ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2021, № 2, с. 63–71

УДК 532.59:539.3

ВЛИЯНИЕ НЕРАВНОМЕРНОГО СЖАТИЯ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ, НА РАЗВИТИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

© 2021 г. И. В. Стурова[a],*

[a] *Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*

**E-mail: sturova@hydro.nsc.ru*

Поступила в редакцию 04.09.2020 г.
После доработки 01.10.2020 г.
Принята к публикации 01.10.2020 г.

В линейной постановке получено решение трехмерной нестационарной гидроупругой задачи о колебаниях тонкой упругой пластины, плавающей на поверхности весомой жидкости конечной глубины, под действием нестационарного внешнего давления. Изучено влияние продольного, поперечного и сдвигового сжатия пластины на развитие изгибно-гравитационных волн. В качестве примеров рассмотрено периодическое и импульсное воздействие нагрузки.

Ключевые слова: тонкая упругая плавающая пластина, изгибно-гравитационные волны, сжимающие усилия, нестационарная нагрузка

DOI: 10.31857/S0568528121020110

Задача о развитии волновых движений в жидкости, на верхней границе которой плавает тонкая упругая пластина, активно рассматривается в последнее время в связи с изучением волновых процессов в море с плавающим ледяным покровом или искусственными плавающими платформами больших размеров [1]. Значительное количество работ посвящено исследованию изгибно-гравитационных волн (ИГВ), вызванных нестационарным воздействием внешней нагрузки на плавающую пластину (см., например, [2, 3] и указанную в них библиографию). Как правило, используется модель не напряженной упругой пластины Кирхгофа–Лява, в которой пластина характеризуется только ее изгибной жесткостью и инерцией. Однако в пластине могут существовать также растягивающие или сжимающие усилия, которые в ледяном покрове возникают под воздействием ветра, течений или температурных деформаций [4]. В трехмерном случае возможны усилия трех типов: продольные, поперечные и сдвиговые [5]. Поведение свободных ИГВ при наличии неравномерного сжатия изучено в [6], а поведение установившегося волнового движения при воздействии внешней нагрузки – в [7]. Обе эти работы отражены также в монографии [8].

В данной работе исследованы допустимые значения параметров сжатия, которые обеспечивают неразрушающее воздействие на пластину, и определены области существования ИГВ с положительной групповой скоростью. Используя интегральные преобразования Фурье и Лапласа, построено решение начально-краевой задачи о воздействии на плавающую пластину локализованной области внешнего давления. Подробно исследовано воздействие периодической и импульсной нагрузки.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается слой идеальной несжимаемой весомой жидкости толщиной H, который занимает область $|x| < \infty$, $|y| < \infty$, $-H \le z \le 0$, где x и y – горизонтальные координаты, а z – вертикальная координата, направленная вверх. Плавающая на верхней границе жидкости тонкая упругая пластина описывается моделью Кирхгофа–Лява с учетом продольных, поперечных и сдвиговых сжимающих усилий [7, 8]. Первоначально жидкость и пластина покоятся, но начиная с момента времени $t = 0$ на пластину действует нестационарное внешнее давление $P(x, y, t)$, которое является заданным. Возникающее течение жидкости полагается потенциальным, а скорость частиц жидкости и прогиб пластины – малыми. Предполагается, что во все моменты времени жидкость находится в контакте с пластиной.

Задача о поведении пластины и жидкости сводится к решению уравнения Лапласа для потенциала скоростей частиц жидкости $\varphi(x,y,z,t)$

$$\Delta\varphi + \partial^2\varphi/\partial z^2 = 0\left(|x|, |y| < \infty, -H \le z \le 0\right), \quad \Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$D\Delta^2 w + Q_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Q_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2Q_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho g w + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -P \quad (z=0) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z=0), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad (z=-H) \tag{1.3}$$

и начальными условиями

$$w(x,y,0) = \varphi(x,y,z,0) = 0 \quad (t=0) \tag{1.4}$$

Здесь $w(x,y,t)$ – нормальный прогиб упругой пластины, $D = Eh_1^3/[12(1-\nu^2)]$, $M = \rho_1 h$; E, ρ_1, h, ν – модуль Юнга, плотность, толщина и коэффициент Пуассона пластины, $Q_x Q_y$, Q_{xy} – продольные, поперечные и сдвиговые напряжения (сжатие при положительных значениях и растяжение при отрицательных значениях) по соответствующим направлениям, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения. Далее будет рассматриваться действие только сжимающих усилий, т.е. $Q_x, Q_y, Q_{xy} \ge 0$.

Предполагается для простоты, что давление $P(x,y,t)$ в (1.2) имеет вид

$$P(x,y,t) = a\rho g f(r) Z(t), \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{1.5}$$

где a – множитель, имеющий размерность длины, а безразмерные функции $f(r)$ и $Z(t)$ являются заданными.

Для решения задачи (1.1)–(1.4) используется двойное преобразование Фурье

$$W(\lambda,\mu,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(x,y,t)\exp[-i(\lambda x + \mu y)]dxdy$$

Функция $W(\lambda,\mu,t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\ddot{W} + \Omega^2 W = -\gamma(k)Z(t), \quad \gamma(k) = \frac{a\rho g k\,\mathrm{th}(kH)F(k)}{\rho + kM\,\mathrm{th}(kH)} \tag{1.6}$$

с нулевыми начальными условиями. Здесь точкой обозначена производная по времени t,

$$\Omega^2(k,\theta) = \frac{k[Dk^4 - Q(\theta)k^2 + \rho g]\mathrm{th}(kH)}{\rho + kM\,\mathrm{th}(kH)}, \quad k = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}, \quad \theta = \mathrm{arctg}\frac{\mu}{\lambda} \tag{1.7}$$

$$Q(\theta) = Q_x\cos^2\theta + Q_y\sin^2\theta + Q_{xy}\sin(2\theta) \tag{1.8}$$

функция $F(k)$ – двойное преобразование Фурье функции $f(r)$

$$F(k) = 2\pi\int_0^{\infty} r f(r) J_0(kr)dr \tag{1.9}$$

$J_0(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Функция $\Omega(k,\theta)$ представляет собой дисперсионное соотношение для ИГВ, возникающих в системе жидкость – упругая пластина [7, 8].

После выполнения обратных преобразований Фурье получим

$$\begin{aligned} w(x,y,t) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} k\,\{W_+\cos[k(x\cos\theta + y\sin\theta)] + \\ + W_-\cos[k(x\cos\theta - y\sin\theta)]\}\,d\theta dk \end{aligned} \tag{1.10}$$

где $W_{\pm}(k,\theta,t)$ – решения уравнения (1.6) соответственно при $Q = Q_{\pm} \equiv Q_x\cos^2\theta + Q_y\sin^2\theta \pm$ $\pm\ Q_{xy}\sin(2\theta)$. Далее остановимся подробнее на свойствах дисперсионного соотношения для ИГВ при наличии сжимающих усилий.

2. ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ

Зависимость $\Omega(k,\theta)$ в (1.7) устанавливает связь между волновым числом k и частотой Ω при различных значениях угловой координаты θ. Согласно (1.8) при отсутствии сдвиговых сжимающих усилий ($Q_{xy} = 0$) достаточно рассмотреть диапазон $0 \le \theta \le \pi/2$, а при $Q_{xy} \neq 0$ – диапазон $0 \le \theta \le \pi$.

В безразмерных переменных

$$\bar{D} = \frac{D}{\rho g a^4},\quad \bar{M} = \frac{M}{\rho a},\quad (\bar{Q},\bar{Q}_1,\bar{Q}_2,\bar{Q}_3) = \frac{1}{\rho g a^2}(Q,Q_x,Q_y,Q_{xy})$$

$$\bar{\Omega} = \Omega\sqrt{a/g},\quad \bar{k} = ak,\quad \bar{H} = H/a$$

соотношение (1.7) примет вид

$$\bar{\Omega} = \sqrt{\frac{\bar{k}(\bar{D}\bar{k}^4 - \bar{Q}\bar{k}^2 + 1)\operatorname{th}(\bar{k}\bar{H})}{1 + \bar{k}\bar{M}\operatorname{th}(\bar{k}\bar{H})}} \tag{2.1}$$

Для существования вещественного значения частоты $\bar{\Omega}$ необходимо, чтобы при всех возможных значениях θ подкоренное выражение в (2.1) было неотрицательным. Это условие гарантирует устойчивость плавающей упругой пластины и выполняется при $\bar{Q} \le Q_* \equiv 2\sqrt{\bar{D}}$ [9]. При наличии сжимающих усилий существует также значение $Q_0 < Q_*$ такое, что при $\bar{Q} < Q_0$ групповая скорость ИГВ $c_g = d\bar{\Omega}/d\bar{k}$ положительна для всех волновых чисел $\bar{k} \ge 0$ во всем диапазоне значений угловой координаты θ [4, 8]. Этот случай назовем *нормальной дисперсией* в отличие от случая *аномальной дисперсии* при $Q_0 < \bar{Q}(\theta) < Q_*$, который характеризуется наличием для некоторых значений θ области волновых чисел, при которых групповая скорость ИГВ становится отрицательной. Значение Q_0 и соответствующее ему волновое число k_0 определяются из совместного решения двух уравнений $c_g(k_0) = 0$ и $dc_g(\bar{k})/d\bar{k}\big|_{\bar{k}=k_0} = 0$. Для дисперсионного соотношения (2.1) это сводится к определению вещественного корня трансцендентного уравнения

$$\begin{gathered} 2\bar{M}\bar{k}^3(2\bar{D}\bar{k}^2 - \bar{Q})\operatorname{th}^2(\bar{k}\bar{H}) + [1 + \bar{k}^2(5\bar{D}\bar{k}^2 - 3\bar{Q})]\operatorname{th}(\bar{k}\bar{H}) + \\ + \bar{k}\bar{H}[1 + \bar{k}^2(\bar{D}\bar{k}^2 - \bar{Q})]\operatorname{ch}^{-2}(\bar{k}\bar{H}) = 0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

где

$$\bar{Q} = \frac{10\bar{M}\bar{D}\bar{k}^4\operatorname{th}^2(\bar{k}\bar{H}) + 2\bar{D}\bar{k}^3(2\bar{H}\bar{M}\bar{k}^2 + 5)\operatorname{th}(\bar{k}\bar{H}) + \bar{H}(1 + 5\bar{D}\bar{k}^4)}{\bar{k}[3\bar{M}\bar{k}\operatorname{th}^2(\bar{k}\bar{H}) + (3 + 2\bar{H}\bar{M}\bar{k}^2)\operatorname{th}(\bar{k}\bar{H}) + 3\bar{H}\bar{k}]} \tag{2.3}$$

После определения k_0 значение Q_0 вычисляется из соотношения (2.3) при $\bar{k} = k_0$. В случае бесконечно глубокой жидкости соотношения (2.2) и (2.3) существенно упрощаются и приведены в работе [10].

В табл. 1 даны значения k_0 и $q_0 \equiv Q_0/\sqrt{\bar{D}}$ для различных значений толщины упругой пластины $h = 0.5, 1, 2$ м и глубины жидкости $H = 40, 100, 350$ м, а также бесконечно глубокой жидкости. Исходные параметры имеют следующие значения

$$E = 5\times10^9 \text{ Па},\quad \rho = 1025 \text{ кг/м}^3,\quad \rho_1 = 922.5 \text{ кг/м}^3,\quad \nu = 0.3,\quad a = 20 \text{ м} \tag{2.4}$$

Из табл. 1 видно, что с увеличением толщины пластины h существенно уменьшается значение волнового числа k_0, однако коэффициент q_0 меняется слабо. При глубине жидкости $H = 350$ м значения k_0 и q_0 полностью совпали со случаем бесконечно глубокой жидкости $H = \infty$.

На рис. 1 представлены дисперсионные зависимости $\bar{\Omega}(\bar{k},\theta)$ при $q_1 = q_2 = 1.5$, $q_3 = 0.5$, где $q_i = \bar{Q}_i/\sqrt{\bar{D}}$ $(i = 1,2,3)$ для различных значений угловой координаты θ в диапазоне $0 \le \theta \le \pi$ с ша-

Таблица 1

h_1, м	$H = 40$ м		$H = 100$ м		$H = 350$ м		$H = \infty$	
	k_0	q_0	k_0	q_0	k_0	q_0	k_0	q_0
0.5	1.553	1.487	1.533	1.477	1.533	1.477	1.533	1.477
1	0.961	1.537	0.912	1.476	0.911	1.475	0.911	1.475
2	0.594	1.615	0.552	1.489	0.541	1.472	0.541	1.472

гом $\pi/12$. Использованы параметры (2.4), глубина жидкости составляет $H = 100$ м, а толщина упругой пластины $h = 2$ м. В силу равенства значений q_1 и q_2 при $0 \le \theta \le \pi/2$ выполняется $\bar{\Omega}(\bar{k}, \theta) = \bar{\Omega}(\bar{k}, \pi/2 - \theta)$, а при $\pi/2 \le \theta \le \pi$ – $\bar{\Omega}(\bar{k}, \theta) = \bar{\Omega}(\bar{k}, 3\pi/2 - \theta)$. Кривые *5–7* соответствуют нормальной дисперсии, так как для них значение $q \equiv \bar{Q}/\sqrt{\bar{D}} < q_0$, а кривые *1–4*, для которых $q > q_0$, – аномальной дисперсии. В этом случае имеется область значений частоты $\bar{\Omega}$, при которой возникают ИГВ с отрицательной групповой скоростью. Из рис. 1 следует, что в случае нормальной дисперсии для каждого значения частоты Ω существует единственное значение волнового числа k, характеризующего пространственное распределение ИГВ заданной частоты. При аномальной дисперсии для некоторых значений угла θ возможно существование трех различных вещественных положительных корней уравнения $\Omega(k, \theta) = 0$, что означает генерацию при заданной частоте трех волн с различными волновыми числами.

Согласно условию устойчивости упругой пластины все значения q_i ($i = 1, 2, 3$) не должны превышать 2. На рис. 2а представлены кривые для ряда значений $q_3 = 0.25(j - 1)$ при $j = 1, \ldots, 8$, которые ограничивают область устойчивости упругой пластины, т.е. для значений q_1 и q_2 ниже этих кривых при указанном q_3 величина $\max q(\theta) < 2$ при всех значениях $0 \le \theta \le \pi$, где $q(\theta) = q_1\cos^2(\theta) + q_2\sin^2(\theta) + q_3\sin(2\theta)$. Рисунок 2б показывает области значений q_1 и q_2 при указанном q_3, которые ограничивают области ИГВ с нормальной дисперсией. Рассмотрен случай бесконечно глубокой жидкости, толщина упругой пластины равна $h = 2$ м. Согласно табл. 1 в этом случае $q_0 = 1.472$ и, следовательно, для значений q_1 и q_2, попадающих в область ниже кривой для заданной величины q_3, $\max q(\theta) < q_0$ при всех значениях $0 \le \theta \le \pi$. При $q_3 > q_0$ для всех допустимых значений q_1 и q_2 возбуждаются волны с аномальной дисперсией.

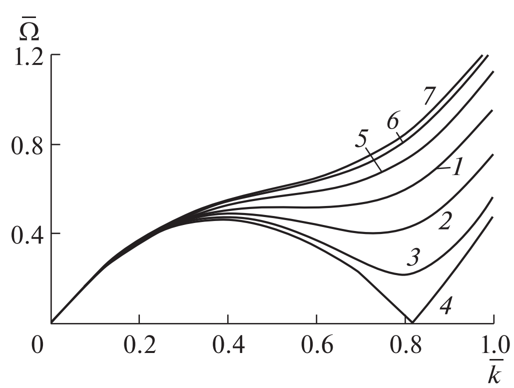

Рис. 1. Дисперсионные зависимости $\bar{\Omega}(\bar{k}, \theta)$ при различных значениях $\theta = \pi n/12$: *1* – $n = 0, 6, 12$; *2* – $n = 1, 5$; *3* – $n = 2, 4$; *4* – $n = 3$; *5* – $n = 7, 11$; *6* – $n = 8, 10$; *7* – $n = 9$.

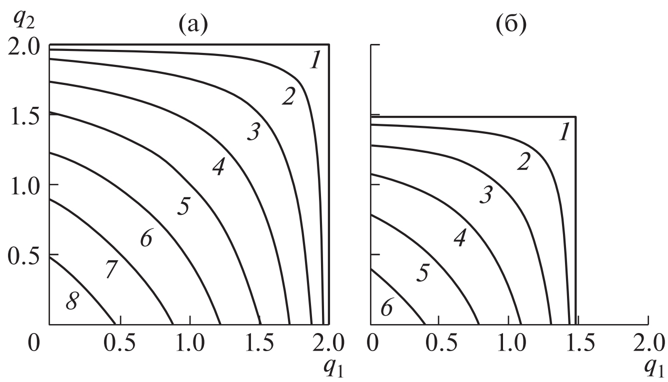

Рис. 2. Области значений q_1 и q_2, которые при различных $q_3 = 0.25(j-1)$ для $j = 1,\ldots,8$ ограничивают зоны устойчивости упругой пластины (а) и нормальной дисперсии (б) при $h = 2$ м для бесконечно глубокой жидкости. Номер кривой соответствует значению j.

3. ДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрено два типа нагрузки: периодическая и импульсная. Для обоих типов нагрузки функция $f(r)$ в (1.5) имеет вид

$$f(r) = 1 - (r/L)^2 (r < L), \quad f(r) = 0 (r > L)$$

Двойное преобразование Фурье для этой функции в (1.9) равно

$$F(k) = 4\pi J_2(kL)/k^2$$

Результаты численных расчетов, представленные ниже, выполнены при $h = 2$ м, $H = 100$ м, $L = 25$ м.

Для периодической нагрузки в (1.5) используется зависимость $Z(t) = \sin(\omega t)$. Вертикальные прогибы упругой пластины определяются выражением (1.10), в котором

$$W_\pm = \gamma(k) A(\Omega_\pm, t), \quad A(\Omega, t) = \frac{[\omega \sin(\Omega t) - \Omega \sin(\omega t)]}{\Omega(\Omega^2 - \omega^2)}$$

Особенность, которая возникает при интегрировании (1.10), в случае $\Omega \to \omega$ легко устраняется, так как

$$\lim_{\Omega \to \omega} A(\Omega, t) = 0.5[\omega t \cos(\omega t) - \sin(\omega t)]/\omega^2$$

Результаты численных расчетов для периодической нагрузки представлены на рис. 3, 4. На рис. 3а–в показаны безразмерные значения прогиба ледяного покрова $\bar{w} = w/a$ в центре области давления $r = 0$ в зависимости от безразмерного времени $\bar{t} = t\sqrt{g/a}$ соответственно для трех значений частоты колебания нагрузки $\omega = 0.25, 0.5, 0.75$ с$^{-1}$. Этим значениям частоты соответствуют следующие значения периода колебаний $T = 2\pi/\omega$: 25.13 с (17.60), 12.57 с (8.801), 8.378 с (5.867). В скобках указаны безразмерные значения периода $\bar{T} = T\sqrt{g/a}$. Рассмотрены следующие значения параметров сжатия: $q_1 = q_2 = 1.5$, $q_3 = 0.5$ (кривая *1*), $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0.5$ (кривая *2*), $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ (кривая *3*). Видно, что колебания пластины достаточно быстро (примерно через 2–3 периода) выходят на установившийся периодический режим при всех сочетаниях параметров сжатия. Наибольшие прогибы возникают при низкочастотных колебаниях для $q_1 = q_2 = 1.5$, $q_3 = 0.5$. С увеличением частоты внешней нагрузки амплитуды колебаний пластины уменьшаются и слабо зависят от параметров сжатия.

Для рис. 4 использованы значения $\omega = 0.25$ с$^{-1}$ и $q_1 = q_2 = 1.5$, $q_3 = 0.5$. На рис. 4а показаны зависимости от времени безразмерного прогиба ледяного покрова, вычисленного в различных точках на окружности $r = 2L$ при значениях угла $\theta(^\circ) = 0, 15, 45, 105, 135$ (кривые *1*–*5*). Видно, что периодическое поведение по времени устанавливается также достаточно быстро и амплитуды

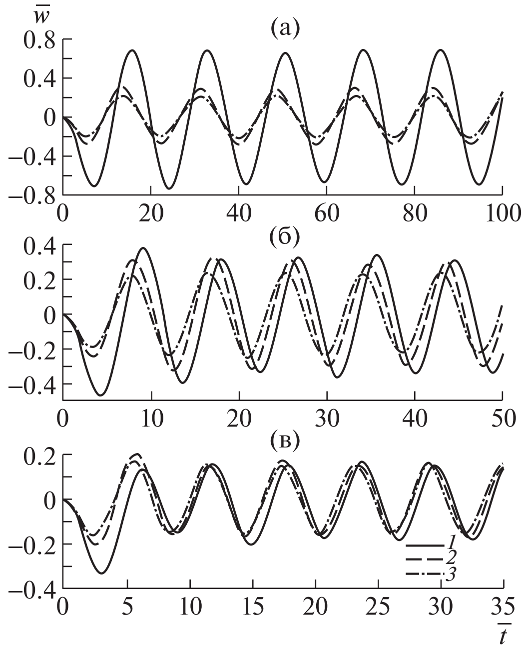

Рис. 3. Прогибы упругой пластины в зависимости от времени при $r = 0$: (а–в) – $\omega = 0.25,\ 0.5,\ 0.75$ с$^{-1}$; *1* – $q_1 = q_2 = 1.5$, $q_3 = 0.5$; *2* – $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0.5$; *3* – $q_1 = q_2 = q_3 = 0$.

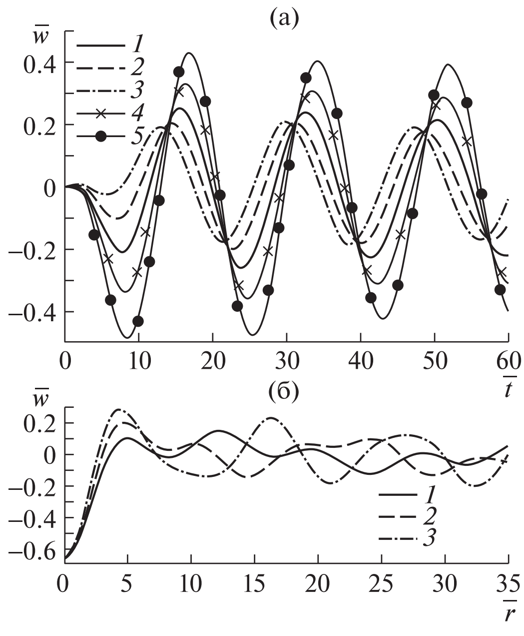

Рис. 4. Прогибы упругой пластины: (а) в зависимости от времени в различных точках окружности $r = 2L$ при $\theta(^\circ) = 0, 15, 45, 105, 135$ (кривые *1–5*); (б) в зависимости от расстояния до центра области давления при $\overline{t} = 60$ при различных значениях угла $\theta(^\circ) = 0, 15, 45$ (кривые *1–3*).

вертикальных прогибов существенно зависят от угла θ. Зависимость прогибов пластины от расстояния до центра пятна давления представлена на рис. 4б для различных значений угла $\theta(^\circ) = 0, 15, 45$ (кривые *1–3*) при $\overline{t} = 60$. Видно, что с ростом расстояния r значения прогибов

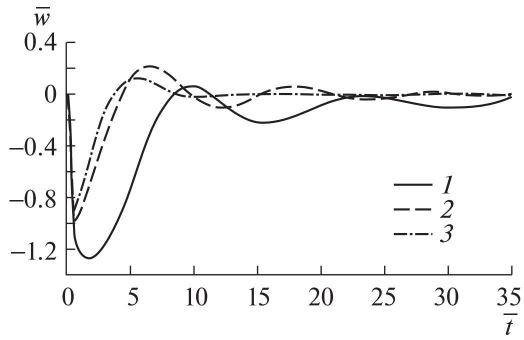

Рис. 5. Зависимость от времени вертикальных прогибов пластины в центре пятна давления $r = 0$ для $b = 0.5$ с$^{-1}$ при различных параметрах сжатия: *1* – $q_1 = q_2 = 1.5$, $q_3 = 0.5$; *2* – $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0.5$; *3* – $q_1 = q_2 = q_3 = 0$.

уменьшаются, но зависимость $w(r,\theta)$ не имеет выраженного периода по переменной r, так как используемые значения параметров сжатия согласно рис. 2 находятся в области, соответствующей аномальной дисперсии.

Для исследования импульсного воздействия на ледовый покров в выражении (1.5) функция $Z(t)$ имеет вид

$$Z(t) = \begin{cases} t/b & (t \le b) \\ 2 - t/b & (b \le t \le 2b) \\ 0 & (t > 2b) \end{cases} \tag{3.1}$$

Вертикальные прогибы ледяного покрова для импульсного возмущения определяются соотношением (1.10), в котором

$$W_{\pm} = \frac{\gamma(k)}{b\Omega_{\pm}^{3}} \begin{cases} \sin(\Omega_{\pm}t) - \Omega_{\pm}t & (t \le b) \\ \sin(\Omega_{\pm}t) + 2\sin\left[\Omega_{\pm}(b-t)\right] + \Omega_{\pm}(t-2b) & (b \le t \le 2b) \\ 2\sin[\Omega_{\pm}(b-t)] + \sin[\Omega_{\pm}(t-2b)] + \sin(\Omega_{\pm}t) & (t > 2b) \end{cases}$$

Поведение вязкоупругой пластины под действием треугольного импульса (3.1), равномерно распределенного по круговой области, без учета сжимающих усилий в пластине рассмотрено в [3].

Результаты для импульсной нагрузки представлены на рис. 5–7 при $b = 0.5$ с или в безразмерных переменных $\overline{b} = b\sqrt{g/a} = 0.35$. На рис. 5 показаны вертикальные прогибы пластины в центре пятна давления в зависимости от времени при различных параметрах сжатия: $q_1 = q_2 = 1.5$, $q_3 = 0.5$; $q_1 = 1$; $q_2 = 0$, $q_3 = 0.5$; $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ (кривые *1*–*3*). Видно, что наличие сжатия влияет как на максимальный прогиб упругой пластины, так и на скорость затухания колебаний после окончания действия нагрузки ($\overline{t} > 2\overline{b} = 0.7$). Наиболее быстрое восстановление начального невозмущенного положения пластины происходит при отсутствии сжимающих усилий.

На рис. 6 показаны прогибы пластины в зависимости от времени в различных точках окружности $r = 2L$ при $q_1 = q_2 = 1.5$, $q_3 = 0.5$. Кривые *1*–*5* соответствуют следующим значениям угла $\theta(^\circ) = 0, 15, 45, 105, 135$. Видно, что в первые моменты времени картина волнового движения близка к осесимметричной, но с ростом времени осевая симметрия нарушается.

Поведение вертикальных прогибов пластины при фиксированном значении времени $\overline{t} = 10$ в зависимости от расстояния до центра области давления показано на рис. 7 при $q_1 = q_2 = 1.5$, $q_3 = 0.5$. К указанному моменту времени внешнее воздействие уже прекратилось и происходит затухание волновых возмущений как по времени, так и по пространству. Однако в отличие от периодического поверхностного давления (ср. рис. 4) поведение функции $w(r,\theta)$ носит характер затухающих колебаний, амплитуда и период которых зависят от угла θ.

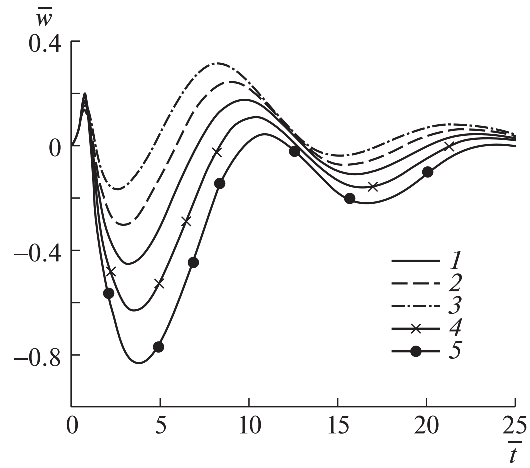

Рис. 6. Зависимость от времени вертикальных прогибов пластины в различных точках окружности $r = 2L$ при $b = 0.5$ с$^{-1}$ и $q_1 = q_2 = 1.5$, $q_3 = 0.5$: *1*–*5* – $\theta = 0, 15, 45, 105, 135°$.

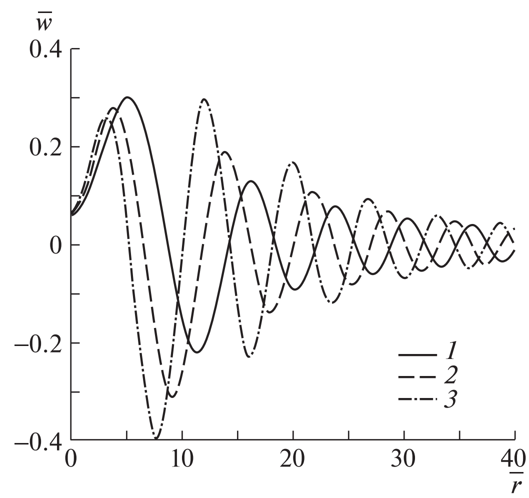

Рис. 7. Зависимость вертикальных прогибов пластины от расстояния до центра области давления при $\bar{t} = 60$, $q_1 = q_2 = 1.5$, $q_3 = 0.5$: *1*–*3* – $\theta = 0, 15, 45°$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано влияние неравномерных сжимающих усилий (продольных, поперечных и сдвиговых) в плавающей на поверхности жидкости упругой пластине на ее поведение при нестационарной внешней нагрузке. На основе анализа дисперсионного соотношения для изгибно-гравитационных волн определены границы параметров сжатия, которые обеспечивают устойчивые колебания упругой пластины и гарантируют отсутствие волновых движений с аномальной дисперсией, т.е. с отрицательными значениями групповой скорости. Рассмотрены случаи периодического и импульсного воздействия поверхностного давления. Показано, что при осесимметричной внешней нагрузке наличие неравномерного сжатия приводит к неосесимметричному поведению волнового движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Squire V.A.* Synergies between VLFS hydroelsticity and sea-ice research // J. Offshore Polar Eng. 2008. V. 18. P. 1–13.

2. *Погорелова А.В., Козин В.М., Матюшина А.А.* Исследование напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при взлете и посадке на него самолета// ПМТФ. 2015. Т. 56. № 5. С. 214–221. https://doi.org/10.15372/PMTF20150520
3. *Ху М.-Й., Чзан Ч.-Х.* Колебания льдины под действием импульса треугольной формы // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 4. С. 163–170. https://doi.org/10.15372/PMTF20170416
4. *Schulkes R.M.S.M., Hosking R.J., Sneyd A.D.* Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. Pt. 2 // J. Fluid Mech. 1987. V. 180. P. 297–318.
5. *Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.* Theory of plates and shells. 2d ed., New York a.o., Mc Graw-Hill, 1959. 580 p. = *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009. 640 с.
6. *Букатов А.Е., Гончаров А.М.* Изгибно-гравитационные волны при неравномерном сжатии // Морской гидрофизический журнал. 1989. № 4. С. 35–39.
7. *Букатов А.Е., Жарков В.В., Завьялов Д.Д.* Трехмерные изгибно-гравитационные волны при неравномерном сжатии // ПМТФ. 1991. № 6. С. 51–57.
8. *Букатов А.Е.* Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ. 2017. 360 с.
9. *Хейсин Д.Е.* Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат. 1967. 215 с.
10. *Sturova I.V.* Unsteady three-dimensional sources in deep water with an elastic cover and their applications // J. Fluid Mech. 2013. V. 730. P. 392–418. https://doi.org/10.1017/jfm.2013.303