

УДК 532.5:532.612

ОБОБЩЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЖУКОВСКОГО ДЛЯ ПУЗЫРЯ В КАНАЛЕ

© 2021 г. М. М. Алимов*

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

*E-mail: Mars.Alimov@kpfu.ru

Поступила в редакцию 11.06.2020 г.

После доработки 11.09.2020 г.

Принята к публикации 01.10.2020 г.

Для задачи обтекания двумерного пузыря потенциальным потоком капиллярной жидкости в прямолинейном канале построено новое точное решение, которое является обобщением известного частного решения Н.Е. Жуковского. Показано, что в одном из предельных случаев бесконечно малого пузыря это решение совпадает с точным решением Мак-Леода для пузыря в безграничном потоке.

Ключевые слова: капиллярная жидкость, двумерный пузырь, комплексная переменная

DOI: 10.31857/S0568528121030014

Рассматривается плоскопараллельное бесциркуляционное обтекание цилиндрической газовой полости (двумерного газового пузыря) стационарным потенциальным потоком идеальной невесомой и несжимаемой жидкости в прямолинейном канале при учете действия капиллярных сил. Как отмечается в [1], эта задача является лишь качественным аналогом реальной трехмерной задачи обтекания пузыря. Тем не менее вопрос о том, какую форму примет такая полость в результате суммарного действия капиллярных и гидродинамических сил, представляет самостоятельный интерес, о чем свидетельствует множество публикаций [2–5]. Кроме того, математическая постановка этой задачи родственна постановкам задачи определения конфигурации установившихся капиллярных волн [6], а также постановкам задачи о стационарной конфигурации поверхности проводящей жидкости в электрическом поле [7]. Касаясь последней работы, заметим, что в ней, с одной стороны, выявлено, что задача обтекания двумерного пузыря имеет прямую аналогию в упомянутой области электростатики; с другой стороны, ее авторы конструируют “новое” решение задачи, не замечая, что оно идентично решению Жуковского [2].

Постановка задачи, возникающая в таких различных областях, существенно нелинейна. Тем не менее имеется большое количество примеров ее точного решения – помимо упомянутых выше здесь можно отметить работы [8–11]. Это позволяет надеяться на отыскание и других ее точных решений, хотя бы и частного характера. Цель данной работы – получить новое точное решение задачи обтекания двумерного пузыря в канале путем обобщения найденного Н.Е. Жуковским частного решения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ПУЗЫРЯ В КАНАЛЕ

Ввиду широкой области применимости задачи целесообразно привести ее безразмерную постановку. На рис. 1а представлена картина течения с учетом имеющейся симметрии относительно центральной оси канала: нижняя стенка канала CDE и центральная его ось $BC \cup EA$ прямолинейны, а граница пузыря $\Gamma = AB$ свободна. Область течения обозначена через Ω .

За характерный размер задачи примем ширину канала L_* , а за характерную скорость – скорость течения на бесконечности V_* . Тогда безразмерная ширина канала будет равна 1, течение будет характеризоваться безразмерной скоростью v , а модуль ее скорости v на бесконечности $|x| \rightarrow \infty$ будет удовлетворять условию нормировки $v = 1$.

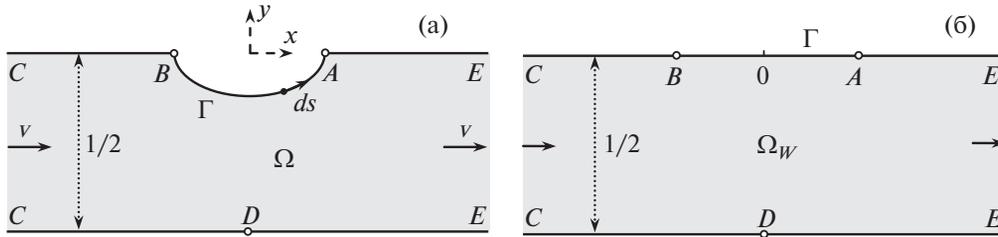


Рис. 1. Картина течения в физической плоскости (а) и вид плоскости комплексного потенциала W (б).

Всюду в области течения Ω предполагается выполнение уравнений $\mathbf{v} = \nabla\phi$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, где $\phi(x, y)$ – потенциал течения. Для потенциала имеет место краевая задача

$$\Omega: \Delta\phi = 0; \quad \partial\Omega: \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0; \quad C, E: \frac{\partial\phi}{\partial x} = 1 \tag{1.1}$$

где \mathbf{n} – нормаль к границе $\partial\Omega$. Задача (1.1) пока незамкнута, поскольку участок Γ границы $\partial\Omega$ является свободным и на нем необходимо задать дополнительное условие. Его можно получить, выписав на границе пузыря два соотношения [12]

$$\Gamma: \quad p_{air} = p + \frac{\sigma}{L_*} \frac{d\theta}{ds}, \quad p + \frac{\rho V_*^2}{2} v^2 = p_0 \tag{1.2}$$

Первое представляет собой закон Лапласа, а второе – интеграл Бернулли. Здесь p_{air} – давление воздуха в пузыре, p_0 – давление торможения потока, p – давление жидкости, ρ – ее плотность, σ – коэффициент поверхностного натяжения, θ – угол наклона к горизонту касательной к границе Γ , s – безразмерная дуговая абсцисса границы Γ . Величина $d\theta/ds$ представляет собой кривизну границы Γ , причем $d\theta/ds > 0$ для границы, выпуклой в сторону жидкости (см. рис. 1а).

Исключая давление p из двух соотношений (1.2) и используя соотношение $ds = v^{-1}d\phi$ на Γ , получим искомое дополнительное условие на этой границе [12]

$$\Gamma: \quad \frac{d\theta}{d\phi} = (\alpha v^{-1} + \beta v) \tag{1.3}$$

Входящие в него безразмерные комплексы α (число Эйлера) и β (число Вебера)

$$\alpha = \frac{L_* (p_{air} - p_0)}{\sigma}, \quad \beta = \frac{\rho V_*^2 L_*}{2\sigma} > 0$$

являются определяющими параметрами задачи, при этом параметр β необходимо положителен, а параметр α может быть и положительным, и отрицательным.

Для краевой задачи (1.1), (1.3) можно ввести комплексную плоскость $z = x + iy$ и комплексный потенциал $W = \phi + i\psi$, где ψ – функция тока [13]. Сама задача сводится к нахождению вида функции комплексного переменного $W(z)$.

Можно использовать прием параметризации: ввести вспомогательную плоскость комплексного переменного, скажем, ζ канонического вида, и вспомогательные функции $\chi(\zeta)$ либо $\omega(\zeta)$, связанные с производной dz/dW выражениями

$$\chi(\zeta) = \frac{dz}{dW} = v^{-1} e^{i\theta}; \quad \omega(\zeta) = \ln \left(\frac{dz}{dW} \right) = \ln v^{-1} + i\theta \tag{1.4}$$

где θ – угол наклона к горизонту вектора скорости. Тогда задача (1.1), (1.3) сводится к определению вида двух функций: функции $W(\zeta)$ и какой-либо из функций $\chi(\zeta)$, $\omega(\zeta)$ [12]. При этом функция $W(\zeta)$ легко определяется в замкнутом виде, и основная проблема состоит в определении функции $\chi(\zeta)$, либо $\omega(\zeta)$.

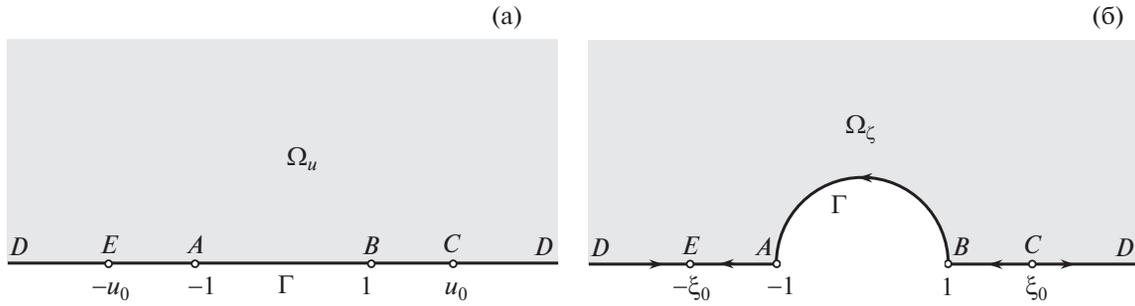


Рис. 2. Вид вспомогательных плоскостей u (а) и ζ (б).

2. РЕШЕНИЕ ЖУКОВСКОГО

В качестве вспомогательной плоскости Н.Е. Жуковский выбрал верхнюю полуплоскость [2, 12], обозначим ее через u (рис. 2а). Тогда функция $W(u)$ имеет вид

$$W(u) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{u - u_0}{u + u_0} \right) \quad (2.1)$$

В плоскости u ей отвечает течение от источника мощности 1 в точке $C: u = u_0$ к стоку той же мощности в точке $E: u = -u_0$, где $u_0 > 1$ – неопределенный параметр.

Н.Е. Жуковский строил функцию $\omega(u)$ в виде суммы двух функций, $\omega(u) = \omega_{re}(u) + i\omega_{im}(u)$, обладающими на границе Γ наперед заданными свойствами

$$\Gamma: \quad \omega_{re}(u) = \ln v^{-1}, \quad \omega_{im}(u) = \theta \quad (2.2)$$

Подставим выражения (2.2) в граничное условие (1.3), умножим на dW/du и проинтегрируем его вдоль границы Γ . В результате получим выражение [2, 12]

$$\Gamma: \quad \omega_{im}(u) = \int \left(\alpha e^{\omega_{re}(u)} + \beta e^{-\omega_{re}(u)} \right) \frac{dW}{du} du \quad (2.3)$$

Задаваясь подходящим видом функции $\omega_{re}(u)$, из формулы (2.3) при учете (2.1) можно найти соответствующий вид функции $\omega_{im}(u)$, а значит и всей функции $\omega(u)$. При этом необходимо добиться того, чтобы сохранялось условие непроницаемости на прямолинейных границах области $\partial\Omega \setminus \Gamma$, а единственными сингулярностями отображения $W \rightarrow z$ в замыкании области $\bar{\Omega}$ оставались бы точки A и B в соответствии с качественными оценками

$$z \sim z_A: \quad \frac{dW}{dz} = O(z - z_A); \quad z \sim z_B: \quad \frac{dW}{dz} = O(z - z_B) \quad (2.4)$$

Н.Е. Жуковский приводит один подходящий вид функции $\omega_{re}(u)$ [2, 12]

$$\omega_{re}(u) = \ln \left(\frac{\gamma_0}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \quad (2.5)$$

где параметр γ_0 – вещественный и положительный. Здесь у многозначной функции $\sqrt{\quad}$ выбирается ветвь, которая на участке $\Gamma = AB$ совпадает корнем квадратным, а у многозначной функции \ln – ветвь, которая на этом участке чисто вещественна.

Параметризованное решение содержит четыре вещественных параметра: α , β , u_0 и γ_0 . Подставив формулы (2.1), (2.5) в выражение (2.3) и наложив два дополнительных условия на параметры решения [2, 12]

$$1 + \frac{\alpha\gamma_0^2}{\beta} = u_0^2, \quad \frac{u_0\beta}{\gamma_0} = \pi \quad (2.6)$$

можно определить оставшуюся часть функции $\omega(u)$ – функцию $\omega_{im}(u)$

$$\omega_{im}(u) = -i \frac{u_0 \beta}{\pi \gamma_0} \ln \left(\sqrt{1-u^2} - iu \right)$$

Соответственно можно найти функцию $\omega(u)$ и производную dz/dW

$$\frac{dz}{dW} = \gamma_0 \left(1 - i \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) \tag{2.7}$$

Подставляя это выражение в условие нормировки, можно найти параметр γ_0

$$\gamma_0 = \sqrt{u_0^2 - 1} \left(u_0 + \sqrt{u_0^2 - 1} \right)^{-1} \tag{2.8}$$

Далее, используя формулы (2.1), (2.7), можно найти производную dz/du , а после ее интегрирования и саму функцию $z(u)$ [2, 12]

$$z(u) = \frac{\sqrt{u_0^2 - 1}}{\left(u_0 + \sqrt{u_0^2 - 1} \right)} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{u - u_0}{u + u_0} \right) - i \frac{u_0}{\pi \sqrt{u_0^2 - 1}} \arctan \sqrt{\frac{1-u^2}{u_0^2 - 1}} \right] \tag{2.9}$$

Кроме того, из уравнений (2.6) при учете формулы (2.8) можно найти выражения параметров α и β через основной параметр u_0 решения

$$\alpha = \frac{\pi \sqrt{u_0^2 - 1}}{u_0 \left(u_0 - \sqrt{u_0^2 - 1} \right)}, \quad \beta = \frac{\pi \sqrt{u_0^2 - 1}}{u_0 \left(u_0 + \sqrt{u_0^2 - 1} \right)} \tag{2.10}$$

Выражения (2.9), (2.10) представляют собой полученное Н.Е. Жуковским частное однопараметрическое решение задачи о пузыре в канале. Фактически он предложил метод конструирования точных решений задач со свободной границей для потенциальных течений капиллярной жидкости, который был, в частности, использован в работе [9] для построения новых точных решений некоторых задач. Однако для задачи обтекания пузыря в канале новых решений получено не было, что можно объяснить наличием у метода Жуковского двух существенных недостатков. Первый состоит в том, что довольно сложно, глядя на вид (2.5) функции $\omega_{re}(u)$, представить себе структуру ее возможного обобщения. Второй недостаток заключается в необходимости выполнения трудоемкой процедуры интегрирования функции сложного вида в соотношении (2.3).

Соответственно прежде всего целесообразно модифицировать метод Жуковского, устранив эти недостатки, но сохранив основную идею: ограничиться параметризованными решениями, в которых граничное условие (1.3) порождает явную связь между функциями $\omega_{re}(u)$, $\omega_{im}(u)$.

3. МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ЖУКОВСКОГО

В качестве вспомогательной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ вместо полуплоскости u выберем верхнюю половину внешности единичного круга Ω_ζ (см. рис. 2б). Тогда функция $W(\zeta)$ будет иметь вид

$$W(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(\zeta - \xi_0)(\zeta - \xi_0^{-1})}{(\zeta + \xi_0)(\zeta + \xi_0^{-1})} \tag{3.1}$$

где $\xi_0 > 1$ – неопределенный вещественный параметр.

Конформные отображения $\Omega_u \rightarrow \Omega_\zeta$, $\Omega_\zeta \rightarrow \Omega_u$ реализуют функции [14]

$$u = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1}), \quad \zeta = u + i\sqrt{1-u^2} \tag{3.2}$$

где у многозначной функции $\sqrt{\quad}$ выделяется ветвь, которая совпадает с корнем арифметическим на участке границы $\Gamma = AB$.

Используя первую формулу (3.2) и выражение (2.7), можно сразу выписать решение Жуковского в терминах функции $\chi(\zeta) = dz/dW$

$$\chi(\zeta) = \frac{2\gamma_0 \zeta^2}{(\zeta^2 - 1)} \tag{3.3}$$

Анализ полученного решения показывает, что функция $\chi(\zeta)$ рациональна, имеет два простых полюса в точках A и B ($\zeta = \pm 1$) и нуль второго порядка в точке $\zeta = 0$, что согласуется с оценками (2.4). Далее, на обеих осях ξ и η функция $\chi(\zeta)$ вещественна, что согласуется с картиной течения (см. рис. 1а). Действительно, комплексно сопряженная скорость течения dW/dz должна быть вещественна на стенках канала, на его линии симметрии, а также на вертикальной оси, проходящей через геометрический центр пузыря, поскольку для идеальной жидкости пузырь необходимо должен обладать двойной симметрией относительно и горизонтальной, и вертикальной оси, проходящей через его геометрический центр.

Отмеченные свойства функции (3.3) решения Жуковского позволяют сразу указать структуру его возможного обобщения – это функция $\chi(\zeta)$ из класса рациональных функций следующего вида

$$\chi(\zeta) = \gamma \frac{\zeta^{2+2J-2K}}{(\zeta^2 - 1)} \left[\prod_{k=1}^K (\zeta^2 - a_k) \right] \left[\prod_{j=1}^J (\zeta^2 - b_j) \right]^{-1}, \quad K \geq 0, \quad J \geq 0 \quad (3.4)$$

где параметры γ , a_k ($k = 1, \dots, K$) и b_j ($j = 1, \dots, J$) вещественны, причем $\gamma > 0$, $\zeta = \pm\sqrt{a_k}$ – это нули, а $\zeta = \pm\sqrt{b_j}$ – полюса рациональной функции $\chi(\zeta)$ (нули и полюса могут быть кратными, тогда они просто повторяются). Требование конформности отображения $z \rightarrow W$ означает, что эти дополнительные в сравнении с видом (3.3) нули и полюса функции $\chi(\zeta)$ должны лежать внутри единичного круга

$$|a_k| < 1, \quad k = 1, \dots, K; \quad |b_j| < 1, \quad j = 1, \dots, J \quad (3.5)$$

Следует отметить, что именно с классом рациональных функций связаны основные успехи в построении точных решений нестационарной задачи о стягивании контура нефтеносности [15], а также родственной ей задачи об эволюции межфазной границы в течениях Хеле-Шоу [16–18]. Соответственно некоторые эффективные приемы, использованные в этих работах, можно применить и здесь. Одним из таких приемов является замена в граничных соотношениях на Γ операции комплексного сопряжения на оператор \mathcal{P} [15], определенный следующим образом

$$\Gamma: \quad \overline{f(\zeta)} = \mathcal{P}[f(\zeta)], \quad \mathcal{P}[f(\zeta)] = f^*(\zeta)|_{\zeta \rightarrow \zeta^{-1}} \quad (3.6)$$

где знак черты означает операцию комплексного сопряжения, а верхний индекс звездочка – операцию сопряжения только по параметрам (но не переменным) функции.

Выразим основную идею метода Жуковского в терминах функции $\chi(\zeta)$, а именно: представим эту функцию в виде произведения двух функций $\chi_{\text{mod}}(\zeta)$, $\chi_{\text{arg}}(\zeta)$

$$\chi(\zeta) = \chi_{\text{mod}}(\zeta)\chi_{\text{arg}}(\zeta)$$

которые на границе Γ обладают такими свойствами

$$\Gamma: \quad \chi_{\text{mod}}(\zeta) = |\chi(\zeta)| \equiv v^{-1}, \quad \chi_{\text{arg}}(\zeta) = e^{i \arg \chi(\zeta)} \equiv e^{i\theta} \quad (3.7)$$

Вид этих функций можно найти с помощью оператора \mathcal{P}

$$\chi_{\text{mod}}(\zeta) = \left\{ \chi(\zeta) \mathcal{P}[\chi(\zeta)] \right\}^{1/2}, \quad \chi_{\text{arg}}(\zeta) = \left\{ \frac{\chi(\zeta)}{\mathcal{P}[\chi(\zeta)]} \right\}^{1/2}$$

Подставляя сюда общий вид (3.4) функции $\chi(\zeta)$ и раскрывая действие оператора \mathcal{P} согласно формуле (3.6), получим явные выражения

$$\chi_{\text{mod}}(\zeta) = i\gamma \frac{\zeta^{1+J-K}}{(\zeta^2 - 1)} \left[\prod_{k=1}^K (\zeta^2 - a_k)(1 - a_k \zeta^2) \right]^{1/2} \left[\prod_{j=1}^J (\zeta^2 - b_j)(1 - b_j \zeta^2) \right]^{-1/2} \quad (3.8)$$

$$\chi_{\text{arg}}(\zeta) = -i\zeta^{1+J-K} \left[\prod_{k=1}^K (\zeta^2 - a_k) \prod_{j=1}^J (1 - b_j \zeta^2) \right]^{1/2} \left[\prod_{j=1}^J (\zeta^2 - b_j) \prod_{k=1}^K (1 - a_k \zeta^2) \right]^{-1/2} \quad (3.9)$$

Как видим, мультипликативные части $\chi_{\text{mod}}(\zeta)$, $\chi_{\text{arg}}(\zeta)$ функции $\chi(\zeta)$, принадлежащей классу рациональных функций (3.4), в общем случае уже не будут рациональными функциями. Это

приводит к существенным проблемам при конструировании точных решений [15, 16]. Поэтому из общего класса рациональных функций (3.4) целесообразно выделить более узкий класс функций $\chi(\zeta)$

$$\chi(\zeta) = \gamma \frac{\zeta^{2+4J-4K}}{(\zeta^2 - 1)} \left[\prod_{k=1}^K (\zeta^2 - a_k)^2 \right] \left[\prod_{j=1}^J (\zeta^2 - b_j)^2 \right]^{-1} \quad (3.10)$$

мультипликативные части которых $\chi_{\text{mod}}(\zeta)$, $\chi_{\text{arg}}(\zeta)$ также будут рациональными функциями. Действительно, из формул (3.8), (3.9) при учете (3.4), (3.10) следует

$$\chi_{\text{mod}}(\zeta) = i\gamma \frac{\zeta^{1+2J-2K}}{(\zeta^2 - 1)} \left[\prod_{k=1}^K (\zeta^2 - a_k)(1 - a_k\zeta^2) \right] \left[\prod_{j=1}^J (\zeta^2 - b_j)(1 - b_j\zeta^2) \right]^{-1} \quad (3.11)$$

$$\chi_{\text{arg}}(\zeta) = -i\gamma \zeta^{1+2J-2K} \left[\prod_{k=1}^K (\zeta^2 - a_k) \prod_{j=1}^J (1 - b_j\zeta^2) \right] \left[\prod_{j=1}^J (\zeta^2 - b_j) \prod_{k=1}^K (1 - a_k\zeta^2) \right]^{-1} \quad (3.12)$$

Далее, аналогично оригинальному методу Жуковского из граничного условия (1.3) можно вывести соотношение, связывающее мультипликативные части $\chi_{\text{mod}}(\zeta)$, $\chi_{\text{arg}}(\zeta)$ функции $\chi(\zeta)$. Действительно, перепишем условие (1.3) в виде

$$\Gamma: \quad d\theta = (\alpha v^{-1} + \beta v) \frac{dW}{d\zeta} d\zeta$$

и умножим левую и правую его части на $ie^{i\theta}$. Имеем

$$\Gamma: \quad ie^{i\theta} d\theta = i(\alpha v^{-1} e^{i\theta} + \beta v e^{i\theta}) \frac{dW}{d\zeta} d\zeta \quad (3.13)$$

Используя определение (3.7) функции $\chi_{\text{arg}}(\zeta)$, левую часть соотношения (3.13) можно преобразовать к такому виду

$$\Gamma: \quad ie^{i\theta} d\theta = \left(\frac{de^{i\theta}}{d\zeta} \right) d\zeta = \frac{d\chi_{\text{arg}}}{d\zeta} d\zeta \quad (3.14)$$

Правую часть соотношения (3.13) также можно преобразовать, используя вытекающие из формул (1.4), (3.6) выражения

$$\Gamma: \quad v^{-1} e^{i\theta} = \chi(\zeta), \quad v e^{i\theta} = \frac{1}{\mathcal{P}[\chi(\zeta)]}$$

Тогда правая часть соотношения (3.13) примет вид

$$\Gamma: \quad i(\alpha v^{-1} e^{i\theta} + \beta v e^{i\theta}) \frac{dW}{d\zeta} d\zeta = i \left\{ \alpha \chi(\zeta) + \frac{\beta}{\mathcal{P}[\chi(\zeta)]} \right\} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta \quad (3.15)$$

Подставляя выражения (3.14), (3.15) в соотношение (3.13), получим

$$\Gamma: \quad \frac{d\chi_{\text{arg}}}{d\zeta} = i \left\{ \alpha \chi(\zeta) + \frac{\beta}{\mathcal{P}[\chi(\zeta)]} \right\} \frac{dW}{d\zeta} \quad (3.16)$$

Это основное соотношение, которое надо выполнить, чтобы функция $\chi(\zeta)$ удовлетворяла граничному условию (1.3). Анализ соотношения (3.16) показывает, что его левая и правая части представляют собой рациональные функции и его выполнение принципиально возможно. Параметры решения α , β , γ , a_k и b_j выступают некоторыми степенями свободы. Однако общий вид (3.10) функции $\chi(\zeta)$ для анализа слишком сложен, и следует ограничиться более простым видом функции.

4. ОБОБЩЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЖУКОВСКОГО

Выберем функцию $\chi(\zeta)$ из класса функций (3.10), положив $J = 0$, $K = 1$

$$\chi(\zeta) = \gamma \frac{(\zeta^2 - a_1)^2}{(\zeta^2 - 1)\zeta^2} \quad (4.1)$$

где вещественный параметр a_1 , согласно (3.5), должен удовлетворять требованию

$$-1 < a_1 < 1 \quad (4.2)$$

Из формул (3.11), (3.12) найдем вид функций $\chi_{\text{mod}}(\zeta)$, $\chi_{\text{arg}}(\zeta)$ для функции (4.1)

$$\chi_{\text{mod}}(\zeta) = -i\gamma \frac{(\zeta^2 - a_1)(a_1\zeta^2 - 1)}{\zeta(\zeta^2 - 1)}; \quad \chi_{\text{arg}}(\zeta) = \frac{i}{\zeta} \frac{(\zeta^2 - a_1)}{(a_1\zeta^2 - 1)} \quad (4.3)$$

Применяя оператор \mathcal{P} к функции $\chi(\zeta)$, получим

$$\mathcal{P}[\chi(\zeta)] = -\gamma(a_1\zeta^2 - 1)^2(\zeta^2 - 1)^{-1} \quad (4.4)$$

Продифференцировав второе выражение (4.3), найдем производную $d\chi_{\text{arg}}/d\zeta$

$$\frac{d\chi_{\text{arg}}}{d\zeta} = i \frac{(3a_1^2 - 1)\zeta^2 - a_1(\zeta^4 + 1)}{\zeta^2(a_1\zeta^2 - 1)^2} \quad (4.5)$$

Продифференцировав выражение (3.1), найдем производную $dW/d\zeta$

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{(\xi_0 + \xi_0^{-1})(\zeta^2 - 1)}{\pi(\zeta^2 - \xi_0^2)(\zeta^2 - \xi_0^{-2})} \quad (4.6)$$

Подставив формулы (4.4)–(4.6) в основное соотношение (3.16), получим

$$\Gamma: \frac{(3a_1^2 - 1)\zeta^2 - a_1(\zeta^4 + 1)}{\zeta^2(a_1\zeta^2 - 1)^2} = \left[\frac{\alpha\gamma(\zeta^2 - a_1)^2}{(\zeta^2 - 1)\zeta^2} - \frac{\beta(\zeta^2 - 1)}{\gamma(a_1\zeta^2 - 1)^2} \right] \frac{(\xi_0 + \xi_0^{-1})(\zeta^2 - 1)}{\pi(\zeta^2 - \xi_0^2)(\zeta^2 - \xi_0^{-2})} \quad (4.7)$$

Если ввести обозначения A и B для следующих комбинаций параметров

$$A = \frac{\alpha\gamma}{\pi}(\xi_0 + \xi_0^{-1}), \quad B = \frac{\beta}{\pi\gamma}(\xi_0 + \xi_0^{-1}) > 0 \quad (4.8)$$

то соотношение (4.7) можно привести к виду

$$\Gamma: \frac{[(3a_1^2 - 1)\zeta^2 - a_1(\zeta^4 + 1)](\zeta^2 - \xi_0^2)(\zeta^2 - \xi_0^{-2})}{\zeta^2(a_1\zeta^2 - 1)^2} = \frac{A(\zeta^2 - a_1)^2}{\zeta^2} - \frac{B(\zeta^2 - 1)^2}{(a_1\zeta^2 - 1)^2}$$

В этом соотношении левую и правую части можно привести к одному и тому же знаменателю и сократить его. В результате получим соотношение

$$\Gamma: -a_1(\zeta^4 + 1)^2 + \zeta^2(\zeta^4 + 1)[(3a_1^2 - 1) + a_1(\xi_0^2 + \xi_0^{-2})] - \zeta^4(3a_1^2 - 1)(\xi_0^2 + \xi_0^{-2}) = \\ = Aa_1^2(\zeta^4 + 1)^2 - \zeta^2(\zeta^4 + 1)[2Aa_1(a_1^2 + 1) + B] + \zeta^4[A(a_1^2 + 1)^2 + 2B] \quad (4.9)$$

Проанализируем его. Очевидно, что оно будет выполнено, если параметры решения будут удовлетворять всего лишь трем условиям:

$$Aa_1^2 = -a_1 \quad (4.10)$$

$$(3a_1^2 - 1) + a_1(\xi_0^2 + \xi_0^{-2}) = -2Aa_1(a_1^2 + 1) - B \quad (4.11)$$

$$(3a_1^2 - 1)(\xi_0^2 + \xi_0^{-2}) = -A(a_1^2 + 1)^2 - 2B \quad (4.12)$$

(где в условии (4.10) не следует сокращать a_1 , поскольку тем самым будет отброшено возможное его решение $a_1 = 0$). В то же время само соотношение (4.9) зависит от четырех параметров: A , B , a_1 , ξ_0 . Таким образом, это соотношение может быть выполнено для целого интервала значений основного параметра, скажем, a_1 , при том, что остальные параметры A , B , ξ_0 будут выражены че-

рез a_1 . Последний меняется в интервале (4.2), но здесь приходится отдельно рассмотреть два случая: $a_1 \neq 0$ и $a_1 = 0$.

Случай $a_1 \neq 0$. После введения обозначения

$$F(a_1) = \frac{6 - a_1^{-1}(1 + a_1^2)^2 - 2a_1^2}{1 - 3a_1^2 + 2a_1} \quad (4.13)$$

из системы уравнений (4.10)–(4.12) можно найти явные выражения параметров A , B и ξ_0 через a_1 (см. Приложение А)

$$A = -a_1^{-1}, \quad B = 3 - a_1^2 - a_1 F(a_1), \quad \xi_0 = \sqrt{0.5 \left[F(a_1) + \sqrt{F^2(a_1) - 4} \right]} \quad (4.14)$$

Однако только в части интервала $-1 < a_1 < 1$, а именно – в интервале

$$-1/3 < a_1 < 0 \quad (4.15)$$

решение (4.14) физически содержательно: параметр ξ_0 – вещественен и $B > 0$.

Величину γ найдем подстановкой выражения (4.1) в условие нормировки

$$\gamma = (\xi_0^2 - 1)(\xi_0^2 - a_1)^{-2} \xi_0^2 \quad (4.16)$$

Наконец из формул (4.8) найдем выражения для параметров α и β

$$\alpha = \frac{\pi A}{\gamma(\xi_0 + \xi_0^{-1})}, \quad \beta = \frac{\pi B \gamma}{(\xi_0 + \xi_0^{-1})} \quad (4.17)$$

Случай $a_1 = 0$. Система уравнений (4.10)–(4.12) вырождается, поскольку уравнение (4.10) выполняется тождественно. Оставшиеся уравнения и условие нормировки дают

$$A = (\xi_0 - \xi_0^{-1})^2, \quad B = 1, \quad \gamma = 1 - \xi_0^{-2} \quad (4.18)$$

Далее из формул (4.8) получаются те же самые выражения (4.17) для параметров α и β . Подставляя в них формулы (4.18), получим

$$\alpha = \pi \xi_0 \left(\frac{\xi_0^2 - 1}{\xi_0^2 + 1} \right), \quad \beta = \frac{\pi}{\xi_0} \left(\frac{\xi_0^2 - 1}{\xi_0^2 + 1} \right) \quad (4.19)$$

Очевидно, что это однопараметрическое решение с основным параметром $\xi_0 > 1$ – другая форма представления решения Жуковского, см. раздел 2. Параметры ξ_0 и u_0 связаны выражением $\xi_0 = u_0 + (u_0^2 - 1)^{1/2}$, вытекающим из связи (3.2) переменных ζ и u , формулы (4.19) перейдут в формулы (2.10), а параметры γ и γ_0 будут связаны выражением $\gamma = 2\gamma_0$.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНФИГУРАЦИИ ПУЗЫРЯ И ЕГО ПЛОЩАДИ

Производную $dz/d\zeta$ можно получить как произведение функций $\chi(\zeta)$ и $dW/d\zeta$ известного вида (4.1) и (4.6)

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{\gamma(\xi_0 + \xi_0^{-1})(\zeta^2 - a_1)^2}{\pi(\zeta^2 - \xi_0^2)(\zeta^2 - \xi_0^{-2})\zeta^2} \quad (5.1)$$

Интегрируя выражение (5.1), найдем и функцию $z(\zeta)$

$$z(\zeta) = -\frac{\gamma a_1^2 (\xi_0 + \xi_0^{-1})}{\pi \zeta} + C_1 \ln \left(\frac{\xi_0 - \zeta}{\xi_0 + \zeta} \right) - D_1 \ln \left(\frac{\xi_0 - \zeta^{-1}}{\xi_0 + \zeta^{-1}} \right) \quad (5.2)$$

с точностью до несущественной аддитивной константы. Здесь для многозначных функций логарифмов в выражении (5.2) выбираются те их однозначные ветви, которые вещественны на границе BC , а через C_1 и D_1 обозначены константы следующего вида

$$C_1 = \frac{\gamma(a_1^2 - 2a_1\xi_0^2 + \xi_0^4)}{2\pi\xi_0^2(\xi_0^2 - 1)}, \quad D_1 = \frac{\gamma(a_1^2\xi_0^4 - 2a_1\xi_0^2 + 1)}{2\pi(\xi_0^2 - 1)} \quad (5.3)$$

Таблица 1

n	Невырожденное решение				Вырожденное решение			
	Основной параметр a_1	α	β	S	Основной параметр ξ_0	α	β	S
1	-0.2746	1.7326	6.7503	0.0048	1.02	0.0634	0.0609	0.0475
2	-0.2172	2.8996	4.8212	0.0096	1.0611	0.1976	0.1755	0.095
3	-0.1158	6.0987	3.3381	0.0145	1.2423	0.8339	0.5403	0.1425
4	-0.0423	13.041	2.2603	0.0096	1.7649	2.8498	0.9149	0.095
5	-0.0174	22.285	1.5553	0.0048	2.5685	5.9449	0.9011	0.0475

Производная $dz/d\zeta$ вида (5.1), очевидно, вещественна при ζ – вещественном. Это позволяет продолжить область определения функций $dz/d\zeta$ и $z(\zeta)$ до внешности единичного круга: $|\zeta| > 1$ [14]. Полагая $\zeta = e^{i\sigma}$, $\sigma = [0, 2\pi]$ в выражении (5.2), получим параметрическое уравнение контура пузыря.

Площадь пузыря S можно вычислить как комбинацию контурных интегралов вдоль единичной окружности C_ζ : $|\zeta| = 1$ (см. Приложение B)

$$S = \frac{\gamma(\xi_0 + \xi_0^{-1})}{2\pi i} \left[\oint_{C_\zeta} \frac{\Phi^-(\zeta)d\zeta}{(\zeta^2 - \xi_0^{-2})} - \oint_{C_\zeta} \frac{\Phi^+(\zeta)d\zeta}{(\zeta^2 - \xi_0^2)} \right] \quad (5.4)$$

где введены вспомогательные функции $\Phi^-(\zeta)$ и $\Phi^+(\zeta)$

$$\Phi^-(\zeta) = \frac{C_1(1 - a_1\zeta^2)^2}{(\zeta^2 - \xi_0^2)} \ln \left(\frac{\xi_0 - \zeta}{\xi_0 + \zeta} \right), \quad \Phi^+(\zeta) = \frac{(1 - a_1\zeta^2)^2}{(\zeta^2 - \xi_0^{-2})} \left[\frac{\gamma a_1^2 (\xi_0 + \xi_0^{-1})}{\pi \zeta} + D_1 \ln \left(\frac{\xi_0 - \zeta^{-1}}{\xi_0 + \zeta^{-1}} \right) \right] \quad (5.5)$$

Оба контурных интеграла в формуле (5.4) вычисляются с помощью теории вычетов [14]. В результате для площади пузыря S получим точное выражение

$$S = \frac{\gamma(\xi_0 + \xi_0^{-1})}{2} \left[\xi_0 \Phi^-(\xi_0^{-1}) - \xi_0 \Phi^-(-\xi_0^{-1}) + \frac{\Phi^+(\xi_0)}{\xi_0} - \frac{\Phi^+(-\xi_0)}{\xi_0} - \frac{2\gamma a_1^4 (\xi_0 + \xi_0^{-1})}{\pi} + \frac{4a_1^2 D_1}{\xi_0} \right] \quad (5.6)$$

Отметим, что формулами (5.1)–(5.3) и (5.5), (5.6) можно пользоваться как в случае $-(1/3) < a_1 < 0$, так и в случае $a_1 = 0$.

6. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

Выражение (5.2) при учете формул (5.3), (5.6) представляет собой частное решение краевой задачи (1.1), (1.3). По сути, оно охватывает два отдельных частных решения: первое – невырожденное решение с основным параметром a_1 надо дополнить формулами (4.13)–(4.17); второе – вырожденное решение (решение Жуковского) с основным параметром $\xi_0 > 1$ надо дополнить формулами (4.18), (4.19).

На рис. 3а, б представлены зависимости определяющих параметров α , β и площади пузыря S от основного параметра a_1 для невырожденного решения и соответственно от основного параметра ξ_0 для вырожденного решения. Отметим, что параметр β для невырожденного решения меняется в интервале от 0 до бесконечности, в то время, как для вырожденного решения – только в интервале $0 < \beta \leq 0.9434$, где максимум β достигается при $\xi_0 = 2.0568$.

Для обоих решений площадь пузыря S ведет себя качественно одинаково на всем интервале изменения основного параметра: на концах интервала $S = 0$, а в средней его части имеет выраженный максимум $S = S_{\max}$, для невырожденного решения $S_{\max} = 0.0145$, для вырожденного решения $S_{\max} = 0.1425$. Более подробный анализ конфигураций пузыря предлагается провести для пяти значений основного параметра в обоих решениях: одного значения, отвечающего $S = S_{\max}$,

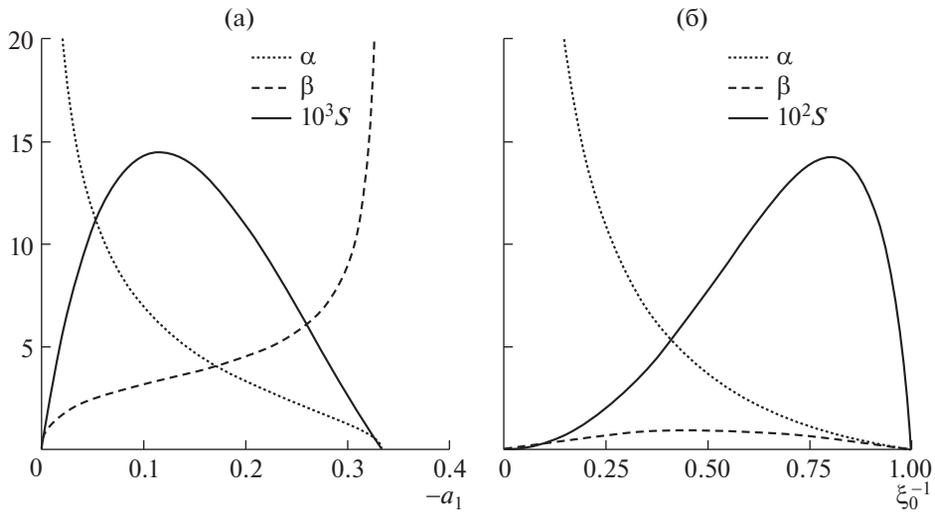


Рис. 3. Зависимости параметров α (пунктирная линия), β (штриховая линия) и площади пузыря S (сплошная линия) от основного параметра a_1 для невырожденного (а) и соответственно от основного параметра ξ_0 для вырожденного решения (б).

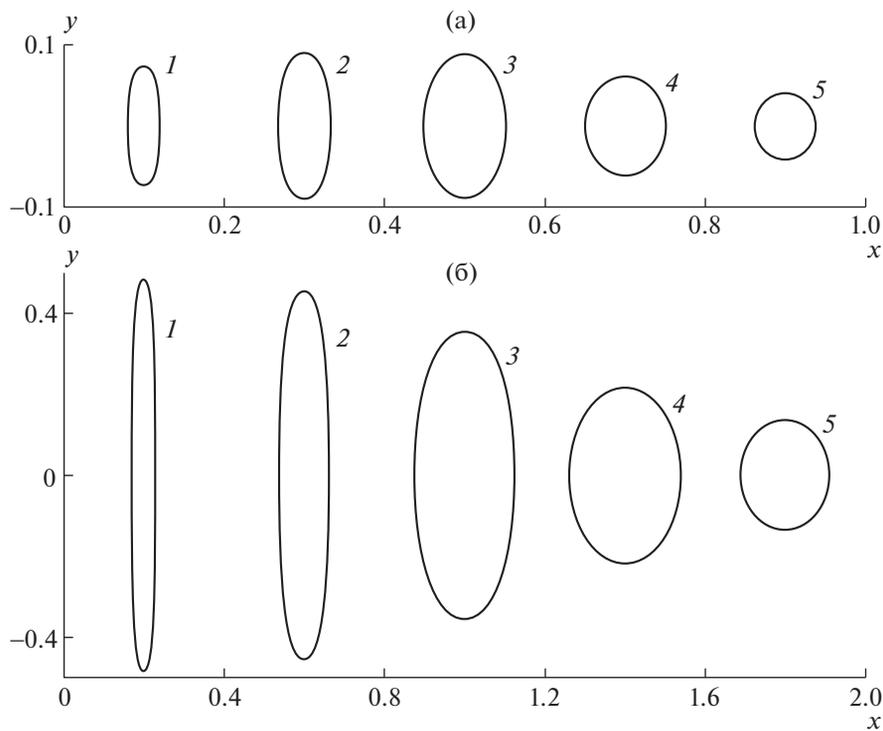


Рис. 4. Конфигурации пузыря 1–5, отвечающие невырожденному (а) и вырожденному решению (б) для конкретных значений основного параметра, приведенных в табл. 1.

двум, отвечающим $S = 2S_{\max}/3$, и еще двум, отвечающим $S = S_{\max}/3$, см. табл. 1. На рис. 4 представлены конфигурации пузыря, отвечающие невырожденному и вырожденному решению для приведенных в таблице пяти значений соответствующего основного параметра.

Отметим, что решение задачи (1.1), (1.3) для конкретной пары определяющих параметров (α, β) отображается точкой в плоскости α, β . Общее решение задачи должно заполнять эту плос-

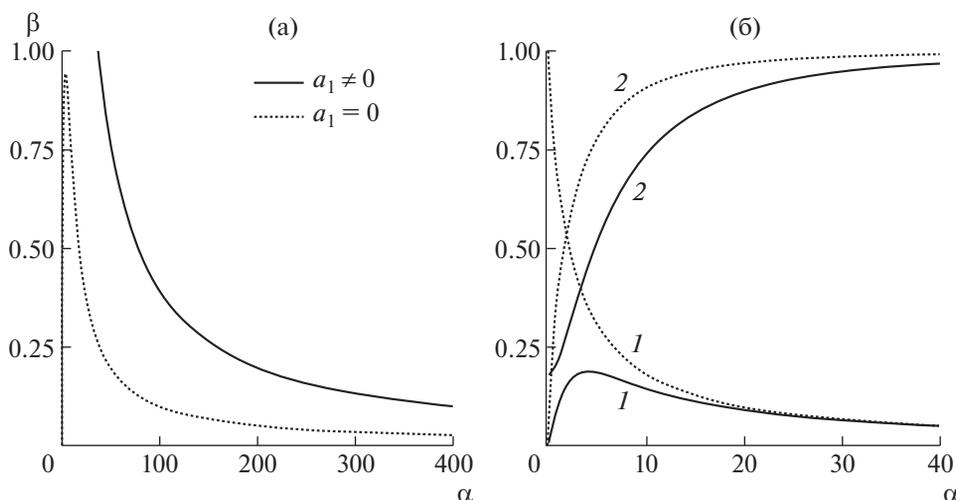


Рис. 5. (а) Изолинии невырожденного (сплошная линия) и вырожденного (пунктирная линия) решений в плоскости определяющих параметров α, β ; (б) зависимости от α поперечного диаметра пузыря Δy (кривые 1) и отношения продольного диаметра к поперечному $\Delta x/\Delta y$ (кривые 2) для невырожденного (сплошные линии) и вырожденного (пунктирные линии) решения.

кость целиком, а найденное здесь частное решение прочертит в ней две непересекающиеся кривые, представленные на рис. 5а сплошной (невырожденное решение) и пунктирной (вырожденное решение) линией.

Интересно сравнить, как меняются продольный Δx и поперечный Δy диаметры пузыря в этих двух решениях. Заметим, что основной параметр в решениях разный, а параметр α изменяется монотонно в интервале от 0 до бесконечности. Поэтому для сравнения характеристик решений целесообразно в качестве оси абсциссы выбрать именно α . На рис. 5б представлены зависимости от α поперечного диаметра пузыря Δy (кривые 1) и отношения диаметров $\Delta x/\Delta y$ (кривые 2) для невырожденного (сплошные линии) и вырожденного (пунктирные линии) решения.

Предел $\alpha \rightarrow \infty$ в обоих решениях одинаков — это практически круглый пузырь бесконечно малой площади. В то же время в пределе $\alpha \rightarrow 0$ решения существенно различаются. У вырожденного решения это — практически плоский пузырь бесконечно малой площади, который почти перекрывает канал, при этом в верхней и нижней точке контура пузыря достигаются бесконечные величины скорости течения и кривизны границы пузыря. У невырожденного решения в этом пределе оба диаметра Δx и Δy стремятся к нулю, а их отношение $\Delta x/\Delta y$ стремится к величине $2/11$. Эта величина совпадает с отношением диаметров $\Delta x/\Delta y$ в точном решении Мак-Леода для двумерного пузыря в безграничном потоке [3, 5]. Таким образом, невырожденное решение в пределе $\alpha \rightarrow 0$ совпадает с решением Мак-Леода.

Заметим, что решение Мак-Леода можно получить и непосредственно с помощью предложенного метода, сохранив тот же самый вид (4.1) функции $\chi(\zeta)$ и выписав вместо (3.1) соответствующий вид функции $W(\zeta)$ для безграничного потока.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена модификация метода Жуковского конструирования точных решений задач для потенциальных течений со свободной границей, на которой действует условие капиллярного типа. С использованием модифицированного метода построено новое точное решение задачи обтекания двумерного газового пузыря потоком капиллярной жидкости в прямолинейном канале, которое является обобщением известного решения Жуковского. Также установлено, что в одном из предельных случаев бесконечно малого пузыря это решение совпадает с точным решением Мак-Леода для пузыря в безграничном потоке.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

В случае $a_1 \neq 0$ из формулы (4.10) сразу найдем выражение параметра A через a_1

$$A = -a_1^{-1} \quad (\text{A.1})$$

Далее из выражения (4.11) с учетом формулы (4.10) следует соотношение

$$B = 3 - a_1^2 - a_1(\xi_0^2 + \xi_0^{-2}) \quad (\text{A.2})$$

Подставим это выражение в формулу (4.12) и учтем (A.1). Получим выражение

$$(\xi_0^2 + \xi_0^{-2}) = F(a_1) \quad (\text{A.3})$$

в котором использована вспомогательная функция $F(a_1)$, см. формулу (4.13).

Соотношение (A.3) представляет собой квадратное уравнение относительно ξ_0^2 . Разрешая его и отбрасывая меньший по величине корень, найдем

$$\xi_0^2 = 0.5 \left[F(a_1) + \sqrt{F^2(a_1) - 4} \right] \quad (\text{A.4})$$

Чтобы величина ξ_0^2 оставалась вещественной, должно выполняться неравенство

$$F(a_1) > 2 \quad (\text{A.5})$$

и оно может сузить границы интервала изменения a_1 : $-1 < a_1 < 1$. Действительно, выпишем квадратное уравнение

$$3a_1^2 - 2a_1 - 1 = 0$$

являющееся знаменателем для функции $F(a_1)$. Это уравнение имеет два корня $a_1 = -1/3$, $a_1 = 1$ и только в интервале

$$-1/3 < a_1 < 1 \quad (\text{A.6})$$

выполняется условие $(1 + 2a_1 - 3a_1^2) > 0$. Тогда проверка неравенства (A.5) с учетом (4.13) сводится к проверке неравенства

$$-a_1[(a_1^{-1} + a_1) - 2]^2 > 0 \quad (\text{A.7})$$

Это неравенство выполняется не во всем интервале (A.6), а только в интервале

$$-1/3 < a_1 < 0 \quad (\text{A.8})$$

Таким образом, только в интервале (A.8) решение физически содержательно (ξ_0^2 – вещественно), и с помощью формул (A.2)–(A.4) параметры B и ξ_0 могут быть выражены через параметр a_1

$$B = 3 - a_1^2 - a_1 F(a_1), \quad \xi_0 = \sqrt{0.5 \left[F(a_1) + \sqrt{F^2(a_1) - 4} \right]} \quad (\text{A.9})$$

Физическое условие $B > 0$ также может скорректировать границы интервала для a_1 , теперь определяемого неравенством (A.8). С учетом формул (4.13), (A.9) и того обстоятельства, что $(1 - 3a_1^2 + 2a_1) > 0$, необходимо проверить выполнение неравенства

$$B(1 - 3a_1^2 + 2a_1) = (1 - 3a_1^2 + 2a_1)(3 - a_1^2) - 6a_1 + (1 + a_1^2)^2 + 2a_1^3 > 0$$

Легко убедиться, что оно сводится к проверке неравенства $4(1 - a_1^2)^2 > 0$, которое выполняется всегда. Таким образом, в интервале (A.8) всегда $B > 0$.

Для оценки площади S пузыря воспользуемся формулой

$$S = \int_{BA} xdy - ydx = -\frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} z \left(\frac{dz}{d\sigma} \right) d\sigma \quad (\text{B.1})$$

В плоскости ζ границе Γ отвечает $\zeta = e^{i\sigma}$, и на этой границе дифференциал $d\sigma$ можно заменить на $(i\zeta)^{-1} d\zeta$ [14]. Используя введенный в разделе 3 оператор \mathcal{P} , формулу (B.1) можно переписать в виде контурного интеграла

$$S = -\frac{1}{2i} \oint_{C_\zeta} z(\zeta) \overline{\left(i\zeta \frac{dz}{d\zeta} \right)} \frac{d\zeta}{i\zeta} = \frac{1}{2i} \oint_{C_\zeta} \frac{z(\zeta)}{\zeta} \mathcal{P} \left[\zeta \frac{dz}{d\zeta} \right] d\zeta \quad (\text{B.2})$$

где контур C_ζ – это единичная окружность $|\zeta| = 1$. Учитывая (3.6) и (5.1), найдем

$$\mathcal{P} \left[\zeta \frac{dz}{d\zeta} \right] = \frac{\gamma(\xi_0 + \xi_0^{-1})(1 - a_1 \zeta^2)^2 \zeta}{\pi(\zeta^2 - \xi_0^2)(\zeta^2 - \xi_0^{-2})} \quad (\text{B.3})$$

Подставляя формулы (5.2) и (B.3) в выражение (B.2), получим выражение

$$S = \frac{\gamma(\xi_0 + \xi_0^{-1})}{2\pi i} \left[\oint_{C_\zeta} \frac{\Phi^-(\zeta) d\zeta}{(\zeta^2 - \xi_0^{-2})} - \oint_{C_\zeta} \frac{\Phi^+(\zeta) d\zeta}{(\zeta^2 - \xi_0^2)} \right] \quad (\text{B.4})$$

где введены две вспомогательные функции $\Phi^-(\zeta)$ и $\Phi^+(\zeta)$, см. формулы (5.5).

Подынтегральная функция 1-го интеграла (B.4) регулярна внутри единичного круга $|\zeta| < 1$ всюду, кроме простых полюсов в точках $\zeta = \pm \xi_0^{-1}$. В то же время подынтегральная функция 2-го интеграла (B.4) регулярна вне единичного круга: $|\zeta| > 1$ всюду, кроме простых полюсов в точках $\zeta = \pm \xi_0$, а в бесконечности ведет себя так

$$\zeta \rightarrow \infty: \frac{\Phi^+(\zeta)}{(\zeta^2 - \xi_0^2)} = \left[\frac{\gamma a_1^4 (\xi_0 + \xi_0^{-1})}{\pi} - \frac{2a_1^2 D_1}{\xi_0} \right] \zeta^{-1} + O(|\zeta|^{-3})$$

Тогда контурные интегралы (B.4) вычисляются с помощью теории вычетов [14]

$$S = \gamma(\xi_0 + \xi_0^{-1}) \left[\sum_{\zeta = \pm \xi_0^{-1}} \text{Вычет} \frac{\Phi^-(\zeta)}{(\zeta^2 - \xi_0^{-2})} + \sum_{\zeta = \pm \xi_0, \infty} \text{Вычет} \frac{\Phi^+(\zeta)}{(\zeta^2 - \xi_0^2)} \right]$$

В результате получим замкнутое выражение для площади пузыря S , см. формулу (5.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров А.Г. Об устойчивости жидкого цилиндра в плоскопараллельном потоке идеальной жидкости // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 3. С. 366–374.
2. Жуковский Н.Е. Определение движения жидкости при каком-нибудь условии, данном на линии тока // Собрание соч. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. С. 640–653.
3. McLeod E.B. The explicit solution of a free boundary problem involving surface tension // J. Ration. Mech. Anal. 1955. V. 4. № 4. P. 557–567.
4. Киселев О.М. К задаче о газовом пузыре в плоском потоке идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 13–23.
5. Shankar P.N. On the shape of a two-dimensional bubble in uniform motion // J. Fluid Mech. 1992. V. 244. P. 187–200.
6. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
7. Волков Н.Б., Зубарев Н.М., Зубарева О.В. Точные решения задачи о форме незаряженной струи проводящей жидкости в поперечном электрическом поле // ЖЭТФ. 2016. Т. 149. Вып. 5. С. 1096–1101.
8. Crapper G.D. An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. P. 532–540.

9. *Киселев О.М.* О точных решениях струйных задач с учетом сил поверхностного натяжения // Тр. сем. по краевым задачам. Казань, Изд-во Казанского ун-та. 1967. Вып. 4. С. 53–60.
10. *Kinnersley W.* Exact large amplitude capillary waves on sheets of fluid // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 77. № 2. P. 229–241.
11. *Зубарев Н.М., Зубарева О.В.* Равновесная конфигурация поверхности проводящей жидкости во внешнем пространственно-периодическом электрическом поле // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. Вып. 9. С. 54–59.
12. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: ГИФМЛ, 1961. 496 с.
13. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1932 = *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
14. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
15. *Куфарев П.П.* Решение задачи о контуре нефтеносности для круга // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. № 8. С. 1333–1334.
16. *Howison S.D.* Complex variable methods in Hele-Shaw moving boundary problems // *Europ. J. Appl. Math.* 1992. V. 3. № 3. P. 209–224.
17. *Алимов М.М.* Нестационарное движение пузыря в лотке Хеле-Шоу // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 2. С. 129–141.
18. *Алимов М.М.* Точное решение задачи Маскета–Лейбензона для растущего эллиптического пузыря // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 5. С. 86–98.