

УДК 532.135:532.5.032

О ДИНАМИКЕ СФЕРИЧЕСКОГО ПУЗЫРЬКА В НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЯХ

© 2021 г. А. Н. Голубятников^а, Д. В. Украинский^{а,*}

^а Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: d.v.ukrainskiy@gmail.com

Поступила в редакцию 09.03.2021 г.

После доработки 09.03.2021 г.

Принята к публикации 24.03.2021 г.

В рамках гидродинамической теории несжимаемых степенных неньютоновских жидкостей рассматривается ряд задач динамики сферической газовой полости с однородно распределенным давлением внутри или, в частности, без него. Отдельное внимание уделяется исследованию поведения решений в зависимости от показателя степени неньютоновской модели и определению их экстремальных свойств. Решены задачи о вычислении необходимого внешнего давления, приводящего к сохранению в процессе сжатия кинетической энергии жидкости или величины скорости диссипации. Построены решения в частном случае ньютоновской модели, представляющие собой точную реализацию линейно-резонансного поведения радиуса полости в рамках нелинейной постановки задачи, и, наоборот, с использованием численных методов дано уточнение закона динамики полости при заданном гармоническом внешнем давлении с линейно-резонансной частотой. Аналитически и численно устанавливается закон зависимости концентрации кинетической энергии жидкости от показателя степени неньютоновской модели и обобщенного числа Рейнольдса при кусочно-постоянном внешнем давлении в случае вакуумной полости. Показано, что для части степеней концентрации энергии вообще отсутствует. Для остальных показателей степени вычислены критические значения обобщенного числа Рейнольдса, при котором концентрация энергии также исчезает. Проведена минимизация величины полной диссипации энергии в случае полости, заполненной газом.

Ключевые слова: неньютоновская жидкость, сжатие пузырька, резонанс, концентрация энергии, диссипация

DOI: 10.31857/S0568528121040071

В современной науке и технике все большее значение приобретает изучение усложненных реологических моделей сред и связанных с ними явлений. В настоящей работе приводится исследование классической задачи о динамике сферического пузырька, в жидкости с произвольным степенным законом связи тензора напряжений и тензора скоростей деформаций Освальда–де Виля [1].

Среды, для которых эффективная вязкость растет с увеличением скорости деформации, называются дилатантными. К таким средам относятся грубодисперсные системы, суспензии, например, раствор кукурузного крахмала в воде или мокрый речной песок.

В случае если эффективная вязкость падает с увеличением скорости деформации, среда называется псевдопластической. Такими свойствами обладают полимерные вещества, многие нефтепродукты, биологические жидкости (кровь, плазма), фармацевтические средства, различные пищевые продукты.

Знание поведения отдельного пузырька газа в жидкости в зависимости от внешнего давления позволяет предсказать и оценить многие эффекты и процессы, как природные, так и технические. Данное взаимодействие двух фаз является одним из самых важных и значимых в механике гетерогенных сред [2].

Фокусировка при схлопывании вакуумного сферического пузырька в идеальной несжимаемой жидкости стала одним из первых описанных примеров явлений неограниченной кумуляции объемной плотности энергии [3, 4]. В частности, к этому эффекту приводит и задача о сильном взрыве в несжимаемой жидкости [5].

В настоящей работе решены задачи об отыскании необходимого внешнего давления, которое обеспечивает сохранение в процессе сжатия кинетической энергии жидкости, а также величины скорости диссипации. Кроме этого, в частном случае ньютоновской модели найден закон изменения внешнего давления, приводящий к точной реализации линейно-резонансного поведения радиуса полости в рамках нелинейной постановки задачи, и, наоборот, с использованием численных методов дано уточнение (по сравнению с линеаризованным решением) закона динамики полости при заданном гармоническом внешнем давлении с линейно-резонансной частотой.

Аналитически и численно установлен закон зависимости концентрации величины кинетической энергии жидкости от показателя степени неньютоновской модели и обобщенного числа Рейнольдса при внешнем давлении, скачком растущим в начальный момент времени, в частном случае вакуумной полости. Проведена минимизация величины полной диссипации энергии в случае полости, заполненной газом. Наилучшие результаты дают модели неньютоновских сред, близкие к предельной чисто пластической жидкости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В общем случае система уравнений динамики несжимаемой степенной неньютоновской жидкости может быть записана в виде [1, 6]

$$\nabla_i v^i = 0, \quad \rho \frac{dv_i}{dt} + \nabla_i p = \nabla_j \tau_i^j, \quad \tau_i^j = 2\mu |e|^{2\beta-1} e_i^j, \quad e^2 = e_{ij} e^{ij}, \quad \beta > 0 \quad (1.1)$$

Здесь v^i – компоненты вектора скорости, p – давление, ρ – плотность, τ^{ij} – компоненты тензора вязких напряжений, e_{ij} – компоненты тензора скоростей деформаций, μ – коэффициент консистенции, β – показатель степени неньютоновской модели.

Если перейти к уравнению живых сил, то получается

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v_i v^i}{2} \right) = \nabla_j [(-p g^{jj} + \tau^{jj}) v_i] - 2\mu |e|^{2\beta+1} \quad (1.2)$$

Рассматривается сферически-симметричная задача о динамике газовой полости внутри неограниченного объема жидкости. Пусть радиус полости обозначен через $R(t)$, в начальный момент времени $t = 0$ он равен R_0 . Давление внутри полости принимается однородным $p_{cav}(R) = p_0 (R_0/R(t))^{3\gamma}$, где γ – показатель адиабаты, p_0 – начальное давление [2]. Давление в жидкости на бесконечности, вообще говоря, зависит от времени, $p_\infty(t)$.

В этом случае уравнение неразрывности в (1.1) с использованием кинематического условия на границе приводит к выражению скорости через радиус полости

$$v(r, t) = \frac{R^2(t)}{r^2} \frac{dR(t)}{dt}$$

Кинетическая энергия жидкости, в свою очередь, принимает вид

$$E(t) = 2\pi\rho \int_{R(t)}^{\infty} r^2 v^2 dr = 2\pi\rho R^3(t) \left(\frac{dR(t)}{dt} \right)^2 \quad (1.3)$$

Свертка тензора скоростей деформаций также вычисляется через $R(t)$

$$e^2 = \frac{6R^4(t)}{r^6} \left(\frac{dR(t)}{dt} \right)^2$$

Уравнение (1.2) интегрируется по всему объему жидкости. С использованием динамических граничных условий получается

$$\frac{dE(t)}{dt} + [p_\infty(t) - p_{cav}(R)] 4\pi R^2(t) \frac{dR(t)}{dt} + 4\sqrt{2/3} (6^\beta/\beta) \pi \mu \left| \frac{dR(t)}{dt} \right|^{2\beta+1} R(t)^{2-2\beta} = 0 \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) является основным в рамках исследований, приведенных в настоящей работе. Важно заметить, что при сжатии $dR(t)/dt < 0$.

С помощью задания функции $R(t)$ в уравнении (1.4) можно определить необходимый вид $p_\infty(t)$, обеспечивающий реализацию заданной динамики границы полости.

При выборе конкретных физических величин в данной работе используется система единиц измерения СГС.

2. ЗАДАЧА О СОХРАНЕНИИ ЭНЕРГИИ

Рассматривается задача о сохранении кинетической энергии $E(t) \equiv E_0$ в процессе сжатия. На основе соотношения (1.3) получается, что

$$R(t) = R_0 \left[1 - \left(\frac{25E_0}{8\pi\rho R_0^5} \right)^{1/2} t \right]^{2/5} \quad (2.1)$$

при этом процесс схлопывания длится конечный промежуток времени $t \in [0, T]$, где

$$T = \left(\frac{8\pi\rho R_0^5}{25E_0} \right)^{1/2}$$

Необходимая для реализации соответствующего процесса зависимость давления на бесконечности от времени имеет вид

$$p_\infty(t) = \frac{T^{6\gamma/5} p_0}{(T-t)^{6\gamma/5}} + \frac{(2/3)^{1/2} (24/25)^\beta (\mu/\beta)}{(T-t)^{2\beta}} \quad (2.2)$$

Видно, что для осуществления данного схлопывания необходимо преодолевать не только растущее давление внутри газовой полости за счет ее сжатия (первое слагаемое), но и растущую величину, связанную с диссипацией (второе слагаемое, обозначается через p_{dis} ниже). Стоит отметить, что оба члена справа в формуле (2.2) не ограничены при $t \rightarrow T$. В случае если $\gamma < (5/3)\beta$, второе слагаемое растет асимптотически быстрее.

Однако рассматриваемое сжатие имеет смысл осуществлять до значений плотности внутри газовой полости равных по величине плотности жидкости, т.е. во многих случаях до одного порядка по радиусу, так как далее необходимо учитывать явление сжимаемости жидкости [4]. Схлопывание полости до радиуса $R = R_*$ происходит за время

$$t = T[1 - (R_*/R_0)^{5/2}] = T_*$$

при этом давление $p_\infty(T_*)$ является максимальным.

Давление внутри газовой полости тем больше, чем больше показатель адиабаты. В случае с диссипативным членом и показателем степени неньютоновской модели жидкости ситуация иная. Наименьшего значения безразмерная величина $T^{2\beta} p_{dis}(T_*, \beta)/\mu$ достигает при

$$\beta = \left(\ln \frac{24/25}{(R_*/R_0)^5} \right)^{-1} = \beta_*$$

Неравенство $R_*/R_0 < (24/25)^{1/5}$ обеспечивает условие $\beta_* > 0$. В частности, при $R_*/R_0 = 10^{-1}$ получается $\beta_* = 0.087$. При $1 > R_*/R_0 \geq (24/25)^{1/5}$ значение величины $T^{2\beta} p_{dis}(T_*, \beta)/\mu$ уменьшается с ростом показателя β .

3. ЗАДАЧА О ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ ДИССИПАЦИИ

Рассматривается задача о постоянстве в процессе сжатия величины скорости диссипации. В этом случае

$$d(t) = \int_{R(t)}^{\infty} \tau^{ij} e_{ij} 4\pi r^2 dr = 4\sqrt{2/3} (6^\beta/\beta) \pi \mu \left| \frac{dR(t)}{dt} \right|^{2\beta+1} R(t)^{2-2\beta} \equiv d_0 \quad (3.1)$$

На основе соотношения (3.1) получается степенной закон динамики полости, аналогичный формуле (2.1)

$$R(t) = R_0 \left(1 - \frac{t}{T} \right)^\lambda, \quad \lambda = (2\beta + 1)/3, \quad T = \lambda \sqrt{6} \left[\frac{(8/3)\pi\mu R_0^3}{d_0(3\lambda - 1)} \right]^{1/(3\lambda)}$$

Таким образом,

$$E(t) = \frac{2\pi\rho R_0^5 \lambda^2}{T^2} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{5\lambda-2}$$

Для псевдопластической жидкости с показателем нелинейности $\beta = 1/10$ можно в процессе сжатия полости одновременно с постоянством величины скорости диссипации дополнительно добиться сохранения кинетической энергии. При $\beta < 1/10$ кинетическая энергия жидкости неограниченно растет при схлопывании.

Необходимое внешнее давление при произвольном β имеет вид

$$p_\infty(t) = p_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{-3\lambda\gamma} - \frac{\lambda\rho R_0^2}{2T^2} (5\lambda - 2) \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{-2(1-\lambda)} + \frac{d_0 T}{4\pi\lambda R_0^3} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{-(3\lambda-1)} \quad (3.2)$$

Первое и третье слагаемые в правой части формулы (3.2) растут неограниченно при $t \rightarrow T$ для любых β , в то время как множитель $(1 - t/T)^{-2(1-\lambda)}$ во втором слагаемом (которое с точностью до знака равно отношению изменения кинетической энергии жидкости к изменению объема полости в процессе сжатия) меняет режим неограниченного возрастания на убывание к нулю при переходе параметра β через 1.

4. УТОЧНЕНИЕ ЛИНЕЙНО-РЕЗОНАНСНЫХ РЕШЕНИЙ В РАМКАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

Пусть рассматривается некоторое возмущение равновесного внешнего давления в виде периодической функции времени

$$p_\infty(t) = p_0 + p_1 \cos(\Omega t) \quad (4.1)$$

Возмущения радиуса полости при этом предполагаются относительно малыми

$$R(t) = R_0 + R_1(t), \quad R_1(0) = 0 \quad (4.2)$$

Известно [6], что в случае ньютоновской жидкости ($\beta = 1/2$) уравнение (1.4) с учетом соотношений (4.1) и (4.2) допускает линеаризацию вида

$$\frac{d^2 R_1}{dt^2} + 2\delta \frac{dR_1}{dt} + \omega^2 R_1 = A \cos(\Omega t), \quad 2\delta = \frac{4\mu}{\rho R_0^2}, \quad \omega^2 = \frac{3\gamma p_0}{\rho R_0^2}, \quad A = -\frac{p_1}{\rho R_0} \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) с учетом резонансного условия $\Omega = \omega$ имеет решение

$$R(t) = R_0 + a \exp(-\delta t) \sin(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} t) + \frac{A}{2\delta\omega} \sin(\omega t) \quad (4.4)$$

С помощью уравнения (1.4) можно определить вид функции $p_\infty(t)$, необходимый для сохранения динамики границы полости, соответствующей линейному резонансу (4.4), в рамках нелинейной постановки задачи для произвольной степенной неньютоновской жидкости. В этом случае внешнее давление определяется выражением

$$p_\infty(t) = p_0 (R_0/R)^{3\gamma} - (3/2)\rho \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \rho R \frac{d^2 R}{dt^2} - \sqrt{2/3} (6^\beta/\beta) \mu R^{-2\beta} \left|\frac{dR}{dt}\right|^{2\beta+1} \frac{dR}{dt} \quad (4.5)$$

где $R(t)$ представлен формулой (4.4). Относительная малость возмущений уже не требуется.

Важно заметить, что $p_\infty(t)$ — это внешнее усилие, создаваемое для реализации того или иного режима динамики полости, поэтому для него в рамках модели несжимаемой жидкости допускаются отрицательные значения.

Пусть параметры задачи имеют вид $\rho = 1$ г/см³, $\mu = 10^{-2}$ г/(см·с), $\beta = 1/2$ (вода), $\gamma = 1.4$ (воздух), $p_0 = 10^6$ г/(см·с²), $R_0 = 10^{-2}$ см. В этом случае коэффициент затухания $\delta = 2 \times 10^2$ с⁻¹, собственная частота $\omega = 2 \times 10^5$ с⁻¹. Пусть также $p_1/p_0 = 10^{-2}$ и $a = -A/(2\delta\omega)$. Последний параметр фактически определяет величину $dR/dt(0)$.

Со временем амплитуда колебаний радиуса полости растет все сильнее, до тех пор пока при $t = 0.00859$ с полость не схлопнется в точку. На рис. 1 представлены сравнительные графики не-

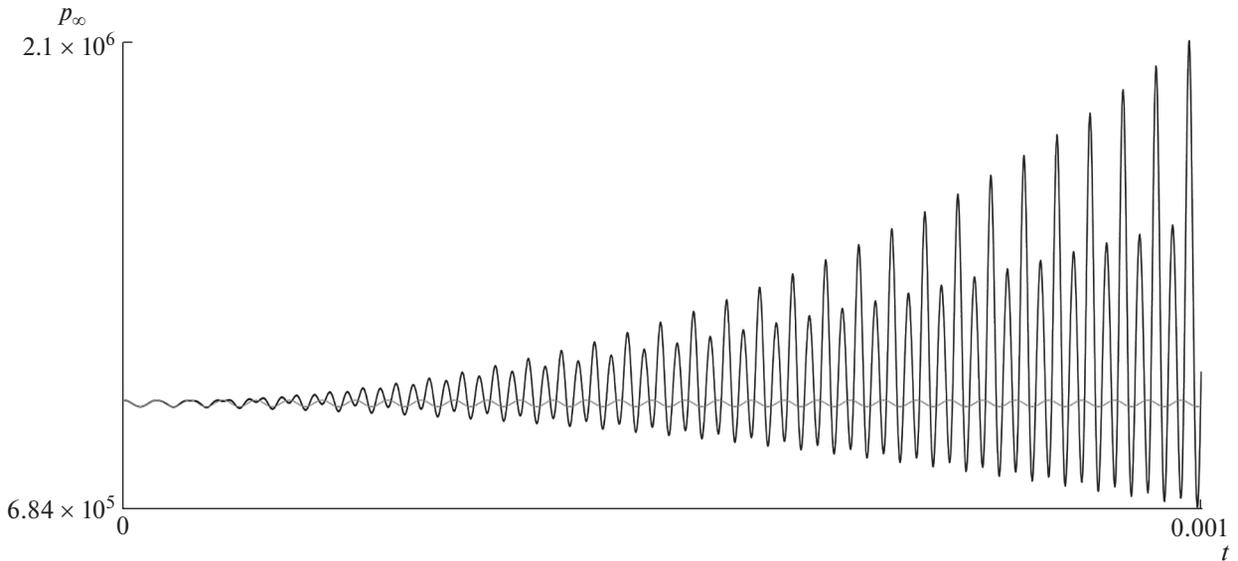


Рис. 1. Сравнение необходимых внешних давлений для обеспечения линейно-резонансного поведения радиуса полости в случае линейной (серая кривая) и нелинейной (черная кривая) постановок задач.

обходимых внешних давлений от времени в случае нелинейной (черная кривая) и линейной (серая кривая) постановок задач. Видно, что данные функции с течением времени отличаются все сильнее, внешнее давление для нелинейного случая перестраивается на принципиально новый режим. В момент схлопывания полости внешнее давление в рамках нелинейной постановки задачи обращается в бесконечность.

Уменьшение отношения p_1/p_0 до, например, 10^{-4} при неизменных остальных параметрах обеспечивает выполнение условия $R(t) > 0$ для любого момента времени, нелинейный вариант давления на бесконечности также становится ограниченным.

На уравнение живых сил можно посмотреть и с обратной стороны. Пусть $p_\infty(t)$ в уравнении (4.5) задано в виде (4.1) с учетом выполнения резонансного условия $\Omega = \omega$. В этом случае уравнение (4.5) фактически является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка для нахождения $R(t)$. Таким образом решается задача об уточнении закона динамики газовой полости при переходе от линеаризованной постановки задачи к точной нелинейной. Для построения решения $R(t)$ используются математический пакет Maple и его встроенная функция dsolve. В качестве численного метода выбирается метод Рунге–Кутты–Фельберга четвертого порядка (RKF45) с интерполянтном четвертой степени – стандартный метод в dsolve.

Пусть параметры задачи имеют тот же вид, что и для примера на рис. 1. На рис. 2 представлены графики зависимости радиуса полости от времени для нелинейного (черная кривая) и линейного (серая кривая) решений. Как и в прошлом примере, кривые совпадают на малых временах, но с ростом t появляются принципиальные расхождения. Особенно важно отметить тот факт, что в рамках нелинейного решения полость не схлопывается, у $R(t)$ появляется огибающая, которая совершает затухающие колебания.

В приведенном примере возмущение давления на 1% дает рост и уменьшение радиуса полости в рамках нелинейного решения на более чем 20% в процессе колебаний, влияние центра пузырька сказывается не очень сильно. При увеличении отношения p_1/p_0 до, например, 1 при неизменных остальных параметрах наблюдаются такие колебания нелинейного решения, при которых полость расширяется по радиусу более чем в два раза и сжимается более чем в три раза относительно начального значения R_0 . При этом существенно сказывается влияние центра.

5. ЗАДАЧА О СЖАТИИ ПУЗЫРЬКА СКАЧКОМ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Рассмотрим традиционную задачу о схлопывании полости в жидкости скачком внешнего давления [3, 4].

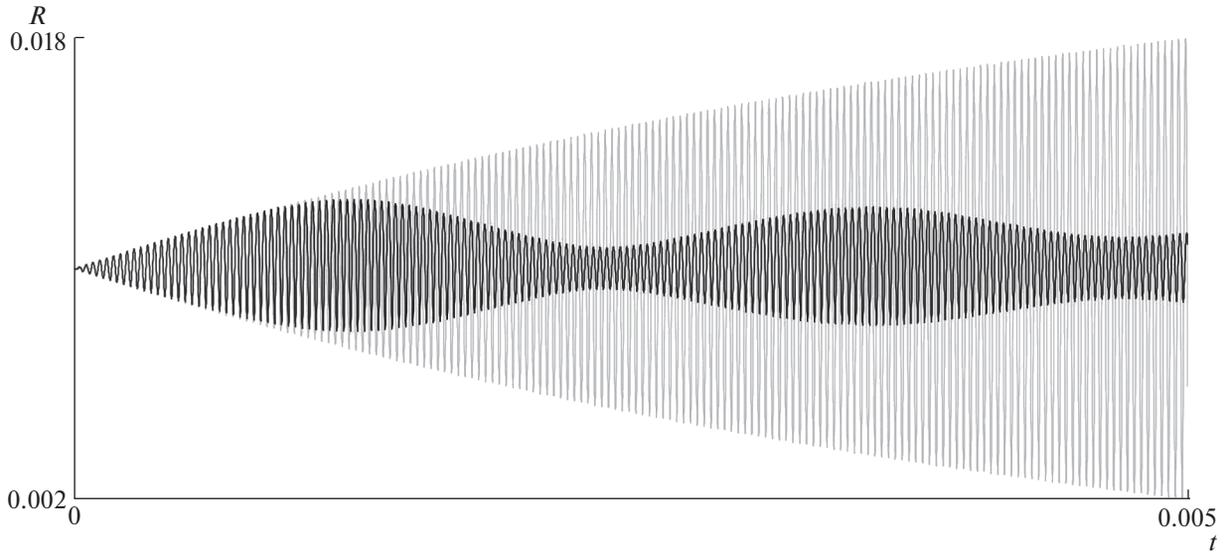


Рис. 2. Сравнение линейного (серая кривая) и нелинейного (черная кривая) законов динамики полости при гармоническом внешнем давлении с линейно-резонансной частотой.

Пусть в начальный момент времени давление на бесконечности скачком растёт от значения p_0 до некоторого значения p_∞ и далее продолжает сохраняться постоянным. Необходимо определить величину кинетической энергии жидкости при сжатии полости из состояния покоя до размеров $R = R_*$.

Для решения указанной задачи в уравнении (1.4) совершается переход от переменной t к переменной $V = (4/3)\pi R^3(t)$. При этом скорость схлопывания границы $dR(t)/dt$ выражается через кинетическую энергию жидкости и радиус полости на основе соотношения (1.3). В результате получается нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее изменение энергии в процессе сжатия

$$\frac{dE(V)}{dV} = K \frac{E^\beta(V)}{V^{5\beta/3}} - \left[p_\infty - p_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma \right] \quad (5.1)$$

где K – постоянная, зависящая от физических параметров жидкости.

При использовании переменной V начальным условием для уравнения (5.1) выступает равенство $E(V_0) = 0$, при этом $V_* \leq V \leq V_0$. Соответственно, $V_0 = V(R_0)$ и $V_* = V(R_*)$. В точке $V = 0$ уравнение сингулярно и требует специального исследования в ее окрестности.

Уравнение (5.1) обезразмеривается. Для этого вводятся следующие замены: $V = V_0 z$ и $E = p_\infty V_0 y$. В этом случае уравнение (5.1) переписывается в виде

$$\frac{dy}{dz} = \sigma \frac{y^\beta}{z^{5\beta/3}} - \left(1 - \frac{\theta}{z^\gamma} \right), \quad \sigma = \frac{(2/3)^{1/2} 4^\beta v}{\beta (p_\infty/\rho)^{1-\beta} R_0^{2\beta}}, \quad \theta = p_0/p_\infty \quad (5.2)$$

где $v = \mu/\rho$.

При $\beta = 1/2$ параметр σ связан с числом Рейнольдса $Re = (R_0/v)\sqrt{p_\infty/\rho}$ соотношением $\sigma = (4/Re)\sqrt{2/3}$. Таким образом, в данной работе величина σ играет роль обобщенного числа Рейнольдса.

Переход от переменной z к переменной $x = 1/z$ позволяет избавиться от сингулярности в правой части уравнения (5.2) при $z = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \theta x^\gamma - \sigma y^\beta x^{5\beta/3}}{x^2}, \quad y(1) = 0, \quad x \in [1, C] \quad (5.3)$$

где $C = V_0/V_*$.

Следует отметить, что уравнение (5.3) содержит 4 безразмерных параметра: β , σ , θ и γ , от значений которых зависит поведение решения. Ниже будет приведен анализ типичных ситуаций.

Для дилатантной жидкости с параметром $\beta = 1$ уравнение (5.3) линеаризуется и его аналитическое решение находится стандартными методами.

Величина полной диссипации энергии может быть представлена в виде

$$D = \int_0^{T_*} \int_{R(t)}^{\infty} \tau^{ij} e_{ij} 4\pi r^2 dr dt = p_{\infty} V_0 \left[\left(1 - \frac{1}{C}\right) - \frac{\theta}{\gamma - 1} (C^{\gamma-1} - 1) - y(C) \right] \quad (5.4)$$

где T_* – время, за которое сжатие полости осуществляется вплоть до радиуса R_* . Следовательно, для вычисления полной диссипации необходимо найти величину $y(C)$ – чем больше ее значение, тем меньше энергии теряется в процессе схлопывания.

Задача Коши (5.3) допускает следующее качественное исследование. Во-первых, $y'(1) = 1 - \theta > 0$, но с ростом x величина $y'(x)$ становится отрицательной, функция $y(x)$ допускает максимум в некоторой точке. Во-вторых, в любом экстремуме $x_0 > 1$ справедливо соотношение

$$\sigma y^{\beta}(x_0) x_0^{5\beta/3} = 1 - \theta x_0^{\gamma}$$

при использовании которого

$$y''(x_0) = -x_0^{-3} [\gamma \theta x_0^{\gamma} + (5\beta/3) \sigma y^{\beta}(x_0) x_0^{5\beta/3}] < 0$$

Следовательно, максимум в x_0 является единственным экстремумом. Особенный интерес представляет изучение характера поведения решения при $x > x_0$.

Задача (5.3) может быть представлена в интегральном виде

$$y(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{\theta}{\gamma - 1} (x^{\gamma-1} - 1) - \sigma \int_1^x y^{\beta}(\xi) \xi^{5\beta/3-2} d\xi \quad (5.5)$$

Соотношение (5.5) позволяет заключить, что $y(x)$ ограничена сверху значением 1. За счет члена $\theta x^{\gamma-1}$ функция $y(x)$ убывает неограниченно, что говорит о существовании некоторой точки $x_1 > x_0$, в которой $y(x_1) = 0$, точки остановки. Таким образом, сжатие газовой полости в принципе может быть осуществлено лишь до некоторого предельного значения, после которого нужно рассматривать ее расширение. Простейшую верхнюю оценку координаты x_1 можно получить в виде

$$x_1 < \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\theta}\right)^{1/(\gamma-1)} \quad (5.6)$$

Пусть числа θ и γ заданы. Если определить $C = \theta^{-1/\gamma}$, то $x_1 > C$, иначе $y'(x_1) \geq 0$, что невозможно. Следовательно, при $\theta = C^{-\gamma}$ гарантирована возможность сжатия газовой полости с показателем адиабаты γ до размеров $V_* = V_0/C$.

Далее рассматривается частный случай вакуумной полости ($\theta = 0$), при условии, что обратное не оговорено отдельно. Здесь особенно интересным является изучение вопроса о концентрации кинетической энергии жидкости, т.е. исследование величины $y(\infty)$.

Если предположить, что существует точка $x_1 > 1$, в которой $y(x_1) = 0$, то отсюда, опять же, будет следовать тот факт, что $y'(x_1) > 0$, приводящий к противоречию. Таким образом, можно считать, что при $x \gg 1$ справедлива асимптотика

$$y(x) = Hx^{-\alpha} + o(x^{-\alpha}), \quad H > 0, \quad \alpha \geq 0 \quad (5.7)$$

Подставляя (5.7) в (5.3) и проводя элементарные преобразования, получается соотношение

$$-\alpha H x^{-\alpha} + o(x^{-\alpha}) = x^{-1} - \sigma H^{\beta} x^{-\alpha\beta} (1 + o(1))^{\beta} x^{5\beta/3-1} \quad (5.8)$$

Если предположить, что параметр α равен нулю, то формула (5.8) преобразуется к виду

$$o(1) = x^{-1} - \sigma H^{\beta} (1 + o(1))^{\beta} x^{5\beta/3-1} \quad (5.9)$$

Отсутствие стремления к нулю с ростом x второго слагаемого в правой части (5.9) при $\beta \geq 3/5$ приводит к противоречию. Для таких β параметр α должен быть строго положительным, что говорит об отсутствии концентрации кинетической энергии жидкости при схлопывании вакуумной полости, $y(\infty) = 0$.

Область значений безразмерного параметра σ весьма широка. Пусть, например, заданы $p_\infty = 10^6$ г/(см · с²) и $R_0 = 10^{-2}$ см. В этом случае σ выражается через плотность ρ , коэффициент консистенции μ и показатель степени нелинейности β неньютоновской жидкости следующим образом:

$$\sigma = (2/3)^{1/2} \frac{4^\beta \mu}{\beta \rho^\beta} \times 10^{10\beta-6}$$

Для воды параметр σ имеет порядок 3×10^{-3} . Раствор цементного камня в воде 54.3% концентрации является псевдопластической жидкостью с параметрами $\beta = 0.077$ и $\mu = 18.715$ г/(см · с) [1], а также $\rho = 2$ г/см³ [7]. В этом случае параметр σ получается порядка 10^{-3} . Несмотря на то что показатель β данного раствора сильно отличается от показателя β воды, безразмерные числа σ для них совпадают по порядку.

В работе [8] рассмотрены реологические свойства дилатантной жидкости – смеси кукурузно-крахмала с этиленгликолем в различных концентрациях, для которой предложена эмпирическая формула связи параметра консистенции с показателем нелинейности ($0.55 \leq \beta \leq 1.46$)

$$\mu = 2^{\beta-1/2} \frac{k_0}{2\beta - 1}$$

где $k_0 = 13.8$ г/(см · с). Таким образом, при β , равных 0.8, 1 и 1.2, получаются σ порядка 7×10^4 , 5×10^5 и 4×10^7 соответственно. Такие β соответствуют концентрациям крахмала порядка 35–40%, что дает значение плотности смеси около $\rho = 1.25$ г/см³ [7].

При произвольном β решение уравнения (5.3) строится численно. Для этого используются математический пакет Maple и его встроенная функция dsolve. В качестве численного метода выбирается неявный метод Рунге–Кутты–Розенброка третьего-четвертого порядка с интерполянт-ом третьей степени – стандартный метод в dsolve для жестких систем.

Пусть безразмерный параметр $\beta = 1$. На рис. 3 представлен график зависимости численного значения y при $x = 10^9$ от показателя β .

В окрестности точки $\beta = 0.09$ наблюдается максимум концентрации кинетической энергии, ее значение достигает порядка 6.8% от работы постоянного внешнего давления на схлопывании вакуумной полости в идеальной жидкости из состояния покоя в точку. При $\beta > 0.27$ концентрация кинетической энергии отсутствует.

Характер решения уравнения (5.3) сильно зависит от обобщенного числа Рейнольдса. На рис. 4 представлены графики значений $y(10^9)$ при различных β и σ . На рис. 4а изображен график поверхности, на рис. 4б показан контурный график. Цифрами обозначены линии, соответствующие следующим значениям $y(10^9)$: 1 – 0.8, 2 – 0.7, 3 – 0.6, 4 – 0.5, 5 – 0.4, 6 – 0.3, 7 – 0.2, 8 – 0.1, 9 – 0.01.

Видно, что для каждого β существует критическое значение $\sigma_{\text{crit}}(\beta)$, при превышении которого концентрация энергии исчезает. При $\beta = 0.116$ наблюдается максимум $\sigma_{\text{crit}} = 1.16$. Зависимость режима схлопывания вакуумной полости от σ согласуется с результатами для ньютоновских жидкостей в [4] ($Re_{\text{crit}} = 8.4$, что дает $\sigma_{\text{crit}} = 0.39$).

В случае полости, заполненной газом, величина $y(C)$, для которой $\theta = C^{-\gamma}$, зависит от β и σ аналогичным образом. Это позволяет дать соответствующие рекомендации относительно минимизации величины полной диссипации энергии (5.4).

На рис. 5 представлен график полной диссипации (отнесенный к $p_\infty V_0$) при $\sigma = 1$, $\gamma = 1.4$ и $C = 10^3$ для разных показателей степени неньютоновской модели жидкости. Минимальное значение достигается при $\beta = 0.093$.

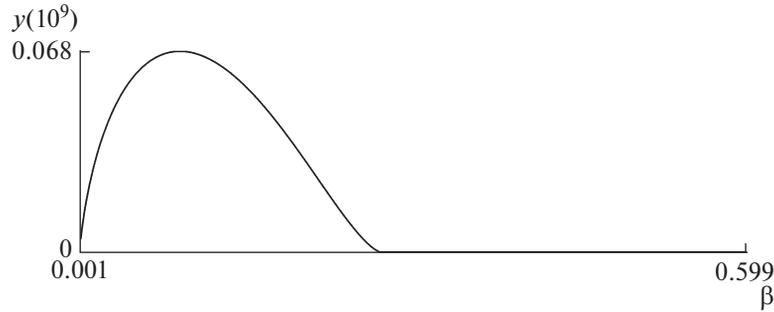


Рис. 3. Зависимость концентрации кинетической энергии при схлопывании вакуумной полости с параметром $\sigma = 1$ от показателя степени неньютоновской модели жидкости.

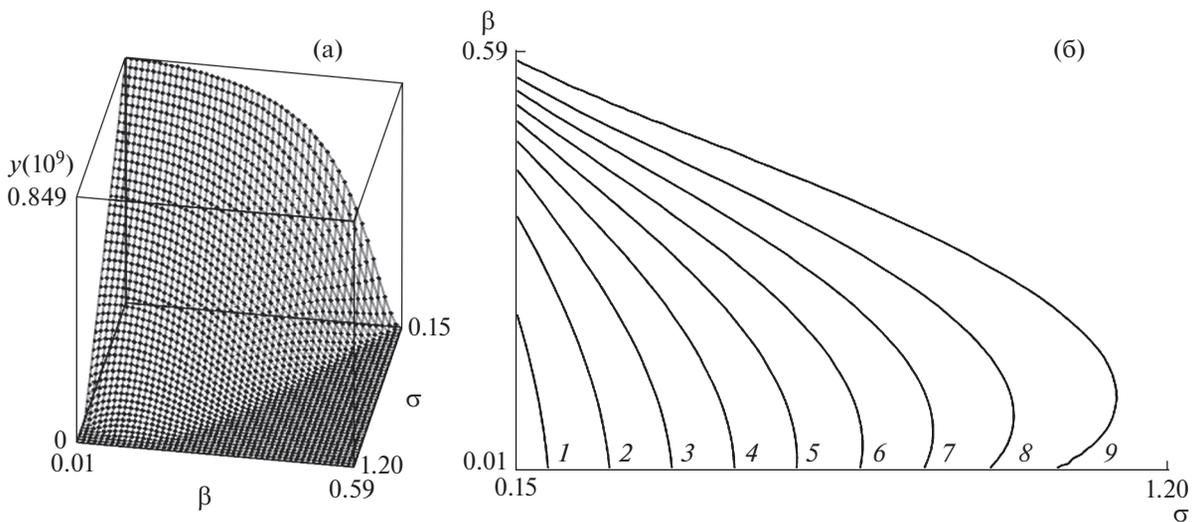


Рис. 4. Концентрация кинетической энергии при схлопывании вакуумной полости в зависимости от различных значений параметров β и σ . График поверхности (а) и контурный график (б).

На рис. 6 представлены графики значений $D/(p_\infty V_0)$ для $\gamma = 1.4$ и $C = 10^3$ при различных параметрах β и σ . Как и на рис. 4, на рис. 6 изображены график поверхности (6а) и контурный график (6б). Цифрами обозначены кривые, соответствующие значениям $D/(p_\infty V_0)$: 0 – 0.1, 1 – 0.2, 2 – 0.3, 3 – 0.4, 4 – 0.5, 5 – 0.6, 6 – 0.7, 7 – 0.8, 8 – 0.9, 9 – 0.99.

Видно, что величина полной диссипации энергии меньше в области псевдопластических жидкостей, достаточно близких к предельной чисто пластической модели.

Для пузырька воздуха в воде при параметрах $Re = 10^3$ ($p_\infty = 10^6$ г/(см · с²) и $R_0 = 10^{-2}$ см) и $\theta = 0.1$ максимум кинетической энергии достигается в точке $x_0 = 5.1$ и равен $y_{\max} = 0.571$. В данном случае сжатие осуществляется вплоть до точки остановки $x_1 = C = 53.2$, т.е. до $R_* = 0.266R_0$. При этом оценка (5.6) дает $x_1 < 5^{5/2} = 55.9$, т.е. работает достаточно точно. Полагая $\theta = 0$ и переходя к рассмотрению вакуумной полости, получается $y(10^9) = 0.983$, что говорит о величине концентрации энергии, близкой к предельно допустимой.

Согласно теории сильного взрыва в несжимаемой жидкости [5] концентрация энергии E_0 приводит к последующему взрыву, в результате чего $(4/25)E_0$ превращается в кинетическую энергию расширяющейся жидкости.

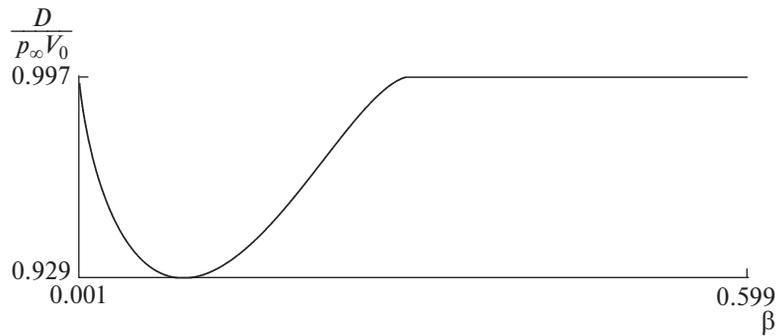


Рис. 5. Зависимость величины полной диссипации энергии при сжатии газовой полости с параметром $\sigma = 1$ при $\theta = C^{-\gamma}$ от показателя степени неньютоновской модели жидкости.

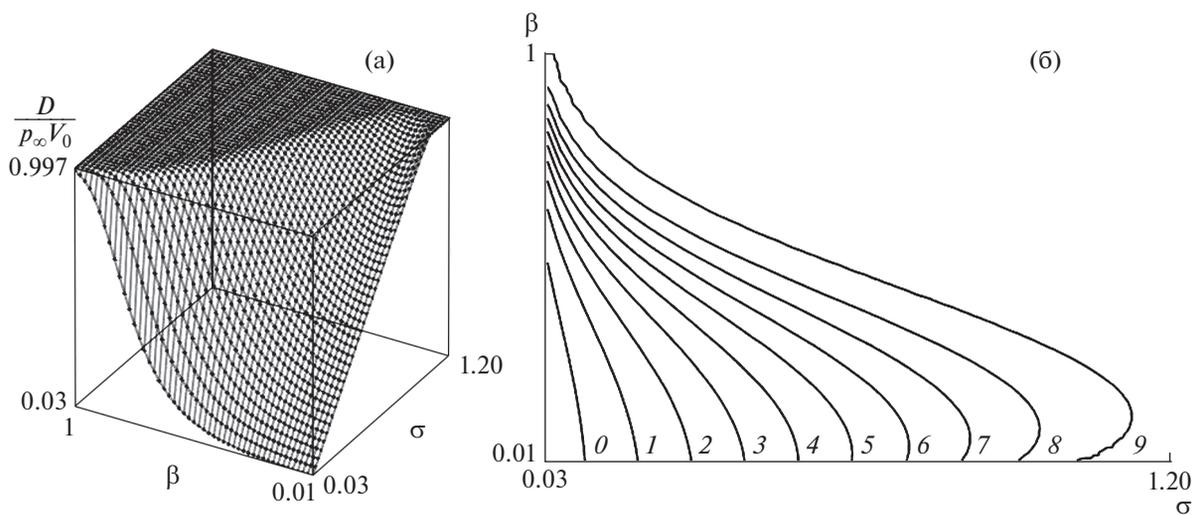


Рис. 6. Величина полной диссипации энергии при сжатии газовой полости в зависимости от различных значений параметров β и σ при $\theta = C^{-\gamma}$. График поверхности (а) и контурный график (б).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена серия задач о динамике сферического газового пузырька с однородно распределенным давлением внутри в неограниченном объеме несжимаемой степенной неньютоновской жидкости. Отдельное внимание уделено изучению поведения решений в зависимости от показателя степени неньютоновской модели и установлению их экстремальных свойств. Решены задачи об определении необходимого внешнего давления, приводящего к сохранению величины кинетической энергии в процессе схлопывания, а также обеспечивающего постоянную скорость диссипации. Построены решения, представляющие собой реализацию резонансного поведения полости в рамках нелинейной формулировки задачи. Дано уточнение (по отношению к линеаризованному решению) закона динамики полости при заданном гармоническом внешнем давлении с резонансной частотой. С помощью аналитических и численных методов установлен закон зависимости величины концентрации кинетической энергии жидкости от показателя степени неньютоновской модели и обобщенного числа Рейнольдса при кусочно-постоянном внешнем давлении в частном случае вакуумной полости. Показано, что для части степеней концентрация энергии вообще отсутствует. Для остальных показателей степени вычислены критические значения обобщенного числа Рейнольдса, при котором концентрация энергии также исчезает. Изучена возможность минимизации величины полной диссипации энергии при наличии газа. Введение степенной нелинейности указывает на разнообразие физических свойств дина-

мики сжимающихся пузырьков внутри жидкости в различных режимах, а также выявляет новые эффекты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запрянов З.Д., Вязьмин А.В., Казенин Д.А.* Химическая гидродинамика. Справочное пособие. М.: Квантум, 1996. 336 с.
2. *Нигматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
3. *Lord Rayleigh (Strutt J.W.)* On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity // *Philosophical Magazine. Series 6.* 1917. V. 34. № 200. P. 94–98.
4. *Забабихин Е.И., Забабихин И.Е.* Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988. 171 с.
5. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 448 с.
6. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1994. 560 с.
7. *Григорьев И.С., Мейлихов Е.З.* (ред.). Физические величины. Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
8. *Griskey R.G., Nechrebecki D.G., Notheis P.J., Balmer R.T.* Rheological and Pipeline Flow Behaviour of Corn Starch Dispersions // *Journal of Rheology.* 1985. V. 29. № 3. P. 349–360.