015. V. 773. P. R4. https://doi.org/10.1017/jfm.2015.266
14. *Агеев А.И., Осипцов А.Н.* Сдвиговое течение вязкой жидкости над каверной, содержащей пульсирующий пузырек газа // Доклады РАН. 2020. Т. 493. С. 38–41. https://doi.org/10.31857/S2686740020030037
15. *Majdalani J.* Exact Navier-Stokes solution for pulsatory viscous channel flow with arbitrary pressure gradient // J. Propulsion and Power. 2008. V. 24. N6. P. 1412–1423. https://doi.org/10.2514/1.37815
16. *Pozrikidis C.* Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow. N.Y.: Cambridge Univ. Press, 1992. 272 p.
17. *Nishad C.S., Chandra A., Sekhar G.P.R.* Flows in slip-patterned micro-channels using boundary element methods // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2016. V. 73. P. 95–102. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.09.006
18. *Якутенок В.А.* Численное моделирование медленных течений вязкой жидкости со свободной поверхностью методом граничных элементов // Математическое моделирование. 1992. Т. 4. № 10. С. 62–70.