ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2021, № 3, с. 39–47

УДК 532.593.4

ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ИМПУЛЬСА ВНУТРЕННИМИ ВОЛНАМИ В ДВУМЕРНОМ ПОТОКЕ

© 2021 г. Н. О. Анкудинов[b], А. А. Слепышев[a,b,*]

[a] *Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия*

[b] *Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова, Севастополь, Россия*

**E-mail: slep55@mail.ru*

Поступила в редакцию 10.07.2020 г.
После доработки 21.10.2020 г.
Принята к публикации 23.12.2020 г.

В приближении Буссинеска рассматриваются свободные внутренние волны при учете вращения Земли на двумерном вертикально-неоднородном стратифицированном течении. Уравнение для амплитуды вертикальной скорости фиксированной моды внутренних волн имеет комплексные коэффициенты, поэтому собственная функция и частота волны – комплексные. Мнимая часть частоты мала и может быть как отрицательной, так и положительной. Поэтому возможно как слабое затухание, так и слабое усиление волны в зависимости от волнового числа и номера моды. Вертикальные волновые потоки импульса отличны от нуля и могут превосходить соответствующие турбулентные потоки.

Ключевые слова: внутренние волны, мнимая поправка к частоте, волновой поток импульса

DOI: 10.31857/S0568528121030026

Вертикальный перенос в морской среде обычно связывается с процессами обмена, ключевую роль в этом играет мелкомасштабная турбулентность. Механизмы генерации турбулентности самые разнообразные – ветровое перемешивание в приповерхностном слое, гидродинамическая неустойчивость течений и внутренних волн, обрушение внутренних волн, донное трение, продуцирующее генерацию турбулентности в придонном пограничном слое, захват и фокусировка внутренних волн горизонтально-неоднородным пикноклином [1] и наклонным дном на шельфе [2]. При определенной геометрии дна и бассейна в целом возможен геометрический аттрактор внутренних волн – область волновой турбулентности, связанная с фокусировкой внутренних волн за счет геометрии границ [2, 3]. Здесь реализуется каскадный механизм передачи энергии от крупномасштабных волновых возмущений к мелкомасштабным, за счет трехволновых взаимодействий [2, 3]. Внутренние волны повсеместно присутствуют в океане, благодаря действию источников, их порождающих. Это воздействие атмосферных возмущений, взаимодействие течений и приливов с неоднородностями рельефа дна, генерация внутренних волн вихрями. Мелкомасштабная турбулентность сильно подавлена в пикноклине и поэтому представляется актуальным исследование вклада внутренних волн в вертикальный обмен. Внутренние волны в океане распространяются преимущественно локализованными в пространстве волновыми пакетами [4]. Нелинейные эффекты при распространении пакетов внутренних волн проявляются в генерации средних на временном масштабе волны течений [5, 6]. Вертикальная скорость этих течений не переднем и заднем фронте пакета имеет разные знаки и интегрального переноса по вертикали не происходит.

Внутренние волны при учете турбулентной вязкости и диффузии затухают [7–9]. Вертикальные волновые потоки тепла, соли и импульса при этом отличны от нуля [10, 11]. Ниже будет показано, что в двумерном течении с вертикальным сдвигом скорости вертикальный волновой поток импульса отличен от нуля и без учета турбулентной вязкости и диффузии. Дело в том, что в этом случае уравнение для амплитуды вертикальной скорости имеет комплексные коэффициенты, собственная функция краевой задачи для внутренних волн – комплексная и частота волны также комплексная. Сдвиг фаз между колебаниями вертикальной и горизонтальной скорости отличен от $\pi/2$ и вертикальный волновой поток импульса отличен от нуля.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются свободные инерционно-гравитационные внутренние волны на двумерном стратифицированном течении с вертикальным сдвигом скорости в безграничном бассейне постоянной глубины. Две компоненты скорости течения $U_0(z)$, $V_0(z)$ зависят от вертикальной координаты. В линейном приближении решается краевая задача для амплитуды вертикальной скорости и находится дисперсионное соотношение. Во втором порядке по амплитуде волны определяются вертикальные потоки импульса.

Уравнения гидродинамики в приближении Буссинеска для волновых возмущений имеют вид

$$\frac{Du}{Dt} - fv + w\frac{dU_0}{dz} = -\frac{1}{\rho_0(0)}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{1.1}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu + w\frac{dV_0}{dz} = -\frac{1}{\rho_0(0)}\frac{\partial P}{\partial y} \tag{1.2}$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0(0)}\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{g\rho}{\rho_0(0)} \tag{1. 3}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -w\frac{d\rho_0}{dz} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1.5}$$

где u, v, w – соответственно две горизонтальные и вертикальная компоненты волновой скорости течения; ρ, P – волновые возмущения плотности и давления, $\rho_0(z)$ – профиль средней плотности; x, y, z – две горизонтальные и вертикальная координаты, ось z направлена вертикально вверх; f – параметр Кориолиса, $U_0(z), V_0(z)$ – две компоненты скорости среднего течения, действие оператора D/Dt раскрывается по формуле

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + U_0)\frac{\partial}{\partial x} + (v + V_0)\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

Граничное условие на поверхности моря – условие "твердой крышки", которое отфильтровывает внутренние волны от поверхностных [12]

$$z = 0: \quad w = 0 \tag{1.6}$$

Граничное условие на дне – условие непротекания

$$z = -H: \quad w = 0 \tag{1.7}$$

2. ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Решения линейного приближения ищутся в виде

$$\begin{gathered} u_1 = u_{10}(z)Ae^{i\theta} + c.c., \quad v_1 = v_{10}(z)Ae^{i\theta} + c.c., \quad w_1 = w_{10}(z)Ae^{i\theta} + c.c. \\ P_1 = P_{10}(z)Ae^{i\theta} + c.c., \quad \rho_1 = \rho_{10}(z)Ae^{i\theta} + c.c. \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $c.c.$ – комплексно сопряженные слагаемые, A – амплитудный множитель, θ – фаза волны; $\partial\theta/\partial x = k$, $\partial\theta/\partial t = -\omega$, k – горизонтальное волновое число, ω – частота волны. Предполагается, что волна распространяется вдоль оси x.

После подстановки (2.1) в систему (1.1)–(1.5) следует связь амплитудных функций u_{10}, $v_{10}, \rho_{10}, P_{10}$ с w_{10}

$$u_{10} = \frac{i}{k}\frac{dw_{10}}{dz}, \quad \Omega = \omega - k \cdot U_0 \tag{2.2}$$

$$\frac{P_{10}}{\rho_0(0)} = \frac{i}{k}\left[\frac{\Omega}{k}\frac{dw_{10}}{dz} + \frac{dU_0}{dz}w_{10} + \frac{f}{\Omega}\left(i\frac{dV_0}{dz}w_{10} - \frac{f}{k}\frac{dw_{10}}{dz}\right)\right]$$
$$\rho_{10} = -\frac{i}{\Omega}w_{10}\frac{d\rho_0}{dz}, \quad v_{10} = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{f}{k}\frac{dw_{10}}{dz} - iw_{10}\frac{dV_0}{dz}\right) \tag{2.3}$$

Функция w_{10} удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2w_{10}}{dz^2} + k\left[\frac{if\dfrac{dV_0}{dz}}{\Omega^2 - f^2} - \frac{f^2\dfrac{dU_0}{dz}}{\Omega(\Omega^2 - f^2)}\right]\frac{dw_{10}}{dz} +$$
$$+ kw_{10}\left[\frac{k(N^2 - \Omega^2) + \Omega\dfrac{d^2U_0}{dz^2} + if\dfrac{d^2V_0}{dz^2}}{\Omega^2 - f^2} + \frac{ifk\dfrac{dU_0}{dz}\dfrac{dV_0}{dz}}{\Omega(\Omega^2 - f^2)}\right] = 0 \tag{2.4}$$

где $N^2 = -g/\rho_0(0)\cdot d\rho_0/dz$ – квадрат частоты Брента–Вяйсяля.

Граничные условия для w_{10}

$$w_{10}(0) = 0 \tag{2.5}$$

$$w_{10}(-H) = 0 \tag{2.6}$$

Краевая задача (2.4)–(2.6) решалась аналитически в статье [13] при постоянной частоте Брента–Вяйсяля и линейном профиле скорости плоскопараллельного среднего течения. Волна распространялась перпендикулярно потоку. Было получено, что собственная функция – решение этой краевой задачи для фиксированной моды внутренних волн – комплексная, а частота волны – действительная. Ниже в ходе численных расчетов будет показано, что в двумерном течении частота волны комплексная.

Уравнение (2.4) решалось методом возмущений в [14] путем разложения в ряд по малому параметру $\varepsilon = V_0^*/(H\omega_*)$, где V_0^* – характерное значение скорости течения, ω_* – характерная частота волны. Однако этот параметр не всегда мал и применимость метода ограничена. Поэтому применена неявная схема Адамса третьего порядка точности для численного решения уравнения (2.4) для реальных профилей частоты Брента–Вяйсяля и течения.

3. ВОЛНОВЫЕ ПОТОКИ ИМПУЛЬСА

Вертикальные волновые потоки импульса $\overline{uw}$, $\overline{vw}$ находятся с учетом соотношений (2.1)–(2.3)

$$\overline{uw} = \frac{i}{k}\left|A_1^2\right|\left(w_{10}^*\frac{dw_{10}}{dz} - w_{10}\frac{dw_{10}^*}{dz}\right) \tag{3.1}$$

$$\overline{vw} = \frac{iw_{10}w_{10}^*}{\Omega\Omega^*}\left|A_1^2\right|(\Omega - \Omega^*)\frac{dV_0}{dz} + \frac{f}{\Omega\Omega^*k}\left|A_1^2\right|\left(\Omega^* w_{10}^*\frac{dw_{10}}{dz} + \Omega\ w_{10}\frac{dw_{10}^*}{dz}\right) \tag{3.2}$$

где $A_1 = A\exp(\delta\omega\cdot t)$, $\delta\omega = \mathrm{Im}(\omega)$ – мнимая часть частоты. Черта сверху означает осреднение по периоду волны.

При $dV_0/dz = 0$ уравнение (2.4) имеет действительные коэффициенты, решение краевой задачи (2.4)–(2.6) – действительная функция и вертикальный волновой поток импульса $\overline{uw}$ (3.1) для фиксированной моды внутренних волн равен нулю. Мнимая часть частоты при этом тоже равна нулю. Вертикальный волновой поток импульса $\overline{vw}$ при $dV_0/dz = 0$ согласно (3.2) не равен нулю. Он равен нулю только при неучете вращения Земли, т.е. при $f = 0$. При $dV_0/dz \neq 0$, и $f \neq 0$, уравнение (2.4) имеет комплексные коэффициенты, и, как показали численные расчеты на двумерном течении, собственная функция внутренних волн – комплексная функция и вертикальный волной поток импульса $\overline{uw}$ (3.1) отличен от нуля. Волновой поток импульса $\overline{vw}$ (3.2) при этом также отличен от нуля. Таким образом, при наличии течения, у которого компонента скорости, по-

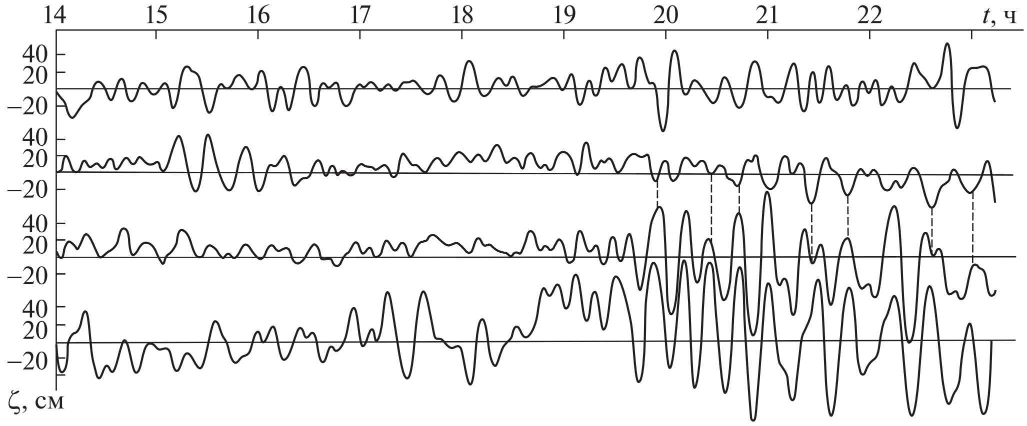

Рис. 1. Временной ход вертикальных смещений изолиний температуры.

перечная к направлению распространения волны, зависит от вертикальной координаты, волновые потоки импульса $\overline{uw}$, $\overline{vw}$ отличны от нуля. При $f = 0$ уравнение (2.4) имеет действительные коэффициенты, собственная функция фиксированной моды внутренних волн – действительная, мнимая часть частоты равна нулю и волновые потоки импульса $\overline{uw}$ (3.1) и $\overline{vw}$ (3.2) – нулевые.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для определения вертикальных волновых потоков импульса используются результаты третьего этапа 44-го рейса НИС "Михаил Ломоносов" на северо-западном шельфе Черного моря. По данным градиентно-распределенных датчиков температуры (приборов ГРАД) построен временной ход изолиний температуры (рис. 1, [15]).

Приборы располагались один над другим и пересекали слои 5–15 (первый прибор), 15–25 (второй), 25–35 (третий) и 35–60 м (четвертый прибор). Легко видеть, что мощные 15-минутные колебания в слое 25–60 находятся в противофазе с колебаниями в слое 15–25 м, что свидетельствует о присутствии внутренних волн второй моды.

Краевая задача (2.4)–(2.6) по определению w_{10} решается численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Вертикальные профили частоты Брента–Вяйсяля и двух компонент скорости течения показаны на рис. 2. Пространственная структура течения представлена на рис. 2в. Вектора скорости течения лежат в плоскостях, перпендикулярных оси Z. Частота волны при фиксированном волновом числе находится методом пристрелки, из необходимости выполнения граничных условий (2.5), (2.6). Профиль модуля собственной функции 15-минутных внутренних волн второй моды изображен на рис. 3.

Зависимость действительной части частоты $\omega_0 = \mathrm{Re}(\omega)$ от волнового числа для первых двух мод представлена на рис. 4.

Зависимость мнимой части частоты $\delta\omega = \mathrm{Im}(\omega)$ от волнового числа представлена на рис. 5.

Из рис. 5 следует, что у второй моды мнимая часть всегда отрицательная и волна слабо затухает, у первой моды затухание имеет место только в низкочастотной области, при $k < 0.06$ рад/м. При $k > 0.06$ рад/м мнимая часть частоты положительная, имеет место слабое усиление волны. В области затухания волны декремент $\delta\omega$ у второй моды по модулю больше, чем у первой моды.

Максимальная амплитуда 15-минутных внутренних волн второй моды составляет 0.5 м и это позволяет найти нормирующий множитель A_1. Действительно, вертикальная скорость связана с вертикальным смещением ζ соотношением $d\zeta/dt = w$. Отсюда находятся ζ и выражение для A_1

$$\zeta = \frac{iw_{10}}{\Omega} A_1 \exp(ikx - i\omega_0 t) + c.c.$$
$$A_1 = \frac{\max \zeta}{2 \max |w_{10}/\Omega|} \tag{4.1}$$

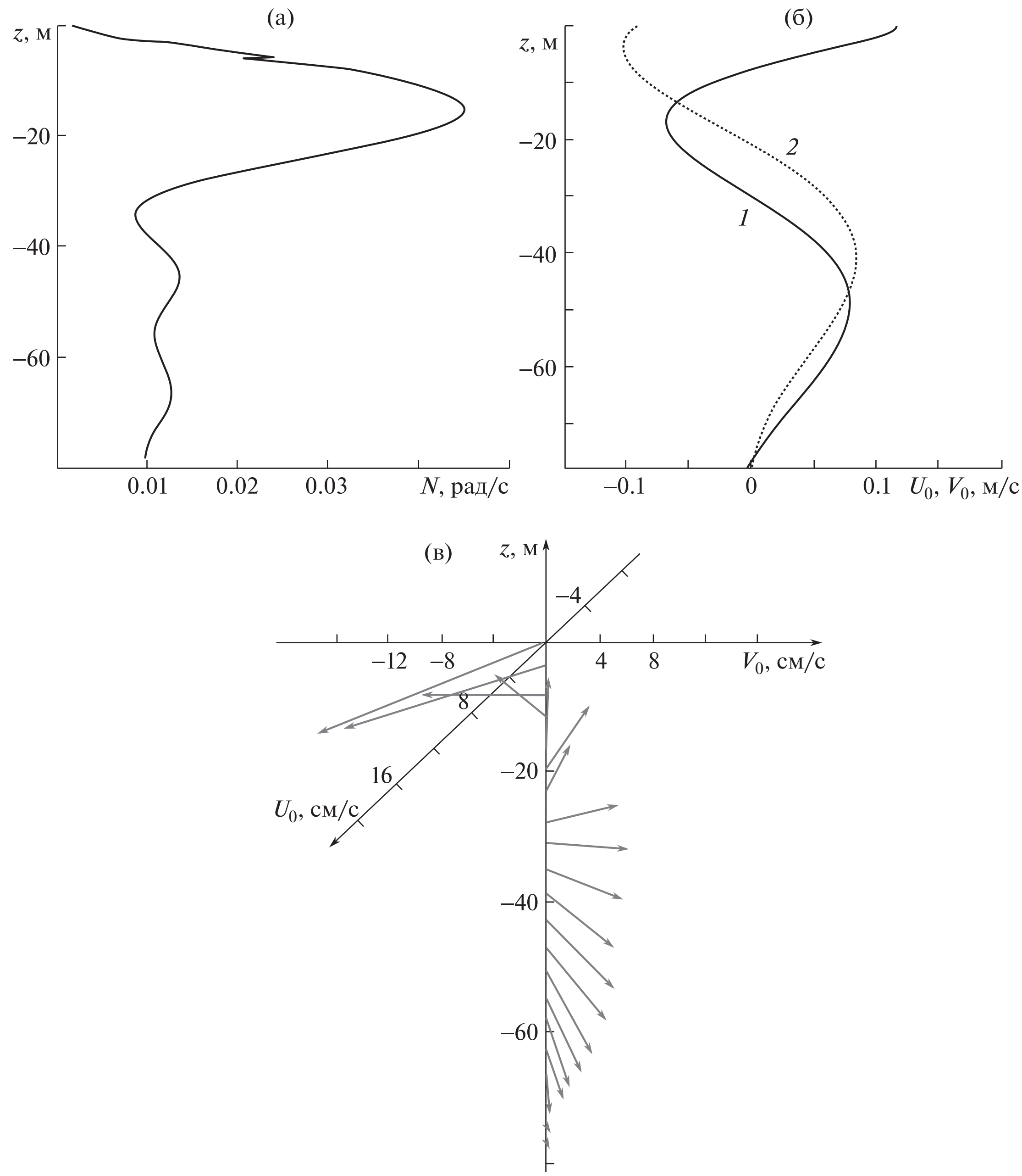

Рис. 2. Вертикальные профили: а – частоты Брента–Вяйсяля; б – компонент скорости течения U_0 (*1*), V_0 (*2*); в – пространственная структура течения.

Из (4.1) следует, что максимум ζ соответствует максимуму функции $|w_{10}/\Omega|$, максимальное по модулю значение этого отношения по данным расчетов достигается на глубине 49.5 м, т.е. соответствует глубине максимальных возвышений по данным эксперимента (рис. 1).

Сравнение волнового потока импульса $\overline{uw}$ и турбулентного потока $\overline{u'w'}$ представлено на рис. 6. Турбулентный поток импульса определялся по формуле $\overline{u'w'} = -K_z dU_0/dz$, коэффициент вертикального турбулентного обмена оценивался по формуле $K_z \cong 0.93\times10^{-4} N_c^{-1}$ м^2/с, N_c соответствует частоте Брента–Вяйсяля в цикл/ч [16]. Волновой поток импульса $\overline{uw}$ определялся для 15-минутных внутренних волн первой (*1*) и второй (*2*) мод с максимальной амплитудой 0.5 м. Волновой поток импульса второй моды заметно уступает потоку первой моды и турбулентному потоку.

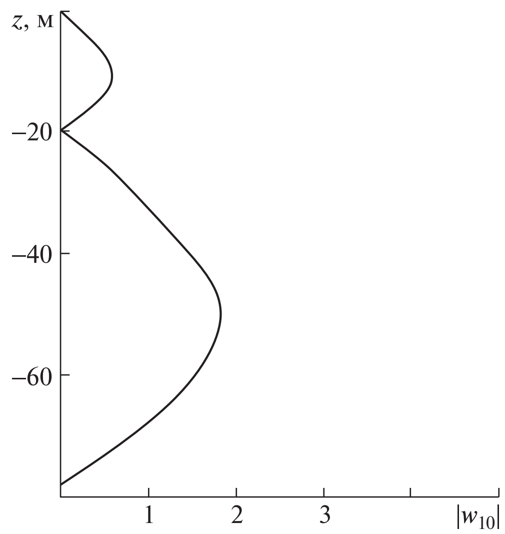

Рис. 3. Модуль собственной функции 15-минутных внутренних волн второй моды.

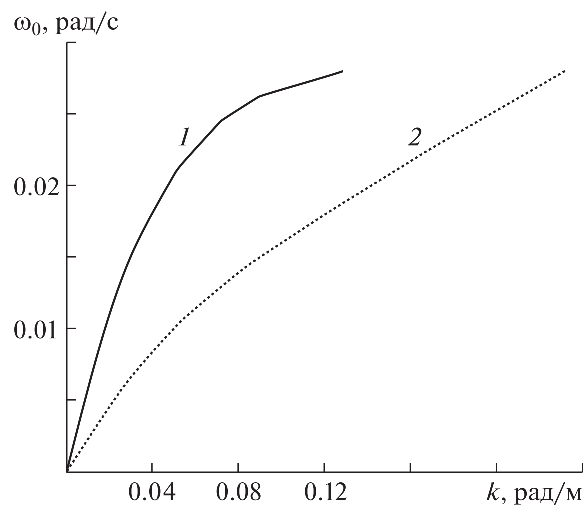

Рис. 4. Зависимость действительной части частоты от волнового числа для первой (*1*) и второй (*2*) мод.

У первой моды нет подавляющего преимущества волнового потока над турбулентным, в интервале глубин 10–30 м волновой поток импульса у первой моды по модулю сравним с турбулентным.

Вертикальные профили волнового $\overline{vw}$ и турбулентного $\overline{v'w'}$ потоков импульса показаны на рис. 7. Турбулентный поток импульса определялся по формуле $\overline{v'w'} = -K_z dV_0/dz$. Волновой поток импульса $\overline{vw}$ определялся для 15-минутных внутренних волн первой (*1*) и второй (*2*) моды с максимальной амплитудой 0.5 м. Нельзя сказать, что волновой поток импульса второй моды всюду уступает турбулентному, скорее всего глубже 30 м они сопоставимы по модулю. Вертикальный поток импульса у первой моды по абсолютной величине доминирует над турбулентным и над потоком второй моды.

Представляет интерес сопоставить волновые потоки импульса $\overline{uw}$, $\overline{vw}$ для первой и второй мод. На рис. 8 представлены вертикальные профили потоков импульса $\overline{uw}$, $\overline{vw}$ для первой моды 15-минутных внутренних волн.

Из рис. 8 следует, что поток импульса $\overline{vw}$ доминирует по модулю над $\overline{uw}$. Аналогичные зависимости представлены для второй моды 15-минутных внутренних волн на рис. 9. Здесь также волновой поток импульса $\overline{vw}$ преобладает над $\overline{uw}$.

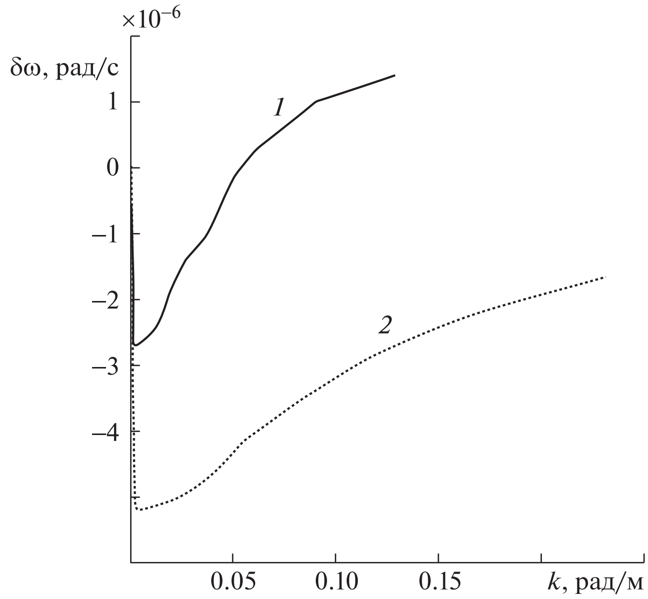

Рис. 5. Зависимость мнимой части частоты от волнового числа для первой (*1*) и второй (*2*) мод.

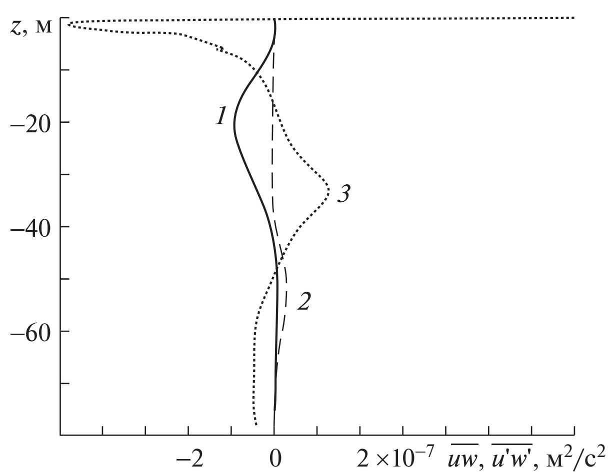

Рис. 6. Профили волновых $\overline{uw}$ (*1*), (*2*) и турбулентного $\overline{u'w'}$ (*3*) вертикальных потоков импульса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Инерционно-гравитационные внутренние волны в двумерном стратифицированном течении имеют комплексную собственную функцию и частоту. Мнимая поправка к частоте по модулю на два-три порядка меньше действительной части частоты. Знак мнимой поправки к частоте у второй моды отрицательный, т.е. имеет место слабое затухание волны. У первой моды при волновом числе $k = 0.06$ рад/м знак мнимой части частоты меняется с отрицательной величины в низкочастотной области на положительную величину в высокочастотной области, т.е. там имеет место слабое усиление волны. Волновой поток импульса $\overline{vw}$ доминирует по модулю над потоком $\overline{uw}$ как для первой, так и для второй мод 15-минутных внутренних волн. Сравнение волнового $\overline{vw}$ и турбулентного $\overline{v'w'}$ потоков импульса показывает, что для первой моды 15-минутных внутренних волн волновой поток по модулю доминирует над турбулентным. У второй моды эти потоки сравнимы по абсолютной величине. Волновой поток импульса $\overline{uw}$ у первой моды не превосходит

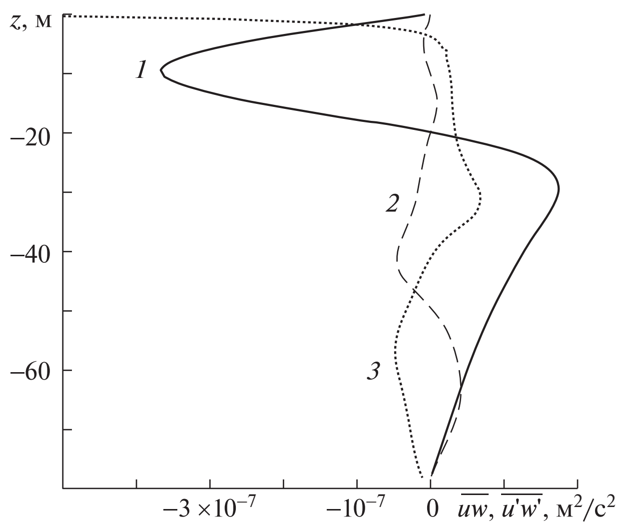

Рис. 7. Профили волновых $\overline{vw}$ (*1*), (*2*) и турбулентного $\overline{v'w'}$ (*3*) вертикальных потоков импульса.

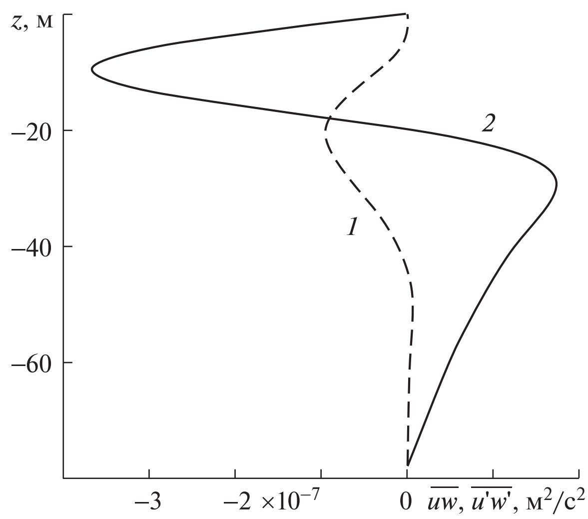

Рис. 8. Вертикальное распределение потоков импульса $\overline{uw}$ (*1*), $\overline{vw}$ (*2*) для первой моды внутренних волн.

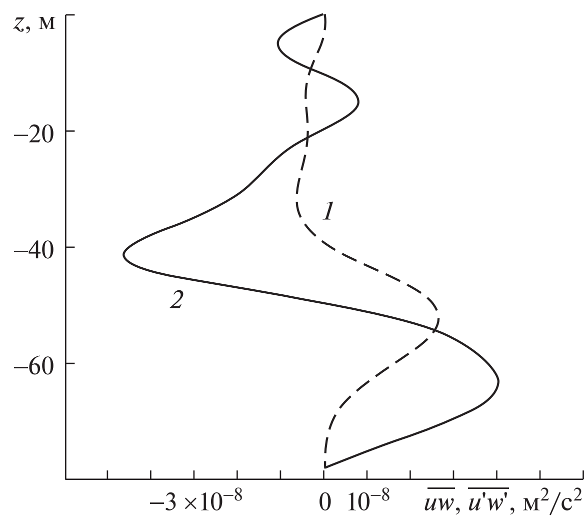

Рис. 9. Вертикальное распределение потоков импульса $\overline{uw}$ (*1*), $\overline{vw}$ (*2*) для второй моды внутренних волн.

по модулю турбулентный поток $\overline{u^{/} w^{/}}$, а у второй моды турбулентный поток импульса заметно больше по абсолютной величине волнового.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме: № 0827-2019-0003 “Фундаментальные исследования океанологических процессов, определяющих состояние и эволюцию морской среды под влиянием естественных и антропогенных факторов, на основе методов наблюдения и моделирования” (шифр “ОКЕАНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бадулин С.И., Цимринг Л.Ш., Шрира В.И.* Захват и вертикальная фокусировка внутренних волн в пикноклине горизонтальными неоднородностями стратификации и течений // Доклады АН СССР. 1983. Т. 273. № 2. С. 459–463.
2. *Sibgatullin I.N., Ermanyuk E.V.* Internal and Inertial Wave Attractors: a Review // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2019. V. 60. № 2. P. 284–302. https://doi.org/10.1134/S002189441902010X
3. *Brouzet C., Ermanyuk E.V., Joubaud S., Sibgatullin I., Dauxois T.* Energy cascade in internal-wave attractors // EPL (Europhysics Letters), V. 113. № 4. https://doi.org/10.1209/0295-5075/113/44001
4. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010. 470 с.
5. *Борисенко Ю.Д., Воронович А.Г., Леонов А.И., Миропольский Ю.З.* К теории нестационарных слабонелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. I976. Т. 12. № 3. С. 293–301.
6. *Grimshaw R.* The modulation of an internal gravity wave packet and the resonance with the mean motion // Stud. In Appl. Math. 1977. V. 56. P. 241–266.
7. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. М.: Мир, 1981. Ч. 2. 363 с.
8. *LeBlond P.H.* On damping of internal gravity waves in a continuously stratified ocean // J. Fluid Mech. 1966. V. 25. Iss. 1. P. 121–142. https://doi.org/10.1017/S0022112066000089
9. *Островский Л.А., Соустова И.А.* Верхний перемешанный слой как сток энергии внутренних волн // Океанология. 1979. Т. 19. Вып. 6. С. 973–981.
10. *Слепышев А.А.* Вертикальный перенос импульса внутренними волнами при учете турбулентной вязкости и диффузии // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2016. Т. 52. № 3. С. 342–350. https://doi.org/10.7868/S0002351516030111
11. *Слепышев А.А.* Вертикальные потоки, обусловленные внутренними волнами в бароклинном течении // Морской гидрофизический журнал. 2015. № 1. С. 64–78.
12. *Миропольский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 302 с.
13. *Слепышев А.А., Лактионова Н.В.* Вертикальный перенос импульса внутренними волнами в сдвиговом потоке // Изв. РАН Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55. № 6. С. 194–200.
14. *Воротников Д.И., Слепышев А.А.* Вертикальные потоки импульса, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами на шельфе // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 1. С. 23–35.
15. Отчет о работах в 44-м рейсе (3-й этап) НИС “Михаил Ломоносов” 7 августа–15 сентября 1985 г. Севастополь: МГИ АН УССР, 1985. Т. 1. 135 с.
16. *Иванов В.А., Самодуров А.С., Чухарев А.М., Носова А.В.* Интенсификация вертикального турбулентного обмена в районах сопряжения шельфа и континентального склона в Черном море // Доп. НАН України. 2008. № 6. С. 108–112.