

УДК 532.52

## УСТОЙЧИВОСТЬ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИММЕТРИИ НА СТРУЕ В ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

© 2021 г. А. И. Григорьев<sup>а,\*</sup>, С. О. Ширяева<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

\*E-mail: grig@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 18.03.2020 г.

После доработки 22.06.2020 г.

Принята к публикации 20.07.2020 г.

Получено дисперсионное уравнение для капиллярных волн с произвольной азимутальной симметрией на струе эллиптического сечения в перпендикулярном ее оси симметрии однородном электростатическом поле. Исследована устойчивость первых трех азимутальных мод. Показано, что по мере увеличения напряженности внешнего электростатического поля и связанного с ним эксцентриситета поперечного сечения струи, а также поляризационного заряда на поверхности струи, устойчивость капиллярных волн на струе снижается. Проведено сравнение со струей в радиальном электростатическом поле. Оказалось, что инкременты неустойчивости капиллярных волн любой симметрии на поверхности струи в случае поперечного электростатического поля существенно выше, чем для случая радиального.

*Ключевые слова:* струя, электростатическое поле, капиллярные волны, устойчивость, симметрия

**DOI:** 10.31857/S0568528121020043

Явление электродиспергирования жидкости широко используется в академических, технических и технологических целях (см., например, обзоры [1–3]). При электродиспергировании жидкости формирующаяся струя находится в существенно неоднородном электрическом поле, которое в общем случае можно считать суперпозицией продольного, радиально симметричного и поперечного полей [4–8]. Величина поперечной составляющей напряженности поля в реальных установках для электродиспергирования невелика. Если устойчивость капиллярных волн на струе в продольном и радиально симметричном полях на настоящий момент времени теоретически детально исследована [9, 10], то капиллярные волны на струе в поперечном электростатическом поле не рассматривались. В этой связи решение задачи об устойчивости капиллярных волн на струе эллиптического сечения в перпендикулярном ее оси симметрии однородном электростатическом поле представляется вполне актуальным. Строго говоря, вопрос об устойчивости капиллярных волн на струе эллиптического сечения поднимался в [11, 12], но лишь в связи со старыми экспериментами Савара, Магнуса, Плато, Бидона и др. [13]. В них экспериментально исследовались струи, вытекающие под напором через отверстия разной формы: эллиптические, треугольные, четырехугольные и т.п. Эти эксперименты легли в основу теоретического изучения струй, проведенного Рэлеем в конце позапрошлого века [14, 15].

В данной работе исследуется устойчивость струи, помещенной в перпендикулярное ее оси однородное электростатическое поле, в котором поперечное сечение струи принимает примерно эллиптическую форму. На верхней и нижней половинках струи образуются индукционные заряды, изменяющие ее устойчивость по сравнению со струями в радиальном [9] или продольном [10] электрических полях.

### 1. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть дана бесконечно длинная цилиндрическая струя с круговым поперечным сечением радиуса  $R$  идеальной, идеально проводящей несжимаемой жидкости плотности  $\rho$  с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ . Влиянием внешней среды пренебрегаем, полагая, что струя

находится в вакууме. В окружающем струю пространстве создадим поперечное оси струи однородное электростатическое поле напряженностью  $\mathbf{E}_0$ , в котором струя примет примерно эллиптическую в поперечном сечении форму [16], уравнение ее равновесной поверхности примет вид:  $r = r(\varphi)$ , где  $r$  и  $\varphi$  – радиальная и угловая координаты соответственно. Поле  $\mathbf{E}_0$  будет причиной появления на поверхности струи индуцированного заряда. На половине поверхности струи, обращенной к полю  $\mathbf{E}_0$ , индуцируется отрицательный заряд, а на противоположной половине – положительный. Будем исследовать устойчивость капиллярных волн на такой струе.

Задача рассматривается в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ , орт  $\mathbf{e}_z$  которой совпадает с осью симметрии невозмущенной капиллярным волновым движением струи и направлен в направлении движения так, что  $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{e}_z$ . Поместим начало системы координат в произвольной точке на оси и примем, что оно движется со скоростью  $U$ .

Поверхность реальной струи всегда возмущена капиллярным волновым движением бесконечно малой (тепловой) амплитуды. Капиллярные волны теплового происхождения генерируются тепловым движением молекул жидкости и имеют амплитуды порядка  $\sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$ , где  $\kappa$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура жидкости [17]. Для большинства жидкостей эти амплитуды не превышают одной десятой нанометра.

Уравнение поверхности струи, возмущенной волновым движением, будем описывать формулой

$$r = r(\varphi) + \xi(\varphi, z, t)$$

где  $\xi(\varphi, z, t)$  малое возмущение равновесной поверхности так, что отношение  $\varepsilon \equiv (\max |\xi| / R) \ll 1$  будет служить малым параметром задачи, решение которой будем искать в первом приближении по  $\varepsilon$ .

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

В предположении, что гидродинамическая скорость движения частицы жидкости много меньше релятивистских скоростей, запишем математическую формулировку задачи

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) &= 0; \quad \partial_t \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \times \nabla) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla p(\mathbf{r}, t) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \\ r \rightarrow \infty: \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \mathbf{E}_0; \quad r \rightarrow 0 \quad \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0 \\ r &= r(\varphi) + \xi(\varphi, z, t): \\ \frac{dF(r, \varphi, z, t)}{dt} &= 0; \quad F(r, \varphi, z, t) \equiv r - r(\varphi) - \xi(\varphi, z, t) \\ p(\mathbf{r}, t) + p_E(\mathbf{r}, t) - p_\sigma(\mathbf{r}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  и  $p(\mathbf{r}, t)$  – поля скорости и давления в струе;  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  – напряженность электрического поля у поверхности возмущенной струи;  $p_E(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)^2 / 8\pi$  – давление электрического поля на возмущенную поверхность струи;  $p_\sigma(\mathbf{r}, t) \equiv \sigma \times \operatorname{div} \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$  – давление сил поверхностного натяжения;  $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$  – орт нормали к возмущенной поверхности струи

$$r = r(\varphi) + \xi(\varphi, z, t): \quad \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{\nabla F(r, \varphi, z, t)}{|\nabla F(r, \varphi, z, t)|}$$

Граничное условие для электрического поля на поверхности струи заключается в отсутствии касательной компоненты вектора напряженности

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$$

где  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t)$  – орт касательной к поверхности струи.

Дополним задачу интегральными условиями постоянства объема участка струи длиной, равной длине капиллярной волны  $\lambda$

$$r = r(\varphi) + \xi(\varphi, z, t): \quad \int_a^{a+\lambda} \int_0^{2\pi} \int_0^{\xi(\varphi, z, t)} r dr d\varphi dz = \pi R^2 \lambda$$

и сохранения заряда участка струи длиной  $\lambda$

$$r = r(\varphi) + \xi(\varphi, z, t): \int_a^{a+\lambda} \int_0^{2\pi} \chi dS = 0 \quad (2.2)$$

здесь  $a$  – фиксированная координата вдоль оси струи;  $\chi(\mathbf{r}, t)$  – поверхностная плотность заряда

### 3. СКАЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Поскольку жидкость идеальная, несжимаемая и при анализе устойчивости ее поверхности рассматриваются колебания малой амплитуды, то можно ввести гидродинамический потенциал  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0$$

с граничным условием на оси струи

$$r \rightarrow 0: \quad \psi \rightarrow 0$$

с которым скорость течения связана соотношением

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \nabla\psi(\mathbf{r}, t)$$

Вектор напряженности электрического поля также представим через градиент электрического потенциала  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  [18]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t)$$

причем  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0$ ; с граничным условием на бесконечности

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi \rightarrow -E_0 r \times \cos\varphi$$

Из уравнения Эйлера легко получить выражение для гидродинамического давления внутри струи

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0 - \rho \left( \partial_t \psi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} (\nabla\psi(\mathbf{r}, t))^2 \right)$$

где  $p_0$  – константа интегрирования.

Граничные условия на поверхности струи для гидродинамического и электрического потенциалов примут вид

$$r = r(\varphi) + \xi(\varphi, z, t): \quad \partial_t F(\mathbf{r}, t) + \nabla\psi(\mathbf{r}, t) \times \nabla F(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$p_0 - \rho \left( \partial_t \psi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} (\nabla\psi(\mathbf{r}, t))^2 \right) + p_E(\mathbf{r}, t) - p_\sigma(\mathbf{r}, t) = 0$$

где давление электрического поля  $p_E(\mathbf{r}, t)$  выразится через электрический потенциал

$$p_E(\mathbf{r}, t) = (\nabla\Phi(\mathbf{r}, t))^2 / 8\pi$$

а условие эквипотенциальности струи примет вид

$$r = r(\varphi) + \xi(\varphi, z, t): \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = \text{const}$$

Интегральное условие (2.2) запишется в виде

$$r = r(\varphi) + \xi(\varphi, z, t): \quad \int_a^{a+\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{n(r, t) \times \nabla\Phi(r, t)}{(e_r \times n(r, t))} \Big|_{\varphi} d\varphi dz = 0$$

где  $e_r$  – радиальный орт.

Будем решать задачу в безразмерных переменных, положив  $R = \sigma = \rho = 1$ .

Так как движение жидкости в струе вызывается капиллярными волнами теплового происхождения, то в безразмерных переменных потенциал поля скоростей  $\psi(r, \varphi, z, t)$  должен иметь тот же порядок величины, что и возмущение равновесной поверхности  $\xi(\varphi, z, t)$ .

Искомые функции  $\xi(\varphi, z, t)$ ,  $\psi(r, \varphi, z, t)$  и  $\Phi(r, \varphi, z, t)$  представим в виде разложения по малому параметру  $\varepsilon$  [19]

$$\begin{aligned}\xi(\varphi, z, t) &= \varepsilon \cdot \xi_1(\varphi, z, t); & \psi(r, \varphi, z, t) &= \varepsilon \cdot \psi_1(r, \varphi, z, t) \\ \Phi(r, \varphi, z, t) &= \Phi_0(r, \varphi) + \varepsilon \cdot \Phi_1(r, \varphi, z, t).\end{aligned}$$

Нижние индексы в обозначениях функций соответствуют порядку малости по  $\varepsilon$  величины соответствующей компоненты.

Подставляя разложения в исходную задачу и раскладывая полученные выражения в ряд по  $\varepsilon$ , сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями малого параметра. В результате получим краевые задачи различных порядков малости.

#### 4. ЗАДАЧА НУЛЕВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ. РАВНОВЕСНАЯ ФОРМА СТРУИ

Задача нулевого порядка малости имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta \Phi_0(r, \varphi) &= 0 \\ r \rightarrow \infty: \Phi_0(r, \varphi) &\rightarrow -E_0 \cdot r \cdot \cos \varphi \\ r = r(\varphi): \Phi_0(r, \varphi) &= 0 \\ p_0 - \left[ \left( 1 + 2 \frac{r'(\varphi)^2}{r^2} - \frac{r''(\varphi)}{r} \right) / r \left( 1 + \frac{r'(\varphi)^2}{r^2} \right)^{3/2} \right] + \\ &+ \frac{1}{8\pi} \left( \frac{1}{r^2} (\partial_\varphi \Phi_0(r, \varphi))^2 + (\partial_r \Phi_0(r, \varphi))^2 \right) = 0 \\ &\int_a^{a+\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{r(\varphi)^2}{2} d\varphi dz = \pi \lambda \\ &\int_a^{a+\lambda} \int_0^{2\pi} \left( \frac{r'(\varphi)}{r} \partial_\varphi \Phi_0(r, \varphi) + r \partial_r \Phi_0(r, \varphi) \right) \cdot r \Big|_{r=r(\varphi)} d\varphi dz = 0\end{aligned} \quad (4.1)$$

Штрихом обозначено дифференцирование функции по аргументу.

Равновесную форму струи будем искать в виде разложения в ряд Фурье

$$\begin{aligned}r = r(\varphi) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) = \\ &= a_0 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{a_0} \cos(n\varphi) + \frac{b_n}{a_0} \sin(n\varphi) \right) \right)\end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $a_n$  и  $b_n$  – постоянные коэффициенты разложения, имеющие один порядок малости при  $n \geq 1$ ,  $a_0 \sim 1$ .

Полагая, что деформация цилиндрической формы струи мала, примем, что

$$\left| \frac{a_n}{a_0} \right| \sim \left| \frac{b_n}{a_0} \right| \ll 1 \quad (n \geq 1)$$

Подставим выражение (4.2) в условие постоянства объема и получим

$$a_0 \equiv \left( 1 + O \left( \left( \frac{a_n}{a_0} \right)^2 \right) \right)$$

здесь  $O$  – символ порядка малости [19].

Таким образом, в линейном по  $a_n/a_0$  и  $b_n/a_0$  приближении запишем выражение для искомой равновесной формы поверхности струи в виде

$$r = r(\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) + O \left( \frac{a_n}{a_0} \right)^2 \quad (4.3)$$

Поскольку отличие равновесной формы струи от цилиндрической вызвано электрическим полем на ее поверхность, то безразмерное искажение цилиндрической поверхности  $a_n/a_0$  и безразмерное давление  $p_E$  имеют одинаковый порядок величины. Следовательно, при рассмотрении электрической части равновесной задачи для определения  $p_E$ , оставаясь в рамках линейного по  $a_n/a_0$  приближения, искажение цилиндрической формы струи учитывать не следует. Задачу определения электрического потенциала в равновесном состоянии достаточно рассматривать в окрестности цилиндрической поверхности

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_0(r, \varphi) &= 0 \\ \Phi_0(r, \varphi)|_{r \rightarrow \infty} &= -E_0 r \cdot \cos \varphi; \quad \Phi_0(r, \varphi)|_{r=1} = 0 \\ \int_a^{a+\lambda 2\pi} \int_0^1 \partial_r \Phi_0(r, \varphi) \Big|_{r=1} d\varphi dz &= 0 \end{aligned}$$

Решение задачи для электростатического потенциала имеет вид

$$\Phi_0 = -E_0 \left( r - \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + O \left( \frac{a_n}{a_0} \right)^{3/2} \quad (4.4)$$

Отметим, что интегральное условие сохранения заряда выполняется тождественно.

Подставим (4.3), (4.4) в динамическое граничное условие задачи нулевого порядка и ограничиваясь линейным по  $a_n/a_0$  и  $b_n/a_0$  приближением, получим следующее равенство

$$p_0 - 1 + \frac{E_0^2}{4\pi} + \frac{E_0^2}{4\pi} \cos(2\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1) (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi))$$

Это соотношение будет выполняться для произвольного значения угла  $\varphi$  только в случае, когда равны коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях. Равенство нулю суммы слагаемых, не зависящих от угла  $\varphi$ , в левой части полученного соотношения, позволяет определить величину гидродинамического давления в равновесном состоянии  $p_0 = 1 - E_0^2/4\pi$ .

Приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим выражения для коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$

$$b_n = 0, \quad (\forall n \neq 1); \quad a_2 = \frac{E_0^2}{12\pi}; \quad a_n = 0 \quad (\forall n \neq 1, 2)$$

Учтем, что слагаемые в разложении (4.3), пропорциональные  $\cos(\varphi)$  и  $\sin(\varphi)$ , описывают смещение струи как целого в направлениях, перпендикулярных ее оси. Поэтому из физических соображений соответствующие слагаемые из разложения (4.3) следует исключить, приняв:  $a_1 = b_1 = 0$ . В итоге выражение для равновесной формы струи принимает вид

$$r = r(\varphi) \approx 1 + h(\varphi) = 1 + \frac{E_0^2}{12\pi} \cos(2\varphi) \quad (4.5)$$

Сравним форму поперечного сечения струи с эллипсом. Для этого разложим уравнение эллипса, записанное в полярных координатах, в ряд по квадрату эксцентриситета  $e$

$$r = \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}} \approx 1 + e^2 \frac{1}{4} \cos(2\varphi) + O(e^4)$$

Сравнивая полученное разложение с выражением (4.5), несложно заметить, что форму поперечного сечения струи приближенно можно считать эллипсом с эксцентриситетом, величина которого определяется величиной внешнего электрического поля  $e^2 = E_0^2/3\pi$ .

## 5. ЗАДАЧА ПЕРВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ

Линеаризованная по величине равновесного искажения  $h(\varphi)$  цилиндрической формы струи задача первого порядка малости по  $\epsilon$  имеет вид

$$\Delta \psi_1(r, \varphi, z, t) = 0; \quad \Delta \Phi_1(r, \varphi, z, t) = 0$$

$$r \rightarrow \infty: \Phi_1(r, \varphi, z, t) \rightarrow 0; \quad r \rightarrow 0: \Psi_1(r, \varphi, z, t) \rightarrow 0$$

$$r = 1: -\partial_r \xi_1(\varphi, z, t) + (\partial_r \Psi_1(r, \varphi, z, t) -$$

$$- h'(\varphi) \partial_\varphi \Psi_1(r, \varphi, z, t) + h(\varphi) \partial_{r,r} \Psi_1(r, \varphi, z, t)) = 0$$

$$\partial_{z,z} \xi_1(\varphi, z, t) - h'(\varphi) \partial_\varphi \xi_1(\varphi, z, t) - 2h''(\varphi) \xi_1(\varphi, z, t) +$$

$$+ (1 - 2h(\varphi)) (\xi_1(\varphi, z, t) + \partial_{\varphi,\varphi} \xi_1(\varphi, z, t)) - \pi^{-1} E_0^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \xi_1(\varphi, z, t) -$$

$$- [\partial_r \Psi_1(r, \varphi, z, t) + (2\pi)^{-1} \cos \varphi \cdot E_0 \cdot \partial_r \Phi_1(r, \varphi, z, t) + h(\varphi) \partial_{r,t} \Psi_1(r, \varphi, z, t)] = 0$$

$$\Phi_1(r, \varphi, z, t) - 2E_0 \cos \varphi \cdot \xi_1(\varphi, z, t) = 0 \quad (5.2)$$

$$\int_a^{a+\lambda} \int_0^{2\pi} (1 + h(\varphi)) \xi_1(\varphi, z, t) d\varphi dz = 0; \quad \int_a^{a+\lambda} \int_0^{2\pi} \partial_r \Phi_1(r, \varphi, z, t) \Big|_{r=1} dz d\varphi = 0$$

Решения уравнений Лапласа для функций  $\Psi_1(r, \varphi, z, t)$  и  $\Phi_1(r, \varphi, z, t)$ , гармонические по координатам  $\varphi$  и  $z$ , удовлетворяющие условиям ограниченности, будем искать в виде

$$\Phi_1(r, \varphi, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (B_{m,k}(t) \cdot \exp(im\varphi) \cdot \exp(ikz) \cdot K_m(kr)) dk \quad (5.3)$$

$$\Psi_1(r, \varphi, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (A_{m,k}(t) \cdot \exp(im\varphi) \cdot \exp(ikz) \cdot I_m(kr)) dk \quad (5.4)$$

где  $I_m(kr)$  и  $K_m(kr)$  – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода [20];  $k$  и  $m$  – волновое и азимутальное числа;  $A_{m,k}$  и  $B_{m,k}$  – неизвестные зависящие от времени коэффициенты.

Поскольку функция  $\xi_1(\varphi, z, t)$  связана с  $\Psi_1(\varphi, z, t)$  кинематическим граничным условием, будем искать выражение для нее в виде

$$\xi_1(\varphi, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} C_{m,k}(t) \cdot \exp(im\varphi) \cdot \exp(ikz) dk \quad (5.5)$$

где  $C_{m,k}(t)$  – неизвестные, зависящие от времени, коэффициенты.

Подставляя выражения (5.3)–(5.5) в условия (5.1) и (5.2), выразим  $A_{m,k}(t)$  и  $B_{m,k}(t)$  через  $C_{m,k}(t)$ . Результаты подставим в динамическое граничное условие первого порядка и получим

$$C_{m,k}''(t) + W(C_{m+2,k}''(t) \cdot A_m(k) + C_{m-2,k}''(t) \cdot X_m(k)) + \quad (5.6)$$

$$+ C_{m,k}(t)(G_m(k)(m^2 + k^2 - 1) + WF_m(k)) +$$

$$+ WC_{m+2,k}(t) \Gamma_m(k) + WC_{m-2,k}(t) N_m(k) = 0$$

$$H_j(k) = \frac{kK_j'(k)}{K_j(k)}; \quad G_j(k) = \frac{kI_j'(k)}{I_j(k)}$$

$$A_m(k) = \frac{1}{6} \left( G_m(k) - (k^2 + m(m+2)) \frac{1}{G_{m+2}(k)} + 1 \right)$$

$$X_m(k) = \frac{1}{6} \left( G_m(k) - (k^2 + m(m-2)) \frac{1}{G_{m-2}(k)} + 1 \right)$$

$$F_m(k) = G_m(k)(H_{m+1}(k) + H_{m-1}(k) + 2)$$

$$\Gamma_m(k) = G_m(k) \left( H_{m+1}(k) - \frac{(m+1)(m+2)}{3} \right)$$

$$N_m(k) = G_m(k) \left( H_{m-1}(k) - \frac{(m-2)(m-1)}{3} \right)$$

где введен безразмерный полевой параметр  $W \equiv E_0^2/4\pi$ , принимаемый за второй малый параметр задачи.

Система (5.6) является связанной системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций  $C_{m,k}(t)$ , описывающих временную эволюцию возмущения свободной поверхности струи.

## 6. ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ

Будем решать систему (5.6) методом последовательных приближений, используя тот факт, что согласно сделанным выше предположениям напряженность внешнего электрического поля, а следовательно, и полевой параметр  $W$  являются величинами малыми. Заметим, что слагаемые, ответственные за связанность системы уравнений (5.6), пропорциональны  $W$ . Поэтому в нулевом приближении по  $W$  ими можно пренебречь, получив систему несвязанных уравнений, решения которой легко находятся.

Пренебрегая в системе (5.6) слагаемыми, пропорциональными  $W \cdot C_{m\pm 2,k}''(t)$  и  $W \cdot C_{m\pm 2,k}(t)$ , получим систему несвязанных гармонических уравнений

$$C_{m,k}''(t) + C_{m,k}(t)(G_m(k)(m^2 + k^2 - 1) + WF_m(k)) = 0 \quad (6.1)$$

Решениями этих уравнений являются гармонические функции времени

$$C_{m,k}(t) = \alpha_{m,k} \cdot \exp(i\omega_{m,k}t) \quad (6.2)$$

где  $\alpha_{m,k}$  — это константы, имеющие смысл амплитуд, а  $\omega_{m,k}$  — частоты капиллярных волн, определяемые дисперсионным уравнением, которое следует из (6.1) при подстановке туда (6.2)

$$\omega_{m,k}^2 = G_m(k)(m^2 + k^2 - 1) + WF_m(k) \quad (6.3)$$

## 7. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

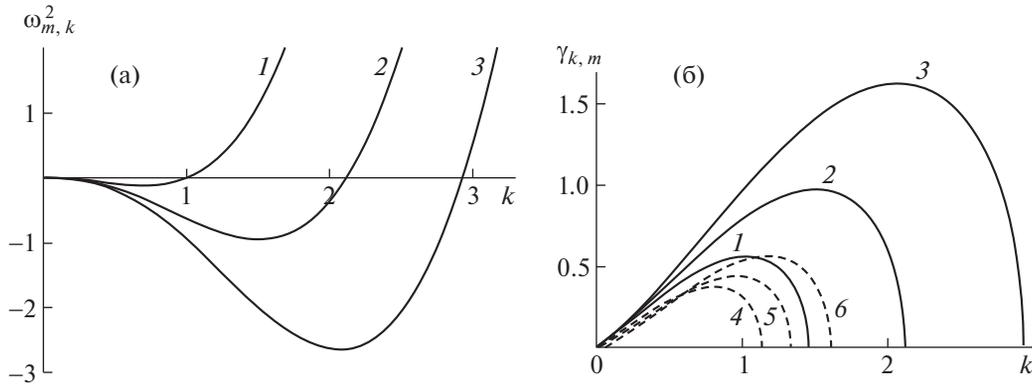
Проведем анализ устойчивости возмущений поверхности струи различной симметрии — для первых трех мод: осесимметричной ( $m = 0$ ), изгибающей ( $m = 1$ ) и деформационной ( $m = 2$ ).

### *Осесимметричные волновые возмущения*

Рассмотрим осесимметричные ( $m = 0$ ) волновые возмущения на поверхности струи. На рис. 1 показаны зависимости квадрата частоты  $\omega_{m,k}^2$  от волнового числа  $k$ , рассчитанные по (6.3) для различных значений полевого параметра  $W$ . Неустойчивыми являются капиллярные волны в диапазоне значений волновых чисел, где квадрат частоты отрицателен:  $\omega_{m,k}^2 < 0$  (т.е. там, где частота  $\omega_{m,k}$  будет мнимой, и фактически определит инкремент неустойчивости  $\gamma_{m,k}$  [21]). Как видно из рис. 1а, длинные осесимметричные волны (с малыми значениями волнового числа  $k$ ) неустойчивы даже в отсутствие электрического поля (см. кривую 1). Из рис. 1а видно, что с ростом величины напряженности внешнего электростатического поля диапазон значений волновых чисел неустойчивых волн расширяется.

На рис. 1б приведены зависимости инкрементов  $\gamma_{m,k}$  неустойчивых осесимметричных волн на поверхности струи от волнового числа для двух ситуаций: когда внешнее однородное электростатическое поле перпендикулярно оси струи (кривые 1–3, рассчитанные по (6.3)), и когда электростатическое поле радиально оси струи (рассчитанные по результатам работы [22] кривые 4–6)). Фактически во втором случае имеем заряженную струю.

Следует отметить, что в [22] рассматривались осцилляции и устойчивость капиллярных волн произвольной симметрии на поверхности заряженной струи вязкой электропроводной жидкости, а потому для расчета инкрементов неустойчивости для идеальной жидкости в дисперсион-



**Рис. 1.** (а) Зависимость квадрата частоты  $\omega_{m,k}^2$  осесимметричных ( $m = 0$ ) волн от волнового числа  $k$ : 1–3; (б) зависимость инкрементов  $\gamma_{m,k}$  осесимметричных ( $m = 0$ ) волн от волнового числа  $k$ : 1–3 – поперечное однородное электростатическое поле; 4–6 – радиальное электростатическое поле; (1, 4), (2, 5), (3, 6) –  $W = 0.5, 1, 1.5$ .

ном уравнении, полученном в [22], был совершен переход к идеальной жидкости. В итоге получено дисперсионное уравнение для капиллярных волн на поверхности заряженной струи идеальной несжимаемой электропроводной жидкости

$$\omega_{m,k}^2 = \left[ m + \frac{kI_{m+1}(k)}{I_m(k)} \right] \left[ m^2 + k^2 - 1 + W \left( 1 + m - \frac{kK_{m+1}(k)}{K_m(k)} \right) \right] \quad (7.1)$$

где полевой параметр  $W \equiv 4\pi\chi^2 \equiv \frac{E^2}{4\pi}$ , а  $\chi$  – плотность поверхностного заряда на струе, т.е. определяется так же, как и в поперечном поле. Кривые 4–6 рассчитаны по (7.1).

Из рис. 1б видно, что при одинаковых значениях полевых параметров струя в поперечном однородном поле более неустойчива, чем в радиальном. Зоны неустойчивости капиллярных волн в первой ситуации шире и инкременты имеют большие значения, чем во второй.

#### *Изгибные волновые возмущения*

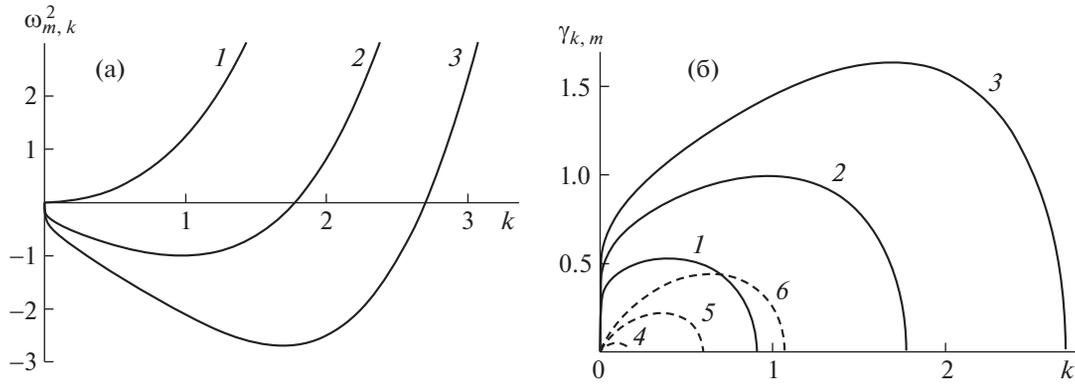
В отсутствие внешнего электрического поля изгибные капиллярные волны ( $m = 1$ ) всегда устойчивы. Однако наличие сколь угодно малого отличного от нуля поля приводит к изгибной неустойчивости.

На рис. 2а, б представлены зависимости квадрата частоты  $\omega_{m,k}^2$  и инкремента  $\gamma_{m,k}$  от волнового числа  $k$ , аналогичные изображенным на рис. 1а, б. Из рис. 2 следует, что влияние внешнего электростатического поля на устойчивость изгибных капиллярных волн аналогично его влиянию на осесимметричные капиллярные волны: увеличение полевого параметра увеличивает как ширину диапазона неустойчивых волн, так и инкремент развития их неустойчивости.

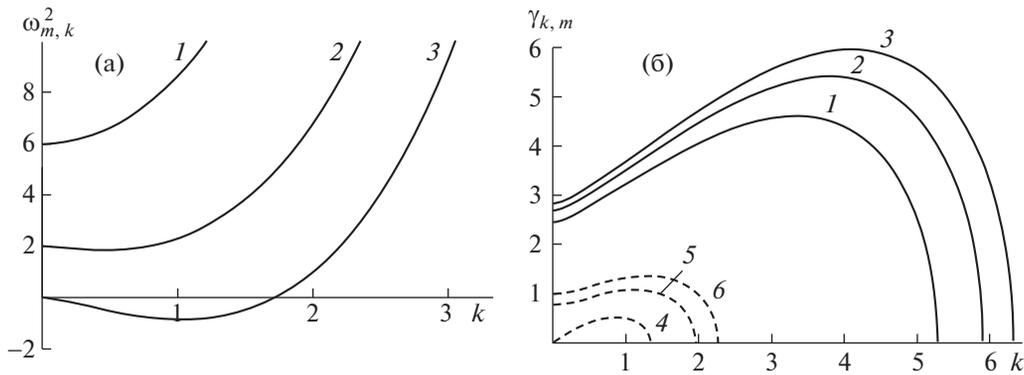
На рис. 2б показано сравнение значений инкрементов изгибных волн для случаев поперечного однородного и радиального электрических полей. Видно, что так же, как и в случае осесимметричных волн, при одинаковых значениях полевого параметра изгибные волны в поперечном однородном поле обладают существенно большими инкрементами, нежели в радиальном поле, т.е. струя менее устойчива.

#### *Деформационные волновые возмущения*

В отличие от двух предыдущих случаев неустойчивость капиллярных волновых возмущений с азимутальным числом  $m = 2$  является пороговой, т.е. возможность реализации такой неустойчивости появляется при превышении значением полевого параметра определенной пороговой величины.



**Рис. 2.** (а) Зависимость квадрата частоты  $\omega_{m,k}^2$  изгибных ( $m = 1$ ) волн от волнового числа  $k$ : 1–3 –  $W = 0.5, 1, 1.5$ ; (б) зависимость инкрементов  $\gamma_{m,k}$  изгибных ( $m = 1$ ) волн от волнового числа  $k$ : 1–3 – поперечное электростатическое однородное поле, 4–6 – радиальное электростатическое поле; (1, 4), (2, 5), (3, 6) –  $W = 0.5, 1, 1.5$ .



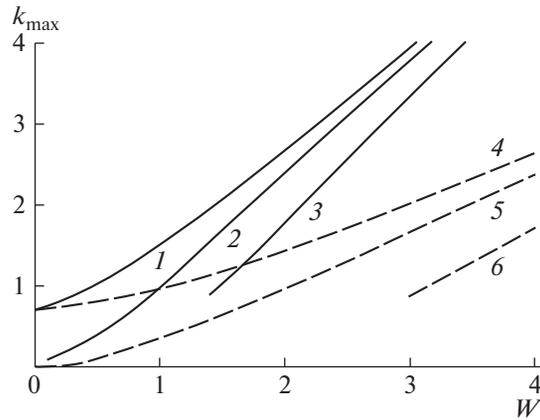
**Рис. 3.** (а) Зависимость квадрата частоты  $\omega_{m,k}^2$  деформационных ( $m = 2$ ) волн от волнового числа  $k$ : 1–3 –  $W = 0, 1, 1.5$ ; (б) зависимость инкрементов  $\gamma_{m,k}$  деформационных ( $m = 2$ ) волн от волнового числа  $k$ : 1–3 – поперечное электростатическое однородное поле, 4–6 – радиальное электростатическое поле; (1, 4), (2, 5), (3, 6) –  $W = 3, 3, 3.5$ .

На рис. 3а показана зависимость квадрата частоты  $\omega_{m,k}^2$  от волнового числа, из которой следует, что область неустойчивых волн появляется лишь при значении полевого параметра, большем некоторой конечной величины (кривая 3). Данный тип неустойчивости можно назвать изгибно-деформационной неустойчивостью. В результате ее развития на боковой поверхности струи формируются выступы, с вершин которых эмитируются дочерние тонкие струйки.

На рис. 3б представлена зависимость величины инкремента изгибно-деформационной неустойчивости от волнового числа:  $\gamma_{m,k}$ . На рис. 3б кривые 1–3 относятся к поперечному однородному полю, кривые 4–6 – к радиальному. Увеличение полевого параметра как в поперечном однородном электростатическом поле, так и в радиальном приводит к расширению диапазонов неустойчивых волн, а так же к увеличению инкрементов нарастания капиллярных волн. Как и в предыдущих случаях, величины инкрементов неустойчивости в поперечном электростатическом поле существенно превышают величины инкрементов в радиальном поле.

### 8. ВОЛНОВОЕ ЧИСЛО НАИБОЛЕЕ НЕУСТОЙЧИВОЙ ВОЛНЫ

Как видно из рис. 1б, рис. 2б и рис. 3б, зависимости инкрементов от волнового числа имеют максимумы. Неустойчивость волны с волновым числом  $k = k_{\max}$ , соответствующим максимуму инкремента, нарастает с наибольшей скоростью и оказывает преимущественное влияние на кар-



**Рис. 4.** Зависимость значений волнового числа наиболее неустойчивой волны  $k_{\max}$  от величины зарядового параметра  $W$ : 1–3 – поперечное электростатическое однородное поле; 4–6 – радиальное электростатическое однородное поле; (1, 4), (2, 5), (3, 6) –  $m = 0, 1, 2$ .

тину распада всей струи [21]. На рис. 4 представлены зависимости волнового числа  $k_{\max}$ , соответствующего наиболее неустойчивой волне, от величины полевого параметра  $W$  и разных значений азимутального числа  $m$ , для поперечного однородного (сплошные линии) и радиального (пунктирные линии) полей.

Видно, что с увеличением напряженности электрического поля картина распада струи определяется неустойчивостью все более коротких волн. Отметим, что кривая, соответствующая  $m = 2$ , появляется при достижении полевым параметром  $W$  фиксированного значения, поскольку, как отмечалось выше, неустойчивость изгибно-деформационных волн имеет пороговый по  $W$  характер.

Отметим, что пороговое значение параметра  $W$  ниже в случае поперечного однородного поля.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдена равновесная форма сечения струи в поперечном ее оси однородном электростатическом поле, которая может быть представлена эллипсом с эксцентриситетом, величина которого определяется величиной внешнего электростатического поля.

Получено дисперсионное уравнение для капиллярных волн на поверхности струи в поперечном ее оси однородном электростатическом поле. Построены зависимости квадрата частоты от волнового числа для волн различной азимутальной симметрии: осесимметричных, изгибных и изгибно-деформационных. Для всех случаев определено положение зон неустойчивости и показано, что с увеличением напряженности электростатического поля зоны неустойчивости расширяются. Оказалось, что величина инкрементов неустойчивости возрастает с ростом напряженности поля и имеет максимум при некотором значении волнового числа  $k_{\max}$ . Показано, что с ростом напряженности электрического поля  $k_{\max}$  растет, т.е. характер распада струи определяется все более короткими волнами.

Проведено сравнение решаемой задачи с аналогичной задачей о заряженной струе с круговым поперечным сечением, т.е. когда напряженность электрического поля у поверхности струи направлена радиально ее оси симметрии. Как оказалось, инкременты неустойчивости капиллярных волн на поверхности струи в случае поперечного однородного электростатического поля существенно выше, чем для случая радиального.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коженков В.И., Фукс Н.А. Электрогидродинамическое распыление жидкости (обзор) // Успехи химии. 1976. Т. 45. № 12. С. 2274–2284.
2. Bailey A.G. Electrostatic atomization of liquids (review) // Atomization and Spray Technology. 1986. V. 2. P. 95–134.

3. *Fenn J.B., Mann M., Meng C.K.* Electrospray ionization for mass spectrometry of large biomolecules (review) // *Science*. 1989. V. 246. № 4926. P. 64–71.
4. *Cloupeau M., Prunet Foch B.* Electrostatic spraying of liquids: main functioning modes // *J. Electrostatics*. 1990. V. 25. P. 165–184.
5. *Cloupeau M., Prunet Foch B.* Electrohydrodynamic spraying functioning modes: a critical review // *J. Aerosol Sci.* 1994. V. 25. № 6. P. 1021–1035.
6. *Jaworek A., Krupa A.* Classification of the Modes of EHD Spraying // *J. Aerosol Sci.* 1999. V. 30. № 7. P. 873–893.
7. *Kim O.V., Dunn P.F.* Control Production by in-flight Electro spraying // *Langmuir*. 2010. V. 26. P. 15807–15813. <https://doi.org/10.1021/la102793j>
8. *Verdoolda S., Agostinhoc L.L.F., Yurterib C.U., Marijnissenb J.C.M.* A generic electro spray classification // *J. Aerosol Sci.* 2014. V. 67. P. 87–103.
9. *Григорьев А.И., Петрушов Н.А., Ширяева С.О.* Нелинейный анализ закономерностей реализации волнового движения на поверхности заряженной струи, движущейся относительно материальной среды // *Изв. РАН. МЖГ*. 2012. № 1. С. 68–79.
10. *Григорьев А.И., Петрушов Н.А., Ширяева С.О., Полянцев Н.А.* Нелинейный анализ волнового движения на поверхности струи в продольном электрическом поле, движущейся в диэлектрической среде // *ЖТФ*. 2012. С. 82. № 8. С. 35–41.
11. *Amini G., Dolatabadi A.* Capillary instability of elliptic liquid jets // *Physics of Fluids*. 2011. V. 23. № 084109. P. 1–9. <https://doi.org/10.1063/1.3626550>
12. *Amini G., Yu Lv, Dolatabadi A., Ihme M.* Instability of elliptic liquid jets: Temporal linear stability theory and experimental analysis // *Physics of fluids*. 2014. V. 26. № 114105 P. 1–22. <https://doi.org/10.1063/1.4901246>
13. *Стрэтт Дж.В. (Лорд Рэлей)*. Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.
14. *Strutt J.W. (Lord Rayleigh)*. On the instability of jets // *Proc. London Math. Soc.* 1878. V. 10. P. 4–13.
15. *Strutt J.W. (Lord Rayleigh)* On the instability cylindrical fluid surfaces // *Phil. Mag.* 1892. V. 34. Ser. 5. P. 145–154.
16. *Cheng K.J.* Capillary oscillations of a drop in an electric field // *Phys. Lett.* 1985. V. A112. № 11. P. 392–396.
17. *Френкель Я.И.* К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // *ЖЭТФ*. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
18. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
19. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
20. *Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовиц М., Стиган И.* М.: Наука, 1979. 831 с.
21. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
22. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В.* Об устойчивости неосесимметричной заряженной струи вязкой электропроводной жидкости // *ЖТФ*. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 5–12.