

УДК 551.511.32; 551.513

## МНОГОРЕЖИМНОСТЬ В ТОНКИХ СЛОЯХ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ КОЛЬЦЕВЫХ КАНАЛАХ

© 2021 г. А. Е. Гледзер<sup>а,\*</sup>, Е. Б. Гледзер<sup>а,\*</sup>, А. А. Хапаев<sup>а,\*\*</sup>, О. Г. Чхетиани<sup>а,\*\*</sup>

<sup>а</sup> Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Москва, Россия

\*E-mail: aegledzer@gmail.com

\*\*E-mail: lgg@ifaran.ru

Поступила в редакцию 23.11.2020 г.

После доработки 16.12.2020 г.

Принята к публикации 24.12.2020 г.

Экспериментально и численно изучается возможность существования различающихся режимов баротропной циркуляции в замкнутых кольцевых каналах при одинаковых внешних параметрах, задающих динамику течений. Переходы между режимами осуществляются изменением величины основного параметра (например, величины тока, задающего силу Ампера при МГД-генерации поля скорости), определяющего энергию поля скорости, с последующим восстановлением прежнего значения параметра. В зависимости от периода вращения канала или конфигураций расположения магнитов при МГД-генерации или источников-стоков в численных экспериментах возможны следующие результаты. 1. Начальный и конечный режимы отличаются количественно по числу образовавшихся циклонических или антициклонических вихрей. 2. Число вихревых образований не меняется, однако отличается их пространственная локализация, например, угловые координаты центров. 3. После изменения и восстановления значения определяющего параметра течение возвращается к режиму, практически не отличающемуся от исходного. Приведены картины течений и соответствующие диаграммы для лабораторных экспериментов и численных расчетов по уравнениям мелкой воды.

**Ключевые слова:** МГД-эксперименты, кольцевые каналы, многорежимность, уравнения мелкой воды

**DOI:** 10.31857/S056852812104006X

Идея о множественности равновесных состояний атмосферной циркуляции в геофизической гидродинамике, и конкретно, двумодальность, восходит к работе [1], в которой с помощью модели с небольшим числом переменных и конечно-разностной схемы с относительно большим числом степеней свободы были получены решения с существенно отличающимися величинами зональной и волновой компонентами скорости. Результаты аналогичных исследований для малопараметрических аппроксимаций были приведены в работах [2–5]. Рассмотренные в этих работах режимы отличались величиной зональной составляющей потока (западного переноса): в состоянии со слабым переносом роль почти стационарных атмосферных вихрей усиливается, что соответствует режимам блокирования циркуляции. Уровень бимодального распределения по эмпирическим данным изучался в [6], а для течений Куроиси и Гольфстрима описывался в [7]. Лабораторное подтверждение выводов работы [1] приведено в [8, 9] для экспериментов в кольцевых каналах с генерацией струйных течений методом источников-стоков.

В те же годы, что и указанные исследования [1–5], был найден другой вид двумодальности. В экспериментах А.М. Обухова и соавт. [10, 11] наблюдались в замкнутых сосудах режимы с разнонаправленными осями крупномасштабного вращения жидкости при одной и той же величине внешней генерации гидродинамических течений. С точки зрения геометрии течения имеется инвариантность относительно вращения в горизонтальной плоскости на угол  $\pi$ , что давало в результате два реализуемых в экспериментах режима. Теоретические расчеты по малопараметрической модели также объясняли двумодальный эффект [12, 13].

Аналогом переходов между указанными режимами для атмосферной циркуляции мог бы быть сдвиг на конечный угол системы циклонов и антициклонов, который в условиях неоднородности земной поверхности приводит к существенным климатическим изменениям. Еще один вид

многорежимности может быть связан с существованием при одинаковых внешних параметрах квазистационарных состояний с различными волновыми числами возмущений, задающих циклонические и антициклонические вихри атмосферной циркуляции.

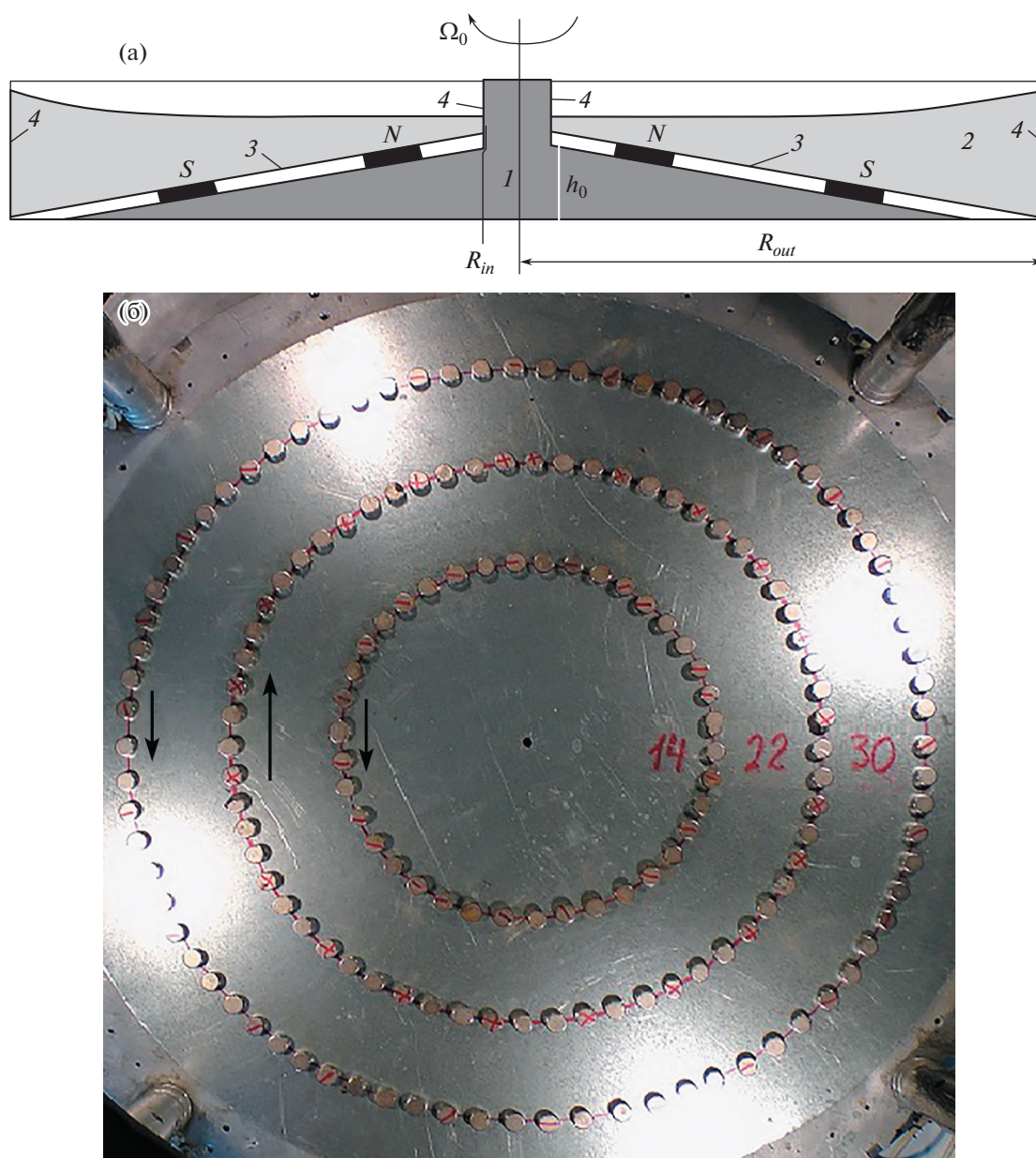
В данной работе указанные виды многорежимности, отличающиеся от исследованной в работе [1], рассмотрены на основе лабораторных и численных экспериментов в кольцевых вращающихся каналах. В ряде предыдущих работ этого направления [14–17] конфигурации расположения постоянных магнитов (или источников-стоков) могли создавать почти стационарную картину распределения циклонических и антициклонических вихрей. Это создает возможность поиска различных равновесных состояний при одних и тех же внешних параметрах, генерирующих движение жидкости в канале. При этом как и в упомянутых экспериментах А.М. Обухова и соавт., переход между различными состояниями обеспечивается изменением величины основного параметра генерации течений (для МГД-течений — ток между электродами на внешнем и внутреннем радиусах канала) с последующим восстановлением его исходного значения.

Численные эксперименты с уравнениями мелкой воды проводились по аналогичной методике с соответствующими изменениями внешних параметров, обеспечивающих генерацию циклонических и антициклонических вихревых структур. Эти эксперименты восполняют до некоторой степени отсутствие убедительных аналитических методов, доказывающих существование различных режимов течений при одних и тех же внешних параметрах. Малопараметрическая модель работы [1] сводит поиск стационарных режимов к кубическому уравнению, решения которого могут быть устойчивыми при использовании в исходной системе уравнений баротропной динамики. Аналогичный подход с кубическим уравнением был применен в работе [27] в упрощенной модели зональных экваториальных потоков. Фактически исследования в [1–5] — это единственный подход с использованием аналитических методов при рассмотрении проблемы многорежимности течений. Однако маломодовость изучаемых моделей снижает ценность получаемых результатов и может вызывать сомнения в возможности неединственности решений баротропных уравнений динамики вращающихся потоков.

## 1. ЛАБОРАТОРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Представляемые далее экспериментальные результаты получены для вращающегося кольцевого канала (периоды вращения  $T$  до 1 мин) со свободной поверхностью. Для данных экспериментов в общее вращение с угловой скоростью  $|\Omega_0| = 2\pi/T$  осуществлялось по часовой стрелке, что соответствует вращению Земли в южном полушарии. Дно круговых каналов с внутренним и внешним радиусами  $R_{in} = 5.5$  см и  $R_{out} = 18.0$  см (канал 1, см. рис. 1а — схема канала 1) и  $R_{in} = 5.0$  см и  $R_{out} = 36.0$  см (канал 2, рис. 1б) имеет осесимметричную коническую форму с высотой на внутреннем радиусе  $h_0 = 1.0$  см. В каналах пластиковое дно конусной формы закрывает железную коническую основу (1), на которой находятся магниты круглой формы. Круговое расположение магнитов на разных расстояниях от оси вращения с различным их числом при возможности чередования полярности позволяет менять общую величину силы Ампера  $\propto [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$ , действующую на электропроводящую жидкость (10-процентный раствор сульфата меди  $\text{CuSO}_4$ ). Здесь  $\mathbf{j}$  — плотность радиально направленного тока между электродами 4 на рис. 1а),  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля, создаваемого постоянными магнитами. На рис. 1б показано расположение постоянных магнитов в канале 2 при проведении эксперимента, результаты которого показаны на рис. 6б. Полуса магнитов по каждой окружности одинаковы и для средней окружности противоположны полюсам магнитов по двум крайним окружностям (знаки плюс или минус показаны произвольно и не для каждого магнита). Стрелки в левой части показывают направления силы Лоренца, действующей на заряды электролита над находящимися вблизи постоянными магнитами при имитации “западного переноса” в средней части канала. При изменении полярности тока между кольцевыми электродами у внутренней и внешней границ направления силы меняются на противоположные.

Неодимовые магниты цилиндрической формы диаметром 15 мм и высотой 10 мм со средним значением магнитной индукции каждого магнита 0.358 Тл располагались вдоль окружностей с радиусами 7 и 13 см (для канала 1) и 15 и 26 см или 14, 22, 30 см (для канала 2). Полярность постоянного электрического тока, подводимого через электроды 4, обеспечивала в начальный момент времени после его включения при указанной на рис. 1а для канала 1 полярности магнитов противоположное по отношению к внешнему вращению проводящей жидкости вблизи внешней границы канала. Это соответствует восточному экваториальному ветру. При этом в средней ча-

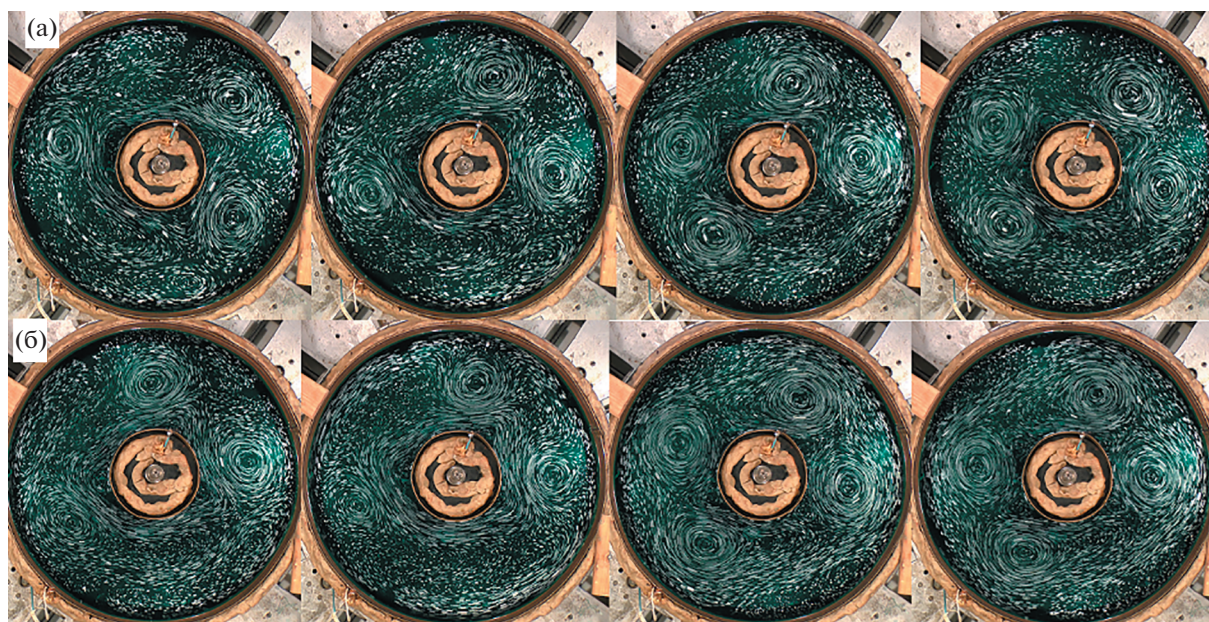


**Рис. 1.** (а) Схема экспериментальной установки при моделировании  $\beta$ -эффекта: 1 – коническая основа с постоянными магнитами S, N, 2 – электропроводящая жидкость, 3 – коническое дно,  $h_0$  – высота конуса у внутреннего электрода, 4 – электроды; (б) расположение постоянных магнитов в канале 2 при проведении эксперимента, результаты которых показаны на рис. 6б. Стрелки в левой части показывают направления силы Лоренца, действующей на заряды электролита над находящимися вблизи постоянными магнитами при имитации “западного переноса” в средней части канала.

сти канала жидкость движется в том же направлении, что и внешнее вращение (западный перенос средних широт).

Схема проведения экспериментов следующая. После включения тока (500 мА) в течение 2 мин устанавливается некоторый режим движения жидкости в канале, характеризующийся определенным количеством циклонических и антициклонических вихрей, стоячих или со слабым их переносом вдоль азимутального угла. Затем на следующие 2 мин ток увеличивается до 700 мА, чтобы разрушить или значительно изменить режим течения, сформированного в предыдущие 2 мин. Заметим, что в упомянутых выше экспериментах [10, 11] внешнее воздействие на жидкость вообще выключалось. После 2 мин с током 700 мА включался прежний ток 500 мА, т.е. внешние параметры возвращались к прежним значениям, только начальные условия генерации течений





**Рис. 2.** Траектории частиц в канале  $I$ , отнесенные соответственно (слева направо) к моментам времени  $t = 0.5$ , 2, 5.5, 6.0 мин, при периодах внешнего вращения (а)  $T = 8.2$  с, (б)  $T = 7.3$  с.

изменились. Можно ожидать либо возврат к режиму первых двух минут эксперимента для конфигураций циклонических и антициклонических вихрей (или к достаточно близкому режиму), или переход к существенно отличному течению по расположению вихрей или их количеству.

Изображения траекторий частиц на рис. 2, 3, 5, 6 показывают картины движений в кольцевых каналах  $I$  или  $2$ , которые относятся к моментам времени при начальном периоде включения тока 500 мА, затем при токе 700 мА, и потом при возврате генерации течения током 500 мА. Соответствующие моменты времени указаны в тексте и в подписях к рисункам.

На рис. 2а показаны траектории частиц в канале  $I$  при периоде внешнего вращения  $T = 8.2$  с, отнесенные к моментам времени  $t = 0.5$  мин (ток 500 мА, первый кадр),  $t = 2$  мин (второй кадр, ток 500 мА, сразу после этого момента ток переключается на 700 мА),  $t = 5.5$ , 6.0 мин (третий и четвертый кадры, ток 500 мА). На первых двух кадрах имеется по три выраженных вихря (антициклонических). Однако после двухминутного воздействия тока 700 мА с переключением на ток 500 мА уже появился новый вихрь также антициклонического вращения, так что в канале присутствуют четыре вихря. Таким образом, при периоде  $T = 8.2$  с имеются различные циркуляции при внешнем воздействии с током 500 мА, отличающиеся количеством антициклонических вихрей.

На рис. 2б показаны траектории частиц при периоде внешнего вращения  $T = 7.3$  с для тех же моментов времени, что и на рис. 2а. Рисунки 2а, 2б отличаются лишь сдвигом в расположении вихрей.

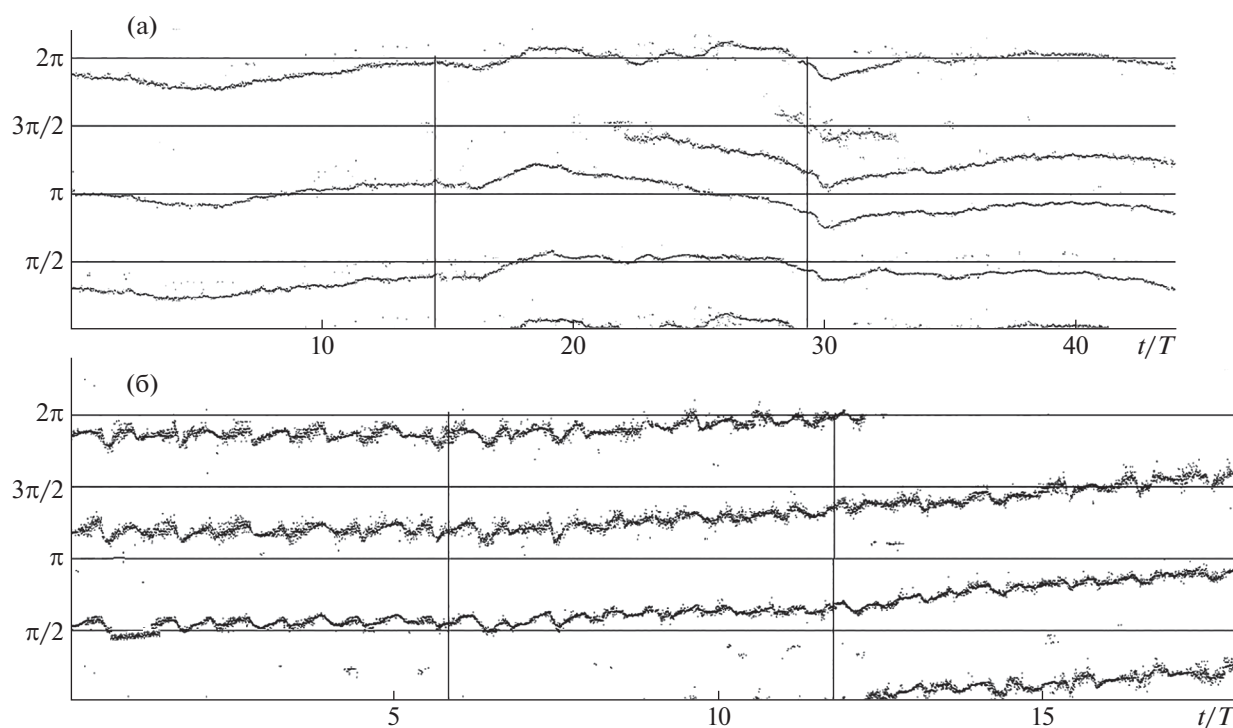
При увеличении периода вращения возможна реализация режимов, когда число вихрей остается прежним, но появляется существенный сдвиг в их расположении. На рис. 3а для периода  $T = 20.3$  с начальный трехвихревой режим переходит в конце в симметричный относительно горизонтали. Аналогичные течения, в которых начальное и конечное состояния также симметричны, показаны на рис. 3б для периода  $T = 17.7$  с. Заметим, что первый кадр на рис. 3б не появился из начальных условий последнего кадра на рис. 2в.

На рис. 4а показаны зависимости от времени угловых координат вихрей для  $T = 8.2$  с. Вертикальные линии отмечают моменты времени переключения тока 500—700—500. Временная шкала по горизонтали — время, отнесенное к периоду вращения канала ( $T = 8.2$  с). Четвертый вихрь появляется после  $22T$  во время действия тока 700 мА, хотя почти к концу действия тока этой величины на короткое время появлялся пятый антициклонический вихрь. На рис. 4б, как и на рис. 4а,





**Рис. 3.** Траектории частиц в канале  $I$ , отнесенные соответственно (слева направо) к моментам времени  $t = 0.5, 2, 5.5, 6.0$  мин, при периодах внешнего вращения (а)  $T = 20.3$  с, (б)  $T = 17.7$  с.

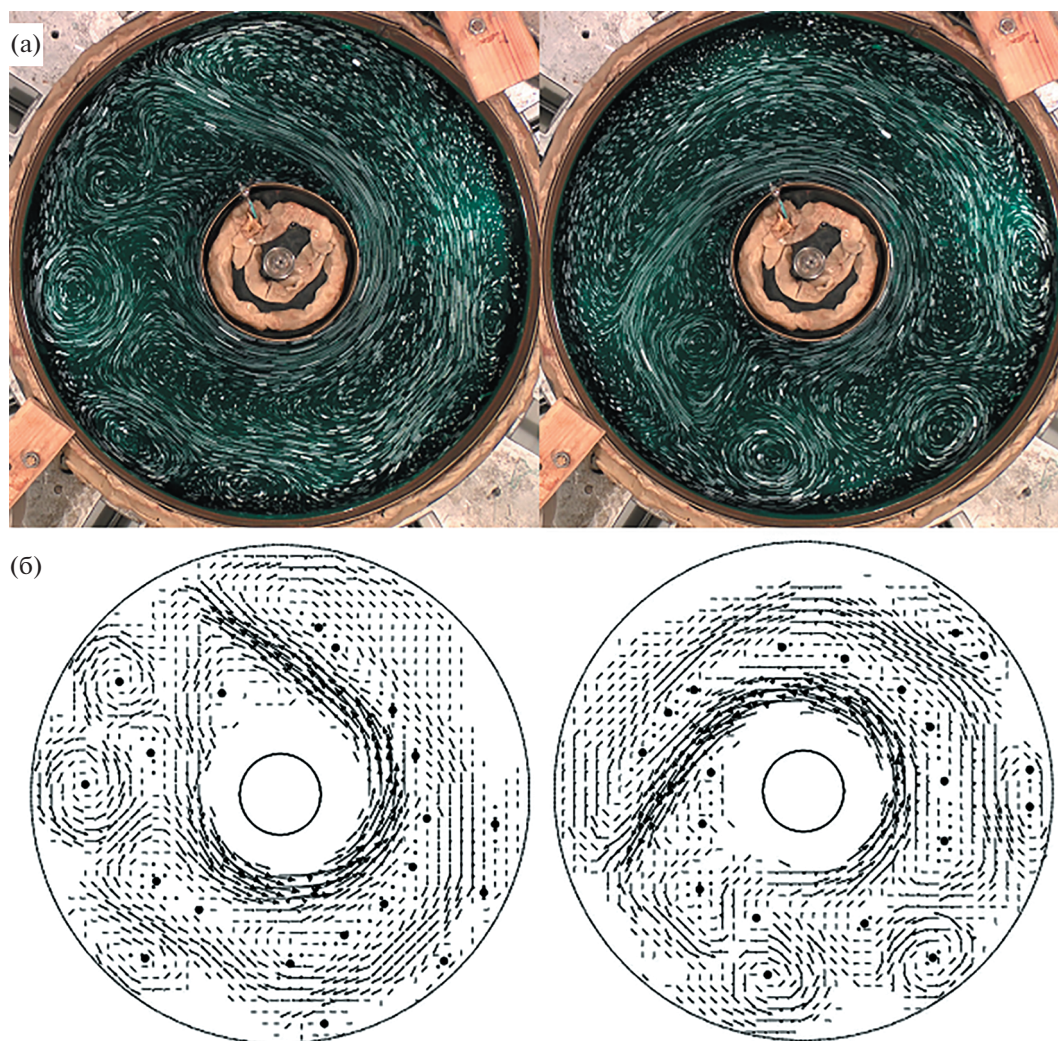


**Рис. 4.** Зависимости от времени (шкала в сутках) угловых координат антициклонических вихрей для (а)  $T = 8.2$  с (рис. 2а) и (б)  $T = 20.3$  с (рис. 3а).

показаны зависимости от времени угловых координат для периода  $T = 20.3$  с. Здесь в конце, как и в начале, имеются 3 антициклона, но со сдвигом примерно на  $\pi/4$ .

Следует, однако, отметить, что переход на новый режим при повторном включении тока 500 мА, имеет место не для любых периодов внешнего вращения. Для промежуточных периодов





**Рис. 5.** (а) Траектории частиц в канале 1 при измененной полярности тока и периоде внешнего вращения  $T = 19.4$  с, отнесенные к моментам времени  $t = 1.5, 7$  мин; (б) пунктир — схема линий тока для моментов времени  $t = 1.5, 7$  мин, построенных с использованием PIV-методики [13] по видеоизображениям.

вращения между  $T = 8.2$  с и  $T = 17.7$  с, начиная от  $T = 9.0$  с до  $T = 17.0$  с, как показывают эксперименты, переходов на новые режимы не происходило, и конечные картины вихревых движений практически не отличались от исходных.

Пример более сложного течения с протяженной струей вокруг внутреннего электрода показан на рис. 5а для  $T = 19.4$  с. (Для генерации такого течения была изменена полярность электрического тока). Первый кадр на рис. 5а относится ко времени  $t = 1.5$  мин, последний — к  $t = 7$  мин (для этого эксперимента время вторичного включения тока 500 мА было увеличено до 3 мин). Здесь близкие по топологии режимы отличаются лишь поворотом примерно на угол 90 градусов. Это легко заметить по рис. 5б, где векторы скорости строились с использованием PIV-методики [15] по видеоизображениям для тех же моментов времени, что и для рис. 5а.

Рисунок 6а демонстрирует результаты для большого канала 2 при  $T = 32.9$  с. Для него геометрия расположения магнитов подобна расположению для канала 1. Левый, средний и правый кадры относятся по времени к 1, 3 и 5 мин экспериментов с прежними интервалами по 2 мин переключений тока. Для этого периода вращения канала с самого начала сформировался режим с 5 вихрями, который оказался устойчивым при изменении силы тока в течении всего эксперимента. Размеры канала 2 позволяют смоделировать более сложную, чем для рис. 6а, структуру течений, если добавить дополнительный ряд магнитов так, чтобы у внутреннего электрода в на-





**Рис. 6.** Траектории частиц в канале 2, отнесенные к моментам времени  $t = 1, 3, 5$  мин, при периодах внешнего вращения (а)  $T = 32.9$  с, (б)  $T = 40.6$  с.

чальные моменты сформировалось течение, аналогичное восточному приполярному атмосферному переносу. При этом расположение магнитов на радиусах 14, 22 и 30 см обеспечивает западный (по часовой стрелке) поток в средней части канала, а вблизи внешнего электрода было течение против часовой стрелки (восточный перенос; напомним, в эксперименте моделируется атмосферная динамика южного полушария). На рис. 6б для периода  $T = 40.6$  с первые два кадра показывают 5-вихревую структуру течений при исходном токе 500 мА и токе 700 мА, при котором видно усиление дополнительных “приэкваториальных” вихрей. При возврате к току 500 мА структура первого кадра не восстанавливается, а появляется выраженная 4-х вихревая картина течения. В канале сформировался новый режим, отличный от появившегося при начальном включении тока 500 мА.

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ С УРАВНЕНИЯМИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Уравнения мелкой воды используются в геофизической гидродинамике для описания баротропных процессов. При этом применяются методы источников-стоков и МГД метод генерации течений. В экспериментах с постоянными магнитами радиальный ток и вертикальное магнитное поле индуцируют азимутальные течения, на которые действует сила Кориолиса. В альтернативных экспериментах по методу источников-стоков направленные от источников к стокам потоки отклоняются кориолисовой силой и закручиваются. Уравнение сохранения квазигеострофического потенциального вихря описывает волны Россби, распространение которых в основном и объясняет движение центров циклонов и антициклонов в численных и лабораторных экспериментах. В представленных далее численных экспериментах рассматривается образование различных крупномасштабных структур в результате притока энергии, связанного с конфигурациями постоянных магнитов и источников-стоков [18, 19].

Уравнения мелкой воды получаются из уравнений Эйлера несжимаемой жидкости при учете ускорения тяжести  $g$  с интегрированием по вертикали и с использованием кинематического и динамического граничных условий на свободной поверхности и условия непротекания на дне.



Предполагается слабая зависимость скоростей от вертикальной координаты, таким образом, горизонтальные скорости  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$  зависят только от горизонтальных координат и времени. Для рассматриваемой в работе цилиндрической установки, вращающейся с частотой  $\Omega_0$ , необходимо принимать во внимание формируемый в отсутствие каких-либо движений в жидкости

параболоид вращения  $H_{par}(r) = H_0 + \frac{\Omega_0^2}{2g}(x^2 + y^2) - \frac{\Omega_0^2}{4g}(R_{out}^2 + R_{in}^2)$ ,  $H_0$  – высота слоя жидкости в

состоянии покоя, отсчитываемая от платформы,  $R_{out}$  – внешний радиус канала,  $R_{in}$  – внутренний радиус канала. При появлении внешнего воздействия на жидкость будет появляться отклонение свободной поверхности от равновесного параболоида вращения, и оно определяется по толщине жидкости  $h(x, y, t)$  и высоте куносоподобного дна  $B(r) = B_0(1 - r/R_{out})$ ,  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$  (с высотой  $B_0$  конуса около внутреннего радиуса канала) формулой  $\eta(x, y, t) = h(x, y, t) + B(r) - H_{par}(r)$ .

Уравнения мелкой воды с учетом внешнего воздействия записываются традиционно в следующем виде [20]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} - 2\Omega_0 v h &= -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} + F_u, \\ \frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} + \frac{\partial(hvu)}{\partial x} + 2\Omega_0 u h &= -gh \frac{\partial \eta}{\partial y} + F_v, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{(uh)}{\partial x} + \frac{(vh)}{\partial y} &= F_h.\end{aligned}$$

Для применения численных методов необходимо переписать уравнения мелкой воды в дивергентной форме [21]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{Q})}{\partial y} &= \mathbf{C}(\mathbf{Q}), \quad U(x, y, t) = uh, \quad V(x, y, t) = vh; \quad \mathbf{Q} = (h, U, V); \\ \mathbf{f} &= \left( U, \frac{U^2}{h} + \frac{gh^2}{2}, \frac{VU}{h} \right), \quad \mathbf{g} = \left( V, \frac{UV}{h}, \frac{V^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right), \\ \mathbf{C} &= \left( F_h, F_u + \frac{F_h U}{h} + 2\Omega_0 V - gh \frac{\partial R}{\partial x}, F_v + \frac{F_h V}{h} - 2\Omega_0 U - gh \frac{\partial R}{\partial y} \right), \\ R(x, y) &= B_0(1 - r/R_{out}) - \Omega_0^2(x^2 + y^2)/(2g), \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Правая часть  $\mathbf{C}(\mathbf{Q})$  представлена неконсервативными членами: индуцирующая движение внешняя сила ( $F_h, F_u, F_v$ ), кориолисово ускорение и градиент функции, которая содержит наклон дна и форму параболоида вращения.

Для численных экспериментов с источниками-стоками

$$(F_h, F_u, F_v) = \{S^s(x, y), 0, 0\},$$

где  $S^s(x, y)$  определяется источником массы воды. Здесь внешнее воздействие осуществляется через уравнение эволюции свободной поверхности.

В случае МГД-генерации

$$(F_h, F_u, F_v) = \{0, +hS^m(x, y)y/r^2, -hS^m(x, y)x/r^2\},$$

а внешнее воздействие осуществляется силой Ампера  $(1/c)\mathbf{j} \times \mathbf{H}$  в уравнениях для поля скорости и задается напряженностью магнитного поля  $\mathbf{H}$ .

Расчеты с источниками-стоками проводились при параметрах  $R_{in} = 7$  см,  $R_{out} = 35$  см.

Циркуляция генерировалась притоком (оттоком) массы в кольце шириной  $\Delta_C$  вблизи радиуса  $R_C$  в центральной части канала и притоком (оттоком) в кольцах ширины  $\Delta_R$  вблизи  $R_{in}$  и  $R_{out}$ .

При этом функции  $S^s(x, y) \equiv S^s(r)$  задавались в форме  $S^s = -Eq/\hat{r}$ ,  $\hat{r} = r/R_{out}$ , где  $q = q_{in}, q_{out}$ , соответственно, для внутреннего и внешнего кольцевых источников-стоков массы. Для цен-

трального кольца источников-стоков используется формула  $S^s = Eq_c/\hat{r}$ . Поскольку суммарно приток массы в канал должен равняться оттоку, величина  $q_c$  определяется по следующим формулам  $q_c = (q_{in} + q_{out})\Delta_R/\Delta_C$ ,  $R_c = w_c R_{out} + (1 - w_c) R_{in}$ . При моделировании, кроме  $q = q_{in}, q_{out}$ , задается величина  $w_c$ .

Применяемый в данной работе метод central-upwind является родственным методу HLL (Harten-Lax-van Leer, [22]), в более приемлемой форме для счета уравнений мелкой воды был описан в работах [23, 24]. Как говорит авторское название метода [24], он сочетает в себе стратегию методов типа Годунова, но имеет преимущества и простоту методов центральных разностей, т.е. обходит все проблемы, связанные с точным определением структуры решения задачи Римана. Данный метод также ранее использовался в работах [18, 19].

Численная схема может быть записана в соответствии с [21] в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_{ij} &= -\frac{\mathbf{F}_{i+1/2j} - \mathbf{F}_{i-1/2j}}{\delta x} - \frac{\mathbf{G}_{ij+1/2} - \mathbf{G}_{ij-1/2}}{\delta y} + \mathbf{C}(\mathbf{Q}_{ij}), \\ \mathbf{F}_{i+1/2j} &= \mathbf{F}_{i+1/2j}^I + \mathbf{F}_{i+1/2j}^{II}, \quad \mathbf{G}_{ij+1/2} = \mathbf{G}_{ij+1/2}^I + \mathbf{G}_{ij+1/2}^{II}; \\ \mathbf{F}_{i+1/2j}^I &= \frac{a_{i+1/2j}^+ \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{ij}^E, R_{i+1/2j}) - a_{i+1/2j}^- \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{i+1j}^W, R_{i+1/2j})}{a_{i+1/2j}^+ - a_{i+1/2j}^-}, \\ \mathbf{F}_{i+1/2j}^{II} &= \frac{a_{i+1/2j}^+ a_{i+1/2j}^-}{a_{i+1/2j}^+ - a_{i+1/2j}^-} \times [\mathbf{Q}_{i+1j}^W - \mathbf{Q}_{ij}^E], \\ \mathbf{G}_{ij+1/2}^I &= \frac{b_{ij+1/2}^+ \mathbf{g}(\mathbf{Q}_{ij}^N, R_{ij+1/2}) - b_{ij+1/2}^- \mathbf{g}(\mathbf{Q}_{ij+1}^S, R_{ij+1/2})}{b_{ij+1/2}^+ - b_{ij+1/2}^-}, \\ \mathbf{G}_{ij+1/2}^{II} &= \frac{b_{ij+1/2}^+ b_{ij+1/2}^-}{b_{ij+1/2}^+ - b_{ij+1/2}^-} \times [\mathbf{Q}_{ij+1}^S - \mathbf{Q}_{ij}^N].\end{aligned}$$

Неизвестный вектор  $\mathbf{Q}$  определяется в точке центра  $(x_i, y_j)$  каждого элементарного прямоугольника сетки, но также вычисляется и на серединах границ E, W, N, S (соответственно восточной, западной, северной, южной) этого элементарного прямоугольника. Эти величины являются значениями в соответствующих точках как результат его полиномиального представления (интерполяции) на элементарном прямоугольнике сетки с использованием значений в соседних прямоугольниках по правилу minmod [21, 24]. В методе minmod для определения наклонных компонент численного решения используется самое маленькое по модулю значение из характерных производных, т.е. из разностей вперед, назад и центральной, при условии, что все они одинакового знака. В противном случае ставится нуль в качестве величины наклона.

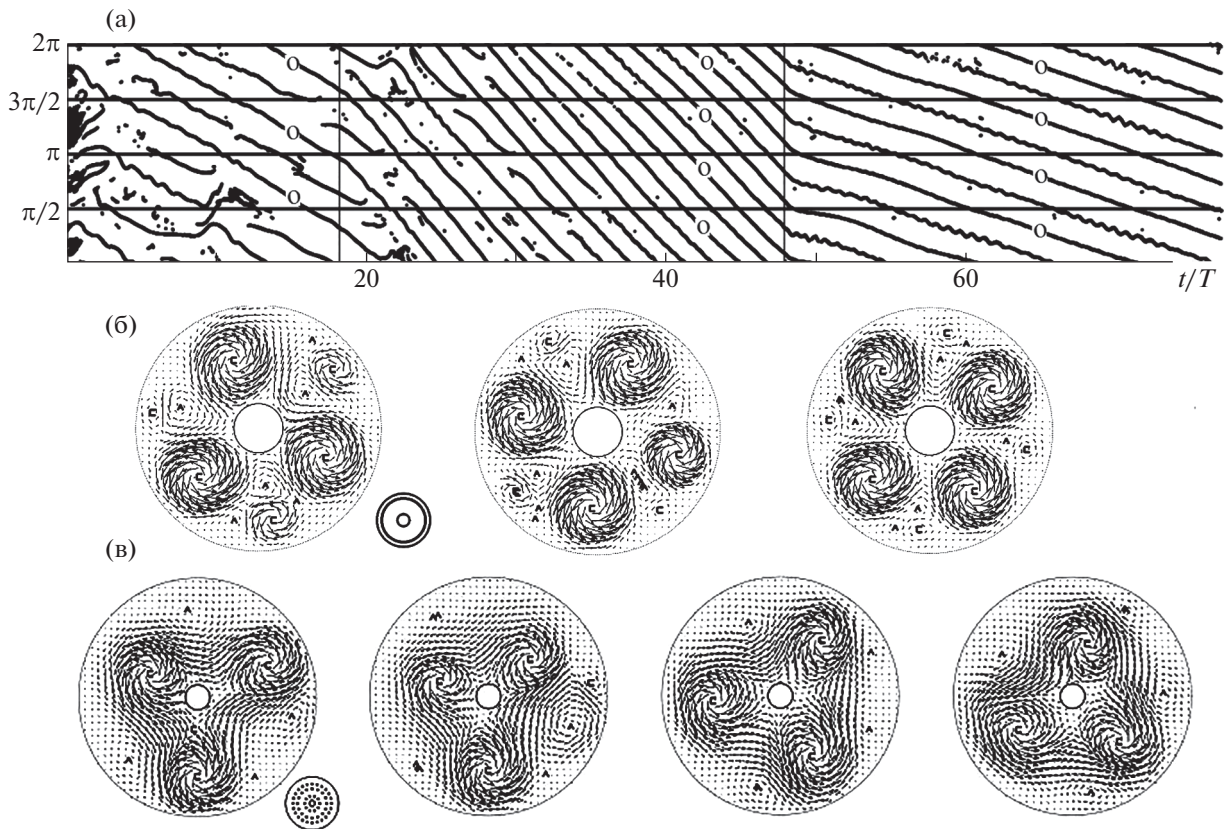
Численные выражения потоков  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$ , отличающихся от физических  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$ , определяются на границе прямоугольника (как по оси  $x$ , так и по оси  $y$ ) двумя частями.

Первые,  $\mathbf{F}_{i+1/2j}^I$  и  $\mathbf{G}_{ij+1/2}^I$ , как некое усреднение физических потоков на обеих сторонах границы, причем веса в этой суперпозиции определяются отношением скоростей распространения сигналов ( $a^+$ ,  $a^-$  по оси  $x$ ,  $b^+$ ,  $b^-$  по оси  $y$ ). Последние величины, по своей природе чисто численные, задавались в [21] по формулам

$$\begin{aligned}a_{i+1/2j}^+ &\equiv \max \left\{ \lambda_{+|i+1j}^W, \lambda_{+|ij}^E, +\frac{U}{h}|_{i+1j}^W, +\frac{U}{h}|_{ij}^E, 0 \right\}, & a_{i+1/2j}^- &\equiv \max \left\{ \lambda_{-|i+1j}^W, \lambda_{-|ij}^E, -\frac{U}{h}|_{i+1j}^W, -\frac{U}{h}|_{ij}^E, 0 \right\}, \\ b_{ij+1/2}^+ &\equiv \max \left\{ \mu_{+|ij+1}^S, \mu_{+|ij}^N, +\frac{V}{h}|_{ij+1}^S, +\frac{V}{h}|_{ij}^N, 0 \right\}, & b_{ij+1/2}^- &\equiv \max \left\{ \mu_{-|ij+1}^S, \mu_{-|ij}^N, -\frac{V}{h}|_{ij+1}^S, -\frac{V}{h}|_{ij}^N, 0 \right\}\end{aligned}$$

с участием собственных значений  $\lambda_+ = U/h + \sqrt{gh}$ ,  $\lambda_- = U/h - \sqrt{gh}$  якобиана  $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{Q}$  (для  $a^+$ ,  $a^-$ ), собственных значений  $\mu_+ = V/h + \sqrt{gh}$ ,  $\mu_- = V/h - \sqrt{gh}$  якобиана  $\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{Q}$  (для  $b^+$ ,  $b^-$ ) и скоростей жидкости  $U/h$ ,  $V/h$  в соответствующих направлениях. Скорость распространения поверхностных гравитационных волн будет являться главной частью, она значительно больше скорости жидкости в процессах, рассматриваемых в данной работе. Вторые части,  $\mathbf{F}_{i+1/2j}^{II}$  и  $\mathbf{G}_{ij+1/2}^{II}$  в выраже-





**Рис. 7.** (а) Зависимости от времени угловых координат центров циклонов (С) для численного счета уравнений с источниками-стоками; (б) пунктир — схема линий тока и векторы поля скорости в моменты времени, которые отмечены вверху на (а) кружками; у первого рисунка на (б) справа показаны круги расположения источников-стоков; (в) пунктир — схема линий тока и векторы скорости в численном эксперименте при МГД генерации: при  $t/T < 15$  — первые два кадра и при  $t/T > 20$  — последние два кадра; у первого рисунка на (в) справа показано расположение постоянных магнитов.

нии численного потока — искусственное сглаживание для подавления неустойчивости, оно физически проявляется как некий вычет, пропорциональный разности значений искомой величины по обе стороны границы прямоугольника, а коэффициент определяется модулем скорости сигнала. Таким образом, указанные вторые части препятствуют бесконтрольному росту численного решения. Начальные условия для скоростей и отклонения свободной поверхности нулевые.

Вращение кругового канала соответствовало Северному полушарию, т.е. против часовой стрелки. В экспериментах с источниками-стоками период вращения задан величиной  $T = 6$  с, для МГД-экспериментов — 11 с. Переключение режимов осуществлялось увеличением и последующим восстановлением амплитуды  $E$  функций  $S^s(r)$ .

На рис. 7а показаны зависимости от времени угловых координат центров циклонов для численного счета уравнений с источниками-стоками при параметрах  $R_C = 28$  см,  $q_{out} = 0.8$ ,  $q_{in} = 0.5$ ,  $q_C = 0.87$ ,  $w_C = 0.75$ . Параметр  $E$  до безразмерного времени  $t/T = 18$  равен  $E = -0.2$ , затем  $E = -0.4$  до  $t/T = 48$ , после чего значение  $E = -0.2$  восстанавливается. Толщины внешнего и внутреннего колец  $\Delta_C = 2$  см, центрального  $\Delta_C = 3$  см. Сплошные вертикальные линии на рис. 7а отмечают времена переключения величины  $E$ . Рисунок 7а показывает изменение числа больших циклонических вихрей после восстановления значения параметра  $E = -0.2$ : при  $t/T < 18$  было три циклона, а при  $t/T > 48$  их оказалось четыре. Это также демонстрирует рис. 7б.

На рис. 7б приведены векторы поля скорости в моменты времени, которые отмечены вверху на (а) кружками. Внизу справа у первого рис. 7б показано расположение окружностей (внутренняя и средняя), вдоль которых в численном эксперименте осуществлялись приток и отток воды. Источники-стоки во вращающейся системе благодаря действию силы Кориолиса генерируют

азимутальные потоки в канале с последующим образованием циклонических и антициклонических вихрей. На рис. 7б наиболее крупные вихри — это циклоны (С). Как видно из рис. 7б, при режиме с  $E = -0.2$  наблюдались три больших циклона с расположенными между ними более слабыми циклонами и антициклонами (А). После включения большего внешнего действия с  $E = -0.4$  образовались 4 больших циклона и сопутствующих им малых циклонов и антициклонов, которые сохранились при восстановлении “силы” до прежнего значения  $E = -0.2$ .

Для эксперимента, результаты которого показаны на рис. 7а,б, имеет место дрейф вихрей по углу против часовой стрелки. При  $t/T < 18$  три вихря перемещаются на  $\pi/2$  приблизительно за 5–6 сут (рис. 7а, до первой сплошной вертикальной линии). На конечном интервале времени при  $t/T > 48$ , когда образовались 4 больших циклона, их угловое перемещение на  $\pi/2$  уже составляет почти 12 сут. Заметим, что при значении амплитуды  $E = -0.4$  (в средней части рис. 7а,  $18 \leq t/T \leq 47$ ) угловая скорость переноса циклонов увеличилась почти в три раза по сравнению с конечным периодом эксперимента (при  $t/T > 48$ ,  $E = -0.2$ ).

Результаты численных МГД-экспериментов представлены на рис. 7в для параметров  $R_{in} = 1.5$  см,  $R_{out} = 14.5$  см при периоде общего вращения кольцевого канала  $T = 11$  с.

Направление тока между кольцевыми электродами и расположение постоянных магнитов в виде двух колец с разными полюсами, показанное на рис. 7в (внизу справа), обеспечивает в начальный момент нормальную циркуляцию с восточным направлением скорости у внешнего электрода. Функция  $S^m(x, y)$  отличается от нуля только на магнитах и равна 0.02 при безразмерном времени  $t/T < 15$ ,  $t/T > 20$ . При  $15 \leq t/T \leq 20$  значение  $S^m$  увеличено до 0.06.

На рис. 7в (при показанной внизу справа у первого рисунка конфигурации расположения магнитов) трехвихревая структура течений при  $t/T < 15$  (первые два кадра на рис. 7в) сменилась при  $t/T > 20$  такой же структурой, но сдвинутой по углу примерно на  $\pi/4$  против часовой стрелки (последние два кадра). Это соответствует угловому сдвигу течений в МГД-экспериментах, показанных на рис. 3а,б.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В экспериментах, лабораторных и численных, параметры, задающие динамику течений, выбирались таким образом, чтобы наблюдалась почти стационарная картина вихревых структур поля скорости. Этим определяются конфигурации магнитов или источников-стоков (для численных расчетов), величины тока при МГД-генерации, периоды вращения каналов.

Результаты экспериментов показывают, что при некоторых значениях параметров, в частности, периодах вращения каналов, возможны переходы к отличающимся от исходных режимам: для канала 1 при периодах  $T = 8.2, 7.3$  с (рис. 2а,б) изменилось число антициклонических вихрей, а для периодов  $T = 20.3, 17.7$  с (рис. 3а,б) при неизменном числе антициклонов значительно изменилось их угловое положение.

Аналогичное изменение пространственного положения вихрей и струй наблюдалось при периоде  $T = 19.4$  с (рис. 5) в экспериментах в канале 1 с измененной полярностью тока.

Для промежуточных периодов, начиная от  $T = 9.0$  с до  $T = 17.0$  с, как показывают эксперименты, переходов на новые режимы не происходило, и конечные картины вихревых движений практически не отличались от исходных.

Близкие результаты получаются для лабораторных экспериментов в канале 2, конфигурация расположения магнитов в котором находится в геометрическом подобии с каналом 1. Как и для канала 1, при увеличении периода  $T$  переход к новому режиму может и не состояться (рис. 6а). Увеличение периода  $T$  в условиях квазигеострофического баланса в рассматриваемых экспериментах приводит к увеличению амплитуд поля скорости в канале, что усиливает устойчивость вихревых движений. Уменьшение  $T$  приводит к уменьшению амплитуд скорости, что дает возможность реализоваться разным режимам течений в канале. Изменение числа вихрей для канала 2 показано на рис. 6б при дополнительном ряде магнитов, чтобы у внутреннего электрода в начальные моменты сформировалось течение, аналогичное восточному приполярному атмосферному переносу.

Численные эксперименты с уравнениями мелкой воды подтвердили полученные в лабораторных экспериментах результаты о возможности перехода к новым режимам при изменении на некоторое время параметра, определяющего внешнюю силу воздействия на жидкость при МГД-

генерации и генерации течений методом источников-стоков. С изменением числа крупных вихрей (циклонов) это показано на рис. 7а,б при использовании источников-стоков. При МГД-генерации можно обнаружить изменение конечного пространственного положения вихрей с сохранением их числа (рис. 7в).

Все эксперименты проводились при изменении основного параметра, определяющего генерацию течений: для лабораторных экспериментов это увеличение силы тока от 500 до 700 мА с последующим возвратом к 500 мА. В численных экспериментах с источниками-стоками менялся параметр  $E$  по модулю от 0.2 до 0.4 и обратно, а для МГД-экспериментов параметр  $S^m$  от 0.02 до 0.06. Результаты временного увеличения этих параметров можно трактовать двояко.

Либо как переход к новым начальным условиям для течения при 500 мА (при  $t = 0$  начальные условия были нулевыми по полю скорости). Тогда возникновение новых режимов не является чем-то удивительным, поскольку динамика определяется не только уравнениями (например, мелкой воды), но и начальными условиями. Тогда более удивительным представляется возврат к исходным режимам течений как на рис. 6б для канала 2 или при периодах внешнего вращения между  $T = 9.0$  с и  $T = 17.0$  с в экспериментах в канале 1.

Либо как внесение шума в исходную стационарную картину течения, что создает возможность перехода к новым режимам с помощью механизмов индуцирования переходов шумом. Соответствующая теория на основе уравнения Ито приведена, например, в книге [25]. Этот механизм может быть альтернативным двум подходам в проблеме многорежимности, рассмотренным во Введении, и, в частности, был упомянут в [26] как низкочастотная изменчивость при отклике циркуляции на высокочастотное стохастическое воздействие на систему вихрей. Также этот механизм применялся в последние годы при изучении проявления эффектов бимодальности в баротропных квазигеострофических уравнениях [27–29]. В отличие от данной работы в [27–29] различие режимов проявляется в редких изменениях числа струйных течений, а не вихревых образований циклонического или антициклонического типа.

Проведенные эксперименты поддерживают вывод указанных выше работ [1, 8, 9, 27–29] о возможности существования различающихся режимов баротропной динамики. И вряд ли его можно связать с какой-то малопараметрической аппроксимацией поля скорости в модели. Одной из характерных особенностей атмосферных движений в средних широтах является возникновение слабоподвижных антициклонических вихрей, центры которых могут располагаться либо над Западной Европой, европейской частью России или Казахстаном, Западной или Восточной Сибирью, летом или зимой. И здесь вопрос: малоподвижность вихря (блокирование) — это причина изменения состояния атмосферных движений в большей его окрестности или само состояние потоков воздуха над значительной территорией приводит к остановке западного переноса в какой-либо части этой территории. В экспериментах данной работы, а также в экспериментах [8, 9] и моделях работ [1, 27–29] многорежимность — это свойство динамики в целом. В нашем случае переходы между режимами осуществляются путем определенной “встряски” системы с последующим восстановлением исходных внешних условий. Механизм многорежимности (или более узко — бимодальности) может быть альтернативным традиционному сценарию перехода к другим режимам при изменении внешних условий — газового состава атмосферы или вариаций солнечной постоянной.

Настоящее исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда — проект № 19-17-00248.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Charney J.G., DeVore J.G. Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking // J. Atmos. Sci. 1979. V. 36. P. 1205–1216.
2. Kallen E., Wiin-Nielsen A.C. Non-linear, low order interactions // Tellus. 1980. V. 32. P. 393–409.
3. Kallen E. The nonlinear effects of orographic and momentum forcing in a low-order barotropic model // J. Atmos. Sci. 1981. V. 38. P. 2150–2163.
4. Gluhovsky A., Tong C., Agee E. Selection of modes in convective low-order models // J. Atmos. Sci. 2001. V. 59. P. 1383–1393.
5. Koo S., Ghil M. Successive bifurcations in a simple model of atmospheric zonal-flow vacillation // Chaos. V. 12. P. 300–309.
6. Wallace J.M., Cheng X. Does low-frequency atmospheric variability exhibit regime-like behavior? // Tellus. 1991. V. 43AB. P. 16–26.



7. *Schmeits M.J., Dukstra H.A.* Bimodal behavior of the Kuroshio and the Gulf stream // *J. Phys. Oceanography*. 2001. V. 31. P. 3435–3456.
8. *Weeks E.R., Tian Y., Urbach J.S., Ide K., Swinney H.L., Ghil M.* Transitions between blocked and zonal flows in a rotating annulus with topography // *Science*. 1997. V. 278. P. 1598–1601.
9. *Tian Y., Weeks E.R., Ide K., Urbach J.S., Baroud C.N., Ghil M., Swinney H.L.* Experimental and numerical studies of an eastward jet over topography // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 438. P. 129–157.
10. *Обухов А.М., Глуховский А.Б., Черноусько Ю.Л.* О явлениях переброса в простейших гидродинамических системах // *Изв. АН СССР. ФАО*. 1976. Т. 13. № 11. С. 1123–1130.
11. *Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М.* Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 366 с.
12. *Gledzer E.B., Ponomarev V.M.* Instability of bounded flows with elliptical streamlines // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 240. P. 1–30.
13. *Гледзер А.Е., Гледзер Е.Б., Хапаев А.А., Чхетиани О.Г.* Экспериментальное обнаружение блокирования переноса вихрей и волн Россби при МГД-возбуждении квазидвумерных течений во вращающемся цилиндрическом сосуде // *Письма в ЖЭТФ*. 2013. Т. 97. Вып. 6. С. 359–365.
14. *Гледзер А.Е., Гледзер Е.Б., Хапаев А.А., Чхетиани О.Г., Шалимов С.Л.* О структурах, наблюдаемых во вращающихся тонких слоях проводящей жидкости, и аномалиях геомагнитного поля // *Физика Земли*. 2018. № 4. С. 40–52.
15. *Гледзер А.Е.* Генерация крупномасштабных структур и систем вихрей в численных экспериментах во вращающихся системах // *Вычисл. мех. сплош. сред*. 2015. Т. 8. № 4. С. 408–422.
16. *Должанский Ф.В.* Основы геофизической гидродинамики. М.: Физматлит, 2011. 264 с.
17. *Kurganov A., Petrova G.* Central-upwind schemes for two-layer shallow water equations // *SIAM J. Sci. Comput.* 2009. V. 31. P. 1742–1773.
18. *Harten A., Lax P.D., van Leer B.* On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // *SIAM Rev.* 1983. V. 25. P. 35–61.
19. *Kurganov A., Tadmor E.* New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations // *J. Computational Phys.* 2000. V. 160. P. 241–282.
20. *Kurganov A., Noelle S., Petrova G.* Semidiscrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and Hamilton-Jacobi equations // *SIAM J. Sci. Comput.* 2001. V. 23. № 3. P. 707–740.
21. *Horsthemke W., Lefevre R.* Noise-Induced Transitions (Theory and Applications in Physics, Chemistry and Biology) // Springer-Verlag, 1984. (Русский перевод: Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987. 397 с.)
22. *Дымников В.П.* Устойчивость и предсказуемость крупномасштабных атмосферных процессов. М.: ИВМРАН, 2007. 283 с.
23. *Herbert C., Caballero R., Bouchet F.* Atmospheric bistability and abrupt transitions to superrotation: wave-jet resonance and Hadley cell feedbacks // *JAS*. 2020. V. 77. P. 31–49.  
<https://doi.org/10.1175/JAS-D-19-00889.1>
24. *Laurie J., Bouchet F.* Computation of rare transitions in the barotropic quasi-geostrophic equations // *New J. Phys.* 2015. V. 17. 015009.  
<https://doi.org/10.1088/1367-2630/17/1/015009>
25. *Simonnet E., Rolland J., Bouchet F.* Multistability and rare spontaneous transitions between climate and jet configurations in a barotropic model of the Jovian mid-latitude troposphere // *arXiv:2009.09913v1 [physics.ao-ph]* 18 Sep 2020.