

УДК 532.546:519.63

НАЧАЛО КОНВЕКЦИИ РЭЛЕЯ–ТЕЙЛОРА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

© 2021 г. Е. Б. Соболева^{а,*}

^а Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*E-mail: soboleva@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 28.09.2020 г.

После доработки 01.10.2020 г.

Принята к публикации 01.10.2020 г.

Выполняется численное моделирование неустойчивости Рэлея–Тейлора и начального этапа концентрационной конвекции в пористой среде в применении к задачам геологии. Рассматривается двухслойная жидкая система, в которой нижний слой образован чистой водой, а верхний слой – водным раствором солей. Верхний слой является более плотным и вязким. Обсуждается определение характерного времени начала конвекции в численном решении. Выявляются параметры, зависящие и не зависящие от начальных флуктуаций плотности. Анализируется влияние контраста вязкости на начало и развитие конвективного течения и массопереноса. Оцениваются количественные расхождения, связанные с учетом контраста вязкости в геологических жидкостях.

Ключевые слова: пористая среда, неустойчивость Рэлея–Тейлора, концентрационная конвекция, контраст вязкости, численное моделирование

DOI: 10.31857/S0568528121020109

Исследования течений подземных вод в пористых породах актуальны с точки зрения захоронения углекислоты (CO_2) и радиоактивных отходов, функционирования геотермальных систем, извлечения полезных ископаемых и других видов человеческой деятельности. Теория фильтрационных течений [1, 2] нашла широкое применение к конкретным задачам геологии, примеры которых даны в [3–6]. Неоднородности температуры и концентрации компонентов в многокомпонентной жидкости могут приводить к неустойчивому состоянию в поле силы тяжести и развитию естественных конвективных течений [7]. Во многих случаях основным определяющим неустойчивость фактором оказывается градиент плотности, образующийся из-за неравномерного распределения растворенной примеси; возникающее течение классифицируется как концентрационная конвекция.

Концентрационно-конвективная неустойчивость развивается, в частности, в двухслойной жидкой системе, состоящей из верхнего более плотного и нижнего менее плотного слоев (неустойчивость Рэлея–Тейлора в пористой среде [8]) и наблюдается в парах вода–нефть или водный раствор солей–вода. В настоящей работе рассматривается вторая пара, жидкости являются смешивающимися, перед началом конвекции они разделены промежуточной диффузионной зоной. В ряде публикаций представлены аналитические исследования устойчивости диффузионной зоны в задачах с близкой постановкой. Полученные результаты сравниваются в [9], где отмечено, что разные аналитические методы приводят к различным определениям времени начала конвекции, поскольку базовое состояние нестационарно (диффузионная зона расширяется). Что касается экспериментов, то в них начало конвекции обычно фиксируется значительно позже по сравнению с теоретическими предсказаниями, так как связывается с некоторыми видимыми проявлениями. Стоит заметить, что момент начала роста возмущений зависит от имеющихся в системе флуктуаций физических переменных. Из сказанного следует, что нет четких ориентиров для определения времени начала конвекции в численном моделировании и этот вопрос требует обсуждения.

При попадании примесей в воду меняется не только плотность, но и вязкость жидкости. Фильтрационные течения переменной вязкости хорошо изучены в случае, когда менее вязкая жидкость вытесняет более вязкую, что сопровождается развитием неустойчивости Саффмана–Тейлора [10]. Мотивацией для таких исследований служит процесс вытеснения нефти водой.

Данный тип неустойчивости анализировался и для пары смешивающихся жидкостей [11], а также изучался численными методами с учетом дополнительных факторов [12, 13].

Исследования по влиянию переменной вязкости на концентрационно-конвективные течения немногочисленны. В [14] представлены эксперименты с жидкостями разной плотности и вязкости в пористом цилиндре, моделирующие неустойчивость Рэлея–Тейлора. Отмечено, что работа вызвана необходимостью практического выбора экспериментальной жидкой пары, наиболее точно отражающей гидродинамическое поведение системы в процессе растворения CO_2 в подземных водах и не имеет цели изучить непосредственное влияние вязкости на сам процесс. Однако разная вязкость частей жидкой системы может существенно влиять на ее гидродинамическое поведение в целом, что заслуживает специального изучения.

В настоящей работе выполняется численное моделирование начала конвекции Рэлея–Тейлора в пористой среде при учете разности плотности и вязкости пары жидкостей. На границе между жидкостями задаются флуктуации плотности для инициации роста возмущений. Рассматриваются два характерных времени, названные критическим и видимым в соответствии с терминологией [9], причем первое ассоциируется с теоретическим временем начала конвекции, второе – с экспериментальным. Исследуется величина критического/видимого времени в зависимости от амплитуды начальных флуктуаций, а также определяются характеристики, от флуктуаций не зависящие. Изучается влияние контраста вязкости на изменение критического/видимого времени, проводится сравнение с имеющимися в литературе данными. Сравняется поведение реальной пары водный раствор солей–вода и модельной пары жидкостей, отличающихся друг от друга только плотностью, и оцениваются количественные расхождения из-за неучета контраста вязкости.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Вязкость водных растворов солей увеличивается с ростом их концентрации. Для описания такой закономерности наиболее часто используются экспоненциальная (формула Франк-Каме-нецкого) или линейная зависимости динамической вязкости раствора μ от концентрации примеси:

$$\mu = \mu_0 \exp(\Gamma_e S), \quad \mu = \mu_0 (1 + \Gamma_l S) \quad (1.1)$$

Здесь μ_0 – вязкость чистой воды, $S = \rho_c / \rho_c^*$ – безразмерная плотность растворенной примеси; ρ_c , ρ_c^* – плотность примеси (масса примеси в единичном объеме раствора) текущая и соответствующая насыщенному раствору. Верхним индексом “*” отмечен насыщенный раствор. Величину ρ_c называют также концентрацией. Константы Γ_e и Γ_l – параметры изменения вязкости. Использована работа [15], в которой собран и обработан большой объем экспериментальных данных о значениях динамической вязкости водного раствора хлорида натрия (NaCl) в широком диапазоне температур и давлений. На рис. 1 маркерами отмечены значения [15], соответствующие условиям на глубине в несколько километров (слева) и в почве на глубине в несколько десятков метров (справа). По этим данным методом наименьших квадратов построены оптимальные кривые, заданные экспоненциальной и линейной функциями. Найдены константы $\Gamma_e = 1.02, 1.00, 1.03, 1.04$ (1–4) и $\Gamma_l = 1.68, 1.62, 1.74, 1.76$ (1–4). Видно, что Γ_e и Γ_l меняются существенно, поэтому можно использовать единые значения

$$\Gamma_e = 1.0, \quad \Gamma_l = 1.7 \quad (1.2)$$

Как экспоненциальная функция, так и линейная описывают экспериментальные данные с хорошей точностью. Далее для определенности будет использоваться экспоненциальная зависимость μ от S .

Рассматривается прямоугольная двумерная пористая область (часть бесконечного горизонтального слоя), заполненная двухслойной жидкостью так, что граница между слоями проходит по середине области (рис. 2). В нижней половине находится чистая вода с плотностью ρ_0 и вязкостью μ_0 , верхняя половина заполнена водным раствором соли с плотностью ρ_b и вязкостью μ_b . В начальный момент система неподвижна. Соль диффундирует из верхней части области в нижнюю, при этом переходная зона между слоями расширяется со временем. Полагается, что $\rho_b > \rho_0$, т.е. состояние жидкости неустойчиво в поле силы тяжести и со временем развивается концентрационная конвекция.

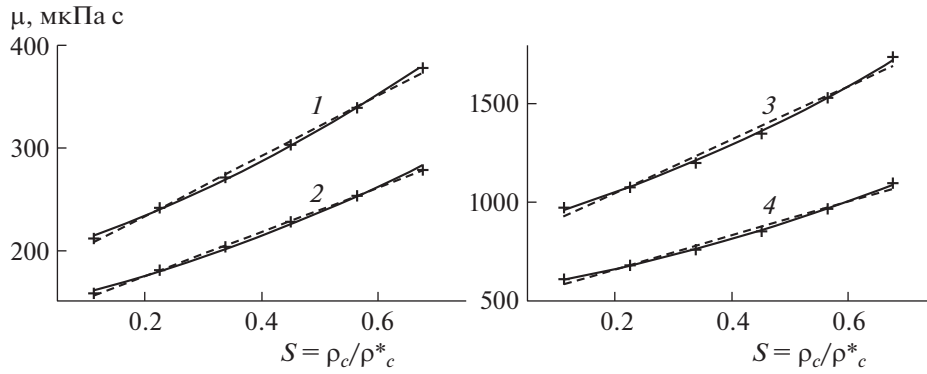


Рис. 1. Зависимость вязкости водного раствора соли NaCl от ее относительной плотности. Маркеры – данные [15] при $P = 10$ МПа и $T = 423$ (1), 473 К (2); $P = 0.1$ МПа и $T = 298$ (3), 323 К (4). Сплошная и пунктирная линии – аппроксимирующие кривые, соответствующие экспоненциальной и линейной функциям.

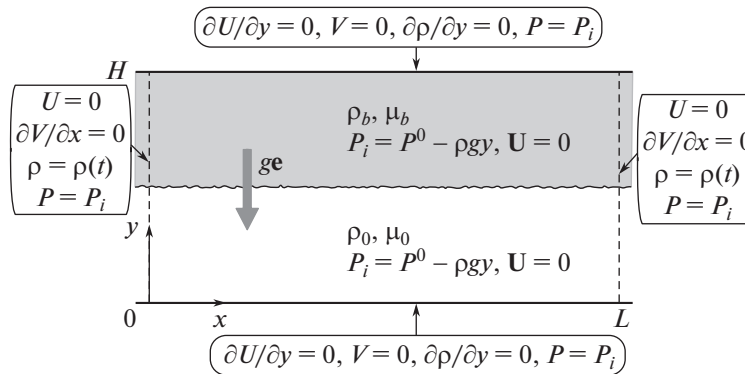


Рис. 2. Постановка задачи.

Конвективное движение и массоперенос описываются в рамках гидродинамической модели, которая включает уравнения неразрывности, движения (уравнение Дарси) и переноса примеси [2, 7]

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \tag{1.3}$$

$$\mathbf{U} = -\frac{k}{\mu}(\nabla P - \rho \mathbf{g} \mathbf{e}) \tag{1.4}$$

$$\phi \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho_c = \nabla \cdot (\phi D \nabla \rho_c) \tag{1.5}$$

Здесь $\mathbf{U} = (U, V)$, ρ , P , k , ϕ , D , g , \mathbf{e} – скорость фильтрации, плотность раствора, давление, проницаемость, пористость, коэффициент диффузии, модуль ускорения силы тяжести и единичный вектор, сонаправленный с вектором силы тяжести. Пористость, проницаемость и коэффициент диффузии считаются постоянными. Плотность раствора и его вязкость варьируются в диапазонах от ρ_0 до ρ_b и от μ_0 до μ_b соответственно. Уравнение состояния, связывающее ρ с плотностью растворенной примеси ρ_c , имеет вид

$$\rho = \rho_0 + \alpha \rho_c \tag{1.6}$$

В уравнение (1.6) входит константа $\alpha = 0.85$.

Границы области непроницаемы для воды. Примесь тоже не проходит через горизонтальные границы. Однако некоторая доля вещества может диффундировать через вертикальные границы, поскольку на них поддерживается определенное распределение плотности примеси, которое в безразмерной форме приводится в следующем разделе. Давление стратифицировано в поле си-

лы тяжести, его начальное распределение P_i находится при интегрировании гидростатического уравнения $\nabla P = \rho g e$. Начальные и граничные условия показаны на рис. 2; P^0 – давление на уровне $y = 0$.

Уравнения (1.3)–(1.5) преобразуются к безразмерному виду. Масштабами длины, скорости и времени являются величины H , D/H , H^2/D , включающие высоту области H . От абсолютных значений давления и плотности следует перейти к относительным переменным $P - P_0$ и $\rho - \rho_0$, которые затем приводятся к безразмерной форме делением на масштабы $\alpha \rho_c^* g H$ и $\alpha \rho_c^*$ соответственно. Масштаб вязкости – μ_0 . Получаются следующие уравнения в безразмерных переменных:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.7)$$

$$\mathbf{u} = -Ra \frac{\phi}{f_\mu} (\nabla \Pi - S \mathbf{e}) \quad (1.8)$$

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S = \nabla \cdot (\phi \nabla S) \quad (1.9)$$

В уравнениях (1.7)–(1.9) содержатся переменные: скорость фильтрации \mathbf{u} , давление Π , плотность растворенной примеси S . Вязкость f_μ меняется по пространству. Безразмерные параметры, определяющие поведение жидкости, – это число Рэлея–Дарси и контраст вязкости

$$Ra = \frac{k \alpha \rho_c^* g H}{\phi \mu_0 D}, \quad F_\mu = \frac{\mu_b}{\mu_0}$$

Исходно верхняя часть области заполнена стратифицированным раствором; изменение давления Π с высотой получается при интегрировании гидростатического уравнения, написанного для раствора. Начальные условия принимают вид

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq 0.5: \mathbf{u} = 0, \quad \Pi = 0, \quad S = 0, \quad f_\mu = 1 \\ 0.5 < y \leq 1: \mathbf{u} = 0, \quad \Pi = 0.5 - y, \quad S = 1, \quad f_\mu = F_\mu \end{aligned}$$

Плотность на границе между слоями жидкости подвержена флуктуациям, они описаны в следующем разделе.

Для определенности рассматриваются условия на глубине в несколько километров, где находятся глубинные геологические образования и функционируют геотермальные системы. Используются следующие параметры [16]: $\mu_0 = 1.21 \times 10^{-4}$ Па · с, $\rho_0 = 843$ кг · м⁻³, $D = 3 \times 10^{-9}$ м² · с⁻¹, $\rho_c^* = 400$ кг · м⁻³, $\phi = 0.1$. Имеются два сильно меняющихся параметра: проницаемость (варьируется от 10^{-17} до 10^{-12} м²) и геометрический масштаб H (варьируется от десятков сантиметров до километров). Взяты значения $k = 3.63 \times 10^{-15}$ м², $H = 10$ м и рассчитано число Рэлея–Дарси

$$Ra = 3.2 \times 10^3 \quad (1.10)$$

Поскольку k и H могут меняться на несколько порядков, то и значение Ra может быть очень разным. Выбор H не диктуется условиями задачи и довольно произволен, поэтому принятое значение Ra (1.10) подходит для широкого диапазона реальных условий. Поскольку число Ra представляет собой отношение конвективной скорости к диффузионной скорости, то для моделирования процессов с ведущей ролью конвекции следует брать $Ra \gg 1$. В представленных далее результатах высота зоны перемешивания всегда меньше H , так что можно считать, что конвекция развивается в вертикально бесконечной области.

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Уравнения (1.7)–(1.9) с начальными и граничными условиями решались численно с помощью авторского кода, разработанного для задач о концентрационной конвекции в пористой среде и успешно применяющегося в течение ряда лет [16–20]. Код основан на конечно-разностном методе, реализованном на разнесенной прямоугольной сетке (рис. 3). Уравнения неразрывности и Дарси решаются совместно с помощью алгоритма типа SIMPLE [21]. Затем интегрируется уравнение переноса примеси, переход на новый временной слой производится по схеме

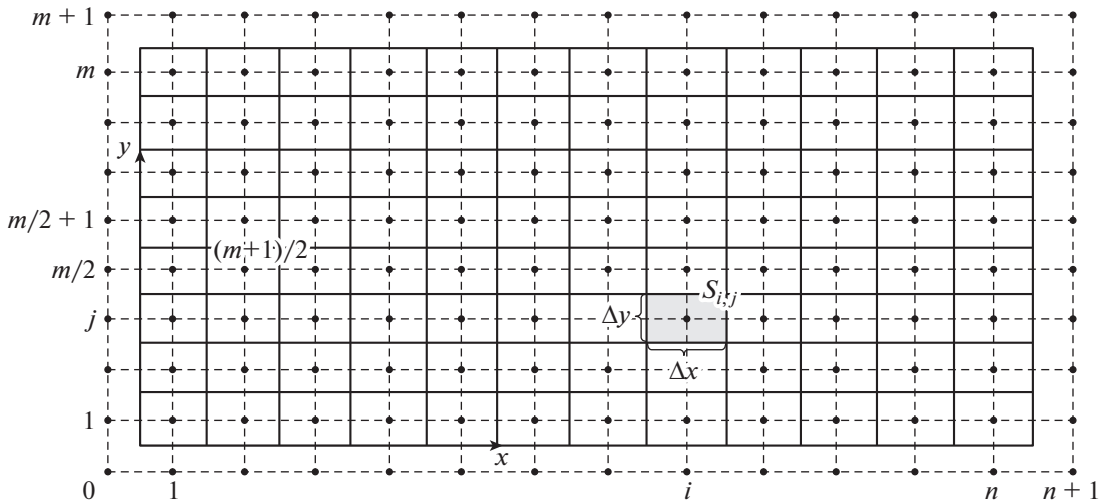


Рис. 3. Пространственная сетка; $S_{i,j}$ – дискретная плотность примеси.

Рунге–Кутты второго порядка, пространственные производные аппроксимируются по схеме QUICK [22].

В настоящей работе граничные условия для плотности на вертикальных границах меняются со временем – задается диффузионное распространение примеси из верхнего слоя в нижний, чтобы избежать нефизических эффектов около границ. Решение уравнения диффузии имеет вид [23]:

$$S(y, t) = 0.5 \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{0.5 - y}{2t^{1/2}} \right) \right) \quad (2.1)$$

Функция ошибок $\operatorname{erf}(\zeta)$ варьируется от -1 при $\zeta \rightarrow -\infty$ до 1 при $\zeta \rightarrow \infty$. Брались табличные значения $\operatorname{erf}(\zeta)$ с шагом переменной ζ , равным 0.01 . Граничная плотность $S(y, t)$ (2.1) рассчитывалась заново на каждом временном слое, при этом значение $\operatorname{erf}((0.5 - y)/(2t^{1/2}))$ определялось с помощью линейной интерполяции между $\operatorname{erf}(\zeta)$ и $\operatorname{erf}(\zeta + 0.01)$ при условии $\zeta \leq (0.5 - y)/(2t^{1/2}) \leq \zeta + 0.01$. Такое задание граничных условий не влияет на скорость роста зоны перемешивания и основные закономерности течения.

Точность численного решения контролировалась по выполнению баланса массы. На всех временных слоях вычислялось изменение массы $\Delta M(t) = M(t) - M^0$, где $M(t)$ – суммарная масса примеси в области в текущий момент t , а M^0 – это $M(t)$ при $t = 0$. Рассчитывался также суммарный диффузионный поток примеси через вертикальные границы M_j . В идеальном случае должно выполняться $\Delta M = M_j$, однако, численное решение дает погрешность, которую можно оценить, как

$$\delta M = \frac{|\Delta M - M_j|}{|\Delta M + M_j|}$$

Во всех расчетах величина δM не превосходила десятых долей процента, что свидетельствует о высокой точности численного решения.

Чтобы конвекция начала развиваться, в системе должны присутствовать флуктуации физических величин. В начальный момент задаются флуктуации плотности на границе между слоями жидкости, которая располагается между узлами сетки при $j = m/2$ и $j = m/2 + 1$ (рис. 3). Начальные условия в невозмущенной среде имели бы вид: $S_{i,j} = 0$ при $j \leq m/2$ и $S_{i,j} = 1$ при $j \geq m/2 + 1$. Для возмущения границы между слоями задаются условия

$$\begin{aligned} j = m/2: & \quad S_{i,m/2} = \sigma D(i) \\ j = m/2 + 1: & \quad S_{i,m/2+1} = (1 - \sigma) D(i) \end{aligned}$$

Здесь σ – амплитуда флуктуаций ($\sigma \ll 1$), $D(i)$ – ряд случайных чисел, принимающих значения в диапазоне от 0 до 1 . В остальных узлах сетки плотность остается невозмущенной.

При проведении численного моделирования определяются два характерных времени начала конвекции: критическое время τ_1 и видимое время τ_2 . Первое по смыслу близко к времени начала конвекции в аналитических исследованиях, так как ассоциируется с ростом малых возмущений. Второе близко к определению времени начала конвекции в экспериментах, так как связывается с видимыми отклонениями от диффузионного режима массопереноса. Для определения τ_1 находится максимальная скорость движения жидкости в расчетной области $v_{max} = |\mathbf{v}|_{max}$; скорость жидкости \mathbf{v} и скорость фильтрации \mathbf{u} связаны между собой равенством $\mathbf{u} = \phi \mathbf{v}$. Момент τ_1 соответствует началу роста v_{max} . Величина τ_2 — это момент, когда высота зоны перемешивания h_c , полученная при моделировании, начинает превосходить высоту диффузионной зоны h_d на 1%, т.е. достигается условие $h_c/h_d = 1.01$. Чтобы найти h_c , сначала рассчитывается средняя масса примеси $Q_m(y)$ на высоте y .

$$Q_m(y) = \frac{1}{l} \sum_{i=1, n} S_{i,j} \Delta x$$

Уровень y соответствует ячейкам пространственной сетки с номером j ; $l = L/H$ — безразмерная длина области. Далее определяются нижняя координата y_l и верхняя координата y_u зоны перемешивания: $y = y_l$ при $Q_m(y) = 0.01$ и $y = y_u$ при $Q_m(y) = 0.99$. Затем находится высота зоны перемешивания $h_c = y_u - y_l$. Высота диффузионной зоны h_d определяется аналогичным способом по плотности, вычисленной по уравнению (2.1).

Основные расчеты проведены в областях 12×1 и 10×6 , покрытых равномерной пространственной сеткой. Шаги сетки составляли $\Delta x = 1.67 \times 10^{-3}$, 3.0×10^{-3} ; $\Delta y = 2.0 \times 10^{-3}$, 2.5×10^{-3} . Использован шаг интегрирования по времени $\Delta t = 3.13 \times 10^{-8}$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Сначала рассматривается жидкая система постоянной вязкости ($F_\mu = 1$) и исследуется влияние начальных флуктуаций на возникновение конвекции. Критическое и видимое времена обозначаются здесь как τ_{01} и τ_{02} ; индекс “0” указывает на отсутствие контраста вязкости (вся жидкость имеет вязкость чистой воды). На рис. 4 (а) приведены временные зависимости максимальной скорости v_{max} на начальном этапе. Флуктуации плотности на границе раздела между слоями инициируют слабые неупорядоченные движения, которые со временем перестраиваются в согласованное конвективное движение. Перестройка движения ассоциируется с уменьшением v_{max} . Когда скорость v_{max} становится минимальной, фиксируется τ_{01} . Видно, что величина τ_{01} существенно зависит от амплитуды начальных флуктуаций σ ; чем меньше σ , тем позднее начинается рост v_{max} . Первоначально имеет место диффузионный массоперенос — соль диффундирует из верхнего слоя в нижний. При развитии конвекции перемешивание слоев усиливается, зона перемешивания увеличивается быстрее, чем это происходило бы в чисто диффузионном режиме. Изменения в массопереносе за счет конвекции начинают проявляться значительно позже момента τ_{01} . Влияние конвекции становится заметным, когда высота зоны перемешивания h_c начинает превосходить высоту диффузионной зоны h_d (рис. 4 (б)). В диффузионном режиме зона перемешивания увеличивается как $h_d \sim t^{1/2}$, а в конвективном режиме как $h_c \sim t$. Видимое время τ_{02} становится больше при уменьшении σ , что аналогично с поведением τ_{01} . Для вариантов, показанных на рис. 4, отношение τ_{02}/τ_{01} меняется в диапазоне от 9 до 35.

На рис. 4 (а) показано, что при $\sigma = 10^{-4}$ скорость v_{max} начинает расти с величины, которая меньше 1. Это значит, что во всей расчетной области в начале роста вклад конвекции в массообмен меньше, чем диффузии и поэтому возмущения можно считать малыми. Для случая с $\sigma = 10^{-4}$ на рис. 5 продемонстрированы поля плотности; моменты времени на фрагментах (а) и (б) соответствуют τ_{01} и τ_{02} . Плотность возрастает от светлого тона к темному. Показана часть расчетной области 3×1 . Граница раздела между жидкостями выглядит прямой на рис. 5 (а), а на рис. 5 (б) уже видно образование квазипериодических конвективных пальцев, которые в дальнейшем удлиняются (рис. 5 (в)). Максимальная скорость движения составляет $v_{max} = 0.83$ (а), 9.92×10^2 (б), 1.29×10^3 (в).

Возвращаясь к рис. 4 (б), следует отметить, что в конвективном режиме высота зоны перемешивания h_c увеличивается примерно с одинаковой скоростью независимо от размера начальных

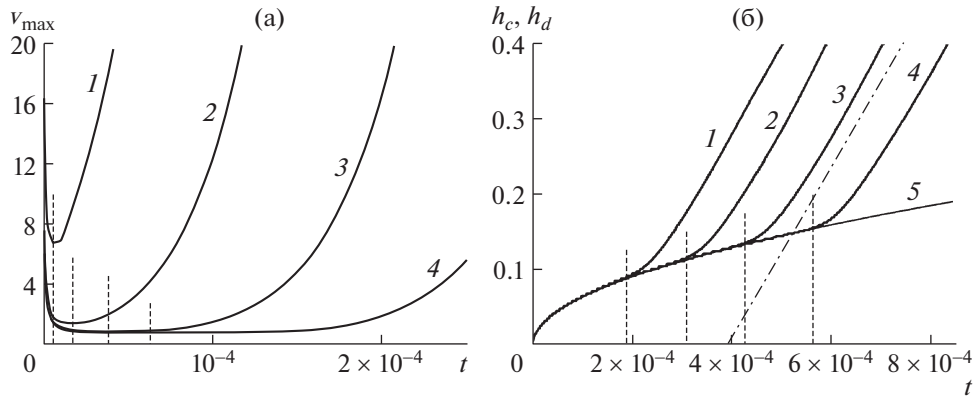


Рис. 4. Временные зависимости максимальной скорости жидкости v_{max} (а) и высоты зоны перемешивания h_c (б) при задании начальных флуктуаций плотности с амплитудой $\sigma = 10^{-2}$ (1), 10^{-3} (2), 10^{-4} (3), 10^{-5} (4). Временная зависимость высоты диффузионной зоны h_d (5) (б). Вертикальными пунктирными линиями отмечены значения критического времени τ_{01} (а) и видимого времени τ_{02} (б). Штрихпунктирная линия показывает наклон кривых h_c (б).

флуктуаций. По штрихпунктирной прямой линии, которая показывает наклон кривых h_c , можно найти производную $dh_c/dt = 1.2 \times 10^3$. Очевидно, что скорость роста зоны перемешивания dh_c/dt — это параметр, который действительно характеризует физический процесс и не зависит от деталей численного моделирования.

Как продемонстрировано выше, критическое и видимое времена начала конвекции зависят от начальных флуктуаций. Поэтому при изучении влияния контраста вязкости на начало конвективного движения будут рассматриваться не абсолютные значения времени τ_1 , τ_2 , а отношения τ_1/τ_{01} и τ_2/τ_{02} , показывающие, во сколько раз меняется характерное время при $F_\mu \neq 1$ по сравнению с аналогичной величиной при $F_\mu = 1$. Численные параметры в сопоставляемых вариантах одинаковые. Проведены три серии расчетов с различными амплитудами флуктуаций и на разных пространственных сетках. Константа изменения вязкости варьировалась в диапазоне $\Gamma_e \in [0, 1.5]$, что по уравнению (1.1) дает контраст вязкости $F_\mu \in [1, 4.48]$. Зависимости τ_1/τ_{01} и τ_2/τ_{02} от F_μ показаны на рис. 6 (а).

Для сравнения приводятся результаты линейного анализа устойчивости диффузионного слоя, образующегося в пористой среде под горизонтальной границей — источником примеси [24]; зависимость вязкости от концентрации описывается формулой Франк-Каменецкого. В [24] отмечено, что в случае переменной вязкости получить аналитическое решение не удастся, однако, приводится численное решение задачи на собственные значения в виде графической зависимости логарифма критического времени τ_c (обозначенного в настоящей работе как τ_1) от параметра Γ (обозначенного как $-\Gamma_e$; константы Γ и $-\Gamma_e$ противоположны друг другу). Видно, что зависимость $\lg(\tau_c)$ от Γ является практически линейной (рис. 5 в [24]); из нее можно получить следующее выражение

$$\frac{\tau_1}{\tau_{01}} = F_\mu^{0.8133} \quad (3.1)$$

В экспериментах [14] регистрировалось время начала конвекции Рэля–Тейлора в пористом цилиндре в случае различных пар жидкостей; это время будет обозначено как τ_2 . Обработав экспериментальные данные, авторы получили зависимость $\tau_2 \sim (Ra/F_\mu)^{-2}$. Поскольку число Рэля в [14] строится по меньшему значению вязкости, т.е. $Ra \sim (\mu_0)^{-1}$, то можно прийти к другой зависимости: $\tau_2 \sim (\mu_0^2)(\mu_b/\mu_0)^2 \sim \mu_b^2$. Из полученного следует, что только более вязкая жидкость определяет время начала конвекции τ_2 , в то время как менее вязкая жидкость на начало конвекции не влияет. Такой результат в применении к реальным жидкостям вызывает вопросы, однако, его можно рассматривать как предельный случай. Найденную зависимость можно записать также в виде

$$\frac{\tau_2}{\tau_{02}} = F_\mu^2 \quad (3.2)$$

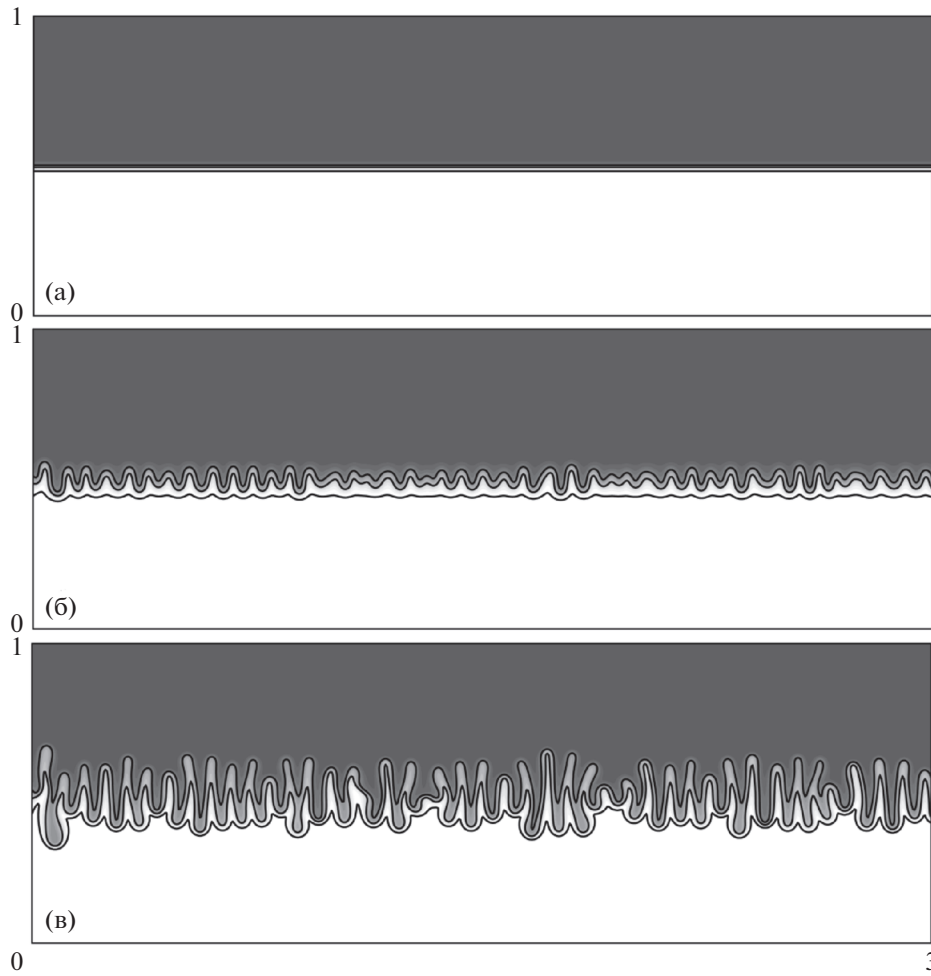


Рис. 5. Поле плотности примеси в моменты времени $t = 3.83 \times 10^{-5}$ (а), 4.27×10^{-4} (б), 6.00×10^{-4} (в).

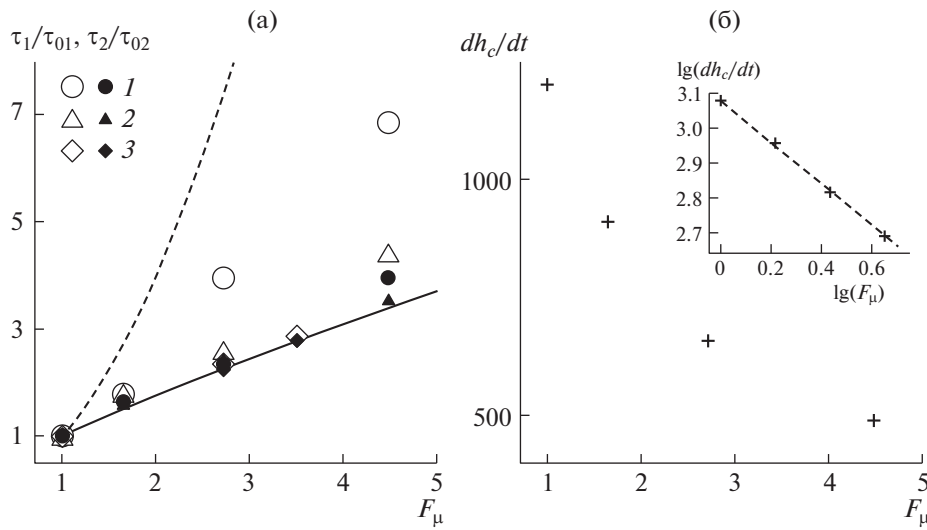


Рис. 6. Значения относительного критического τ_1/τ_{01} (крупные незакрашенные маркеры) и видимого τ_2/τ_{02} (мелкие покрашенные маркеры) времени; сплошная и пунктирная линии – зависимости (3.1) и (3.2) соответственно. Расчетная область 1×12 (1, 2) и 6×10 (3), амплитуда начальных флуктуаций $\sigma = 10^{-2}$ (1), 10^{-4} (2, 3) (а). Скорость роста зоны перемешивания в линейных (б) и логарифмических (б, врезка) шкалах.

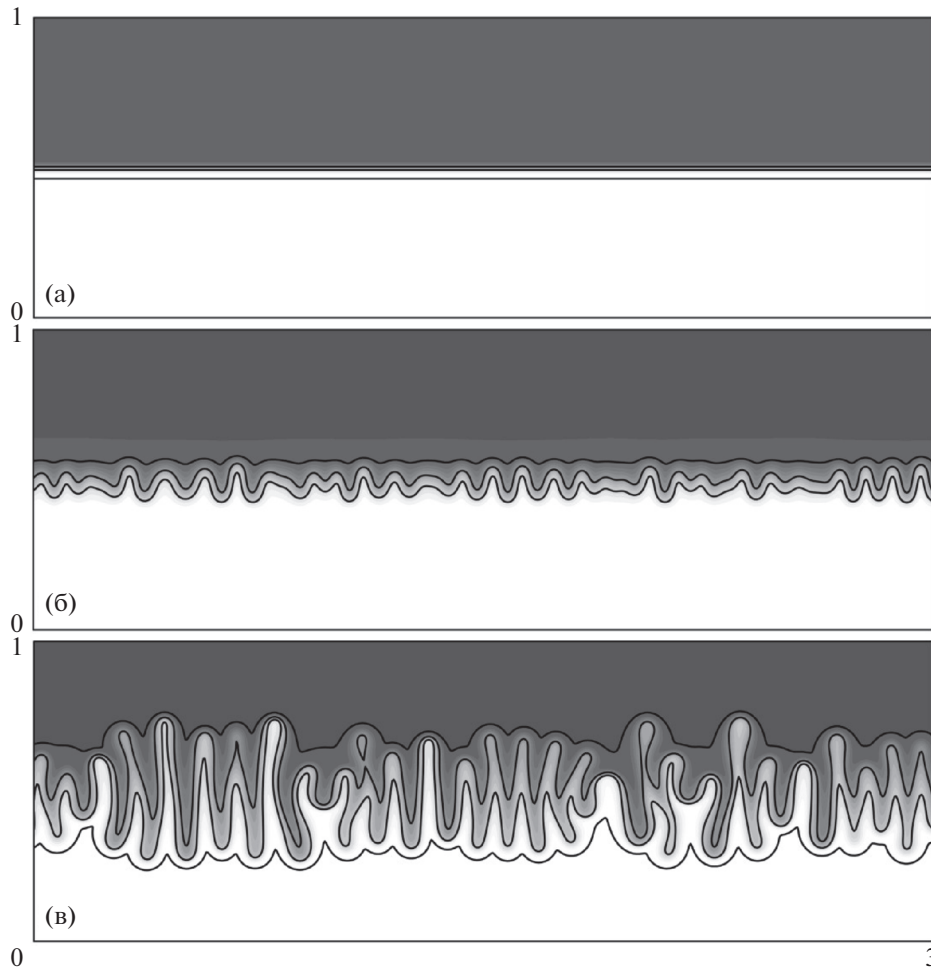


Рис. 7. Поле плотности примеси в моменты времени $t = 1.00 \times 10^{-4}$ (а), 1.05×10^{-3} (б), 1.52×10^{-3} (в).

Кривые, соответствующие уравнениям (3.1) и (3.2), нанесены на рис. 6 (а). Заметно, что все маркеры, представляющие значения τ_1/τ_{01} и τ_2/τ_{02} в численном моделировании, располагаются между теоретической и экспериментальной кривыми, причем находятся ближе к теоретической кривой (некоторые попадают на нее). На экспериментальную кривую маркеры не попадают, наглядно демонстрируя, что не только более вязкая, но и менее вязкая жидкость влияет на начало конвекции.

На рис. 6 (б) дана скорость роста высоты зоны перемешивания dh_c/dt в зависимости от F_μ . Обнаружено, что величина dh_c/dt уменьшается с возрастанием F_μ , что соответствует ожиданиям, поскольку с более вязким верхним слоем система в целом становится менее мобильной. На врезке, представляющей данные в логарифмических шкалах, продемонстрировано, что зависимость $\lg(dh_c/dt)$ от $\lg(F_\mu)$ близка к линейной. Исходя из представленных данных можно получить аппроксимирующую функцию

$$\frac{dh_c}{dt} = 1.20 \times 10^3 F_\mu^{-0.60} \quad (3.3)$$

Чтобы продемонстрировать, какие изменения вносит учет контраста вязкости в реальных условиях, проведено моделирование начального этапа конвекции в жидкой системе с константой $\Gamma_e = 1.0$, взятой в соответствии с оценкой (1.2). Контраст вязкости, рассчитанный по (1.1), составляет $F_\mu = 2.72$. На рис. 7 показано поле плотности в различные моменты времени, причем времена на рис. 7 (а, б) совпадают с τ_1 , τ_2 для рассматриваемой пары жидкостей. Максимальная скорость движения жидкости в порах имеет значение $v_{max} = 0.62$ (а), 6.43×10^2 (б), 1.20×10^3 (в).

В общем, картина течения качественно повторяет картину, представленную на рис. 5, но имеет количественные отличия. При $F_\mu = 2.72$ масштаб образующейся конвективной структуры становится больше, чем при $F_\mu = 1$. Например, сравнивая фрагменты (б), можно увидеть, что если изменение вязкости не учитывать, то на показанном участке образуются 43 конвективных пальца (рис. 5), в то время как при учете переменной вязкости их становится только 29 (рис. 7). Амплитуда начальных флуктуаций σ оказывает некоторое влияние на наиболее опасную длину волны возмущения λ , а значит, на количество формирующихся конвективных пальцев: с уменьшением σ возмущения начинают расти позже, когда диффузионная зона стала шире, следовательно, λ будет больше. Однако этот эффект слабый, им можно пренебречь и считать, что величина λ определяется значениями Ra и F_μ как и в аналитическом исследовании [24].

Кроме того, при $F_\mu = 2.72$ конвекция появляется позже, чем при $F_\mu = 1$. Относительные значения критического τ_1/τ_{01} и видимого τ_2/τ_{02} времени лежат в диапазоне от 2.26 до 7.40, который рассчитан по (3.1), (3.2). Конвективное перемешивание между слоями становится менее интенсивным, скорость роста высоты перемешанной зоны уменьшается в 1.8 раза от $dh_c/dt = 1.20 \times 10^3$ до $dh_c/dt = 6.58 \times 10^2$, как следует из (3.3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено численное исследование развития неустойчивости Рэлея–Тейлора в пористой среде; рассмотрены двухслойные жидкие системы постоянной и переменной вязкости. Предложено оценивать два характерных времени возникновения конвекции: критическое время находится по началу роста скорости движения и по смыслу близко к моменту потери устойчивости в аналитических исследованиях, видимое время определяется по отклонению высоты зоны конвективного перемешивания от высоты диффузионной зоны, что ассоциируется с обнаружением конвекции в экспериментах. Показано, что обе величины зависят от начальных флуктуаций, при этом видимое время всегда существенно больше критического (вплоть до нескольких десятков раз).

Найден параметр, который не зависит от начальных флуктуаций, задаваемых в численном моделировании, и поэтому является характеристикой реального процесса. Это скорость роста зоны перемешивания.

Изучено влияние контраста вязкости на начало конвективного движения и массопереноса. Рассмотрены значения критического и видимого времени, приведенные к соответствующим величинам в жидкой системе постоянной вязкости. Обнаружено, что при увеличении контраста вязкости конвективное движение появляется позже. Относительные характерные времена локализируются между двумя кривыми, построенными по имеющимся в литературе данным, таким образом, определен диапазон их возможных значений. Найден, что скорость роста зоны перемешивания уменьшается с возрастанием контраста вязкости, что описывается полученной степенной зависимостью.

Проведено сравнение жидких систем с одинаковой вязкостью слоев и с контрастом вязкости, соответствующим геологическим условиям. Учет переменной вязкости, как продемонстрировано, приводит к заметным количественным изменениям в характеристиках начала конвекции, что имеет практическую значимость.

Автор благодарит Г.Г. Цыпкина за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 16-11-10195).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
2. Bear J., Cheng A. Modeling Groundwater Flow and Contaminant Transport. New York: Springer, 2010. 834 p.
3. Афанасьев А.А., Бармин А.А. Нестационарные одномерные фильтрационные течения воды и пара с учетом фазовых переходов // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 4. С. 134–143.
4. Шаргатов В.А., Цыпкин Г.Г., Богданова Ю.А. Фрагментация фильтрационного течения в пористой среде с градиентом капиллярного давления // Доклады Академии наук. 2018. Т. 480. № 1. С. 40–44.
5. Афанасьев А.А., Чернова А.А. О решении задачи Римана, описывающей закачку нагретого раствора соли в водонасыщенный пласт // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 4. С. 72–81.

6. *Цыпкин Г.Г.* Неустойчивость легкой жидкости над тяжелой при движении поверхности раздела в пористой среде // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2020. № 2. С. 70–76.
7. *Nield D.A., Bejan A.* Convection in Porous Media. New York: Springer, 2006. 640 p.
8. *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 288 с.
9. *Bestehorn M., Firoozabadi A.* Effect of fluctuations on the onset of density-driven convection in porous media // Physics of Fluids. 2012. V. 24. P. 114102.
10. *Homsy G.M.* Viscous fingering in porous media // Annual Review of Fluid Mechanics. 1987. V. 19. P. 271–311.
11. *Manickam O., Homsy G.M.* Fingering instabilities in vertical miscible displacement flows in porous media // Journal of Fluid Mechanics. 1995. V. 288. P. 75–102.
12. *Ghesmat K., Azaiez J.* Viscous fingering instability in porous media: Effect of anisotropic velocity-dependent dispersion tensor // Transport in Porous Media. 2008. V. 73. P. 297–318.
13. *Moortgat J.* Viscous and gravitational fingering in multiphase compositional and compressible flow // Advances in Water Resources. 2016. V. 89. P. 53–66.
14. *Teng Y., Wang P., Jiang L., Liu Yu, Song Y., Wei Y.* An experimental study of density-driven convection of fluid pairs with viscosity contrast in porous media // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2020. V. 152. P. 119514.
15. *Александров А.А., Джураева Е.В., Утенков В.Ф.* Вязкость водных растворов хлорида натрия // Теплофиз. высоких темп. 2012. Т. 50. № 3. С. 378–383.
16. *Soboleva E.B.* Density-driven convection in an inhomogeneous geothermal reservoir // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2018. V. 127 (part C). P. 784–798.
17. *Соболева Е.Б.* Метод численного исследования динамики соленой воды в почве // Мат. моделирование. 2014. Т. 26. № 2. С. 50–64.
18. *Соболева Е.Б., Цыпкин Г.Г.* Численное моделирование конвективных течений в грунте при испарении воды, содержащей растворенную примесь // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 5. С. 88–99.
19. *Соболева Е.Б., Цыпкин Г.Г.* Режимы концентрационной конвекции при испарении грунтовых вод, содержащих растворенную примесь // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 3. С. 70–78.
20. *Soboleva E.B.* A method for Numerical Simulation of Haline Convective Flows in Porous Media Applied to Geology // Comp. Math. and Math. Phys. 2019. V.59. № 11. P. 1893–1903.
21. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоиздат, 1984. 152 с.
22. *Leonard B.P.* A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1979. V. 19. № 1. P. 59–98.
23. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
24. *Kim M.Ch.* Onset of buoyancy-driven convection in a variable viscosity liquid saturated in a porous medium // Chemical Engineering Science. 2014. V. 113. P. 77–87.