

УДК 533.3

НАГРЕВ ТОНКОГО ОСТРОГО КЛИНА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

© 2021 г. А. А. Кузнецов^{a,*}, В. В. Лунев^{a,**}

^a Центральный научно-исследовательский институт машиностроения (ЦНИИМаш), Королев, Россия

*E-mail: kuznetsov.aa@mipt.ru

**E-mail: lunev_vv@mail.ru

Поступила в редакцию 26.01.2020 г.

После доработки 27.03.2020 г.

Принята к публикации 27.03.2020 г.

Рассматривается задача о нагреве тонкого острого клина, внезапно погруженного в высокотемпературный сверхзвуковой поток при ламинарном или турбулентном режиме теплообмена на его поверхности. Проведен математический анализ поведения решения в окрестности особой точки в носке клина. Получено соответствующее численное решение задачи.

Ключевые слова: острый клин, сверхзвуковой поток, особая точка

DOI: 10.31857/S0568528121010072

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В полярной системе координат (x, θ) уравнение теплопроводности имеет следующий вид [1]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\lambda}{x^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$$

Здесь t, T — время и температура тела, ρ, c, λ — плотность, теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала, принимаемые постоянными, x — расстояние, отсчитываемое от носка клина вдоль лучей, проходящих через него, а угол θ отсчитывается от оси клина, θ_0 — угол раствора. Начальные и граничные условия:

$$t = 0 \quad T = T_{in}; \quad \theta = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0; \quad \theta = \theta_0 \quad \frac{\lambda}{x} \frac{\partial T}{\partial \theta} = -q^+ = -\alpha_n x^{-n} (T_e - T_w) \quad (1.1)$$

Здесь q^+ — тепловой поток к поверхности клина, T_{in}, T_w, T_e — начальная, при $t = 0$ его температура, температура его поверхности и так называемая равновесная температура внешнего потока (близкая к его температуре торможения). Формула (1.1) для теплового потока q^+ взята той же, что и для плоской пластины (например, [2]), с неким коэффициентом α_n , с $n = 1/2$ при ламинарном и $n = 1/5$ при турбулентном пограничных слоях. Такой закон теплообмена приводит к сингулярности управляющего уравнения ((1.4) ниже) в точке $x = 0$, что существенно осложняет задачу.

Проинтегрировав уравнение по θ , с учетом граничных условий (1.1), вместо температуры T введем безразмерную среднюю (что допустимо для тонкого клина) температуру

$$T = \frac{1}{\theta_0(T_e - T_{in})} \int_0^{\theta_0} (T - T_{in}) d\theta$$

В этом случае уравнение (с заменой $T_w = T$ в силу тонкости клина) примет вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\beta(1-T)}{x^k}; \quad \beta = \frac{\alpha}{\theta_0}; \quad k = 1 + n \quad (1.2)$$

Введем безразмерные переменные τ и z , используя соответствующие масштабы времени t_0 и длины x_0 , которые определим, поделив уравнение (1.2) на β/x_0^k

$$\tau = \frac{t}{t_0}; \quad z = \frac{x}{x_0}; \quad x_0 = \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{1/(2-k)}; \quad t_0 = \frac{\rho c x_0^k}{\beta} \quad (1.3)$$

После преобразований уравнение (1.2) примет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = Z + z^{-k}(1 - T); \quad Z = \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{dT}{dz} \right) \quad (1.4)$$

В новых переменных решение этого уравнения будет представлено в виде зависимостей лишь от переменных (τ, z) , формулирующих, по сути, закон подобия таких задач, что позволяет проанализировать общие свойства их решений независимо от их определяющих параметров. Например, из формул (1.3) следует, что достигнутая при нагреве температура $T(\tau, z)$ в какой-либо фиксированной точке (τ, z) , с уменьшением угла θ_0 будет перемещаться вперед по координатам (t, x) .

Уравнение (1.4) имеет особенность в точке $z = 0$, поэтому для анализа полезно “растянуть” ее заменой переменных $y = \ln(z)$, преобразовав это уравнение к виду

$$e^{2y} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + e^{(1-n)y}(1 - T') \quad (1.5)$$

При этом $y \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow 0$.

2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И АНАЛИЗ АСИМПТОТИК

Рассмотрим начальные и краевые условия данной задачи. При $t = 0$ перед началом нагрева температура клина, согласно (1.1), равна начальной, которую, не теряя общности, примем за начало отсчета температур. Далее, на большом удалении от носка, при $z \gg 1$ приток тепла к клину убывает, т.е., согласно (1.1), $q^+ \rightarrow 0$ и его температура должна стремиться к начальной.

В качестве же граничного условия при $z \rightarrow 0$ примем естественное условие отсутствия сосредоточенного притока тепла в точку $x = z = 0$ для формализации которого используем уравнение баланса тепла в безразмерной форме для малой окрестности клина $\Delta z = z - 0 \ll 1$, которое в свою очередь получим, проинтегрировав по z уравнение (1.4), умноженное на z

$$\frac{z^2}{2} \frac{\partial T'_a}{\partial \tau} = q_\lambda + q_0; \quad q_\lambda = \left(z \frac{\partial T}{\partial z} \right); \quad q_0 = \frac{z^{1-n} T'_a}{1-n} \quad (2.1)$$

Здесь T'_a – средняя по отрезку Δz температура, в силу предполагаемой непрерывности решения стремящаяся к T при $z \rightarrow 0$. Очевидно, левая часть этого уравнения никак не может быть больше члена q_0 справа, исчезающего при $z \rightarrow 0$. Следовательно, при этом должно быть и $q_\lambda \rightarrow 0$. Однако это условие фактически является здесь следствием самого уравнения и, вообще говоря, не может еще считаться наложенным условием данной задачи. В принципе же, вблизи особой точки уравнение (1.4) может иметь множество интегральных кривых, в том числе и удовлетворяющих условию $q_\lambda \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$, или $y \rightarrow -\infty$. И это при одновременном отсутствии условия $\partial T / \partial y \rightarrow 0$, как и в данном случае, в котором из сопоставления двух членов в правой части уравнения (2.1) следует асимптотика $\partial T / \partial z \sim z^{-n}$ при $z \rightarrow 0$. Поэтому из физических соображений наложим на решение еще условие его ограниченности, т.е. примем уже для уравнения (1.5) условие $\partial T / \partial y \rightarrow 0$ при $y \rightarrow -\infty$. Таким образом, искомое решение должно будет удовлетворять следующим условиям:

$$\tau = 0: \quad T = 0; \quad z \rightarrow 0, \quad y \rightarrow -\infty: \quad z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial y} \rightarrow 0; \quad \tau < \infty, \quad z \rightarrow \infty: \quad T \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

Установим далее асимптотический закон убывания температуры при $z \rightarrow \infty$. Для этого рассмотрим уравнение, получаемое из (1.4) отбрасыванием члена Z . Тогда это уравнение будет иметь решение, удовлетворяющее последнему условию (2.2)

$$\frac{\partial T'_\infty}{\partial \tau} = z^{-k}(1 - T'_\infty); \quad T'_\infty = 1 - \exp(-\eta), \quad \eta = \tau z^{-k} \quad (2.3)$$

Чтобы убедиться в достоверности этого асимптотического решения, вычислим на нем функцию Z

$$k^{-2}Z = T_{\infty}'(\tau^2 z^{-2(1+k)} - \tau z^{-(2+k)}) = -T_{\infty}' z^{-2} \eta(1 - \eta), \quad \eta = \frac{\tau}{z^k}$$

При этом отношение двух последних членов в уравнении (1.4) будет иметь порядок $\mu = Z T_{\infty}'^{-1} z^k \approx \tau z^{-2}$. При $z \rightarrow \infty$ и фиксированном τ величина $\mu \rightarrow 0$, и членом Z в уравнении (1.4) действительно можно пренебречь по сравнению с последним членом. Уравнение (2.3) в этом случае будут справедливыми вместе с его предельным решением, которое таким образом и будет автоматическим “правым” асимптотическим граничным условием задачи. Но при фиксированном z и с ростом τ , при $\tau/z^2 \sim 1$ и более, пренебречь членом Z в уравнении (1.4) будет уже нельзя, в том числе и в начале нагрева, при $\tau \approx 0$, $T \approx 0$. Это обусловлено тем, что при любом сколь угодно малом τ в малой окрестности острия клина всегда будет присутствовать область с размером $z \sim \tau^{1/2}$, и даже с $z \ll \tau^{1/2}$ и, следовательно, с не малой величиной Z . Иными словами, продольный отток тепла в этом процессе начинается мгновенно и одновременно с началом внешнего нагрева.

Чтобы прояснить ситуацию в окрестности носка клина, при малых аргументах $\tau \ll 1$, $z \ll 1$ заметим, что члены $\partial T/\partial t$ и q_{λ} в уравнении (2.1) не могут, очевидно, превосходить член q_0 , т.е. приток тепла извне, и естественно предположить, что в этой окрестности все члены этого уравнения должны иметь одинаковый порядок. Иными словами, члены уравнения (2.1), обусловленные внешним притоком тепла и оттоком его за счет теплопроводности, должны быть сравнимы между собой и вместе определять порядок члена с производной $\partial T_a'/\partial t$. Этим окрестность носка отличается от дальней периферии клина, в которой член с притоком тепла является преобладающим.

Тогда для оценок темпа роста температур можно воспользоваться решением (2.3), применив его уже для осредненной по малому отрезку с длиной $\Delta z = z - 0 \ll 1$ температуры в форме

$$T_a' \approx 1 - \exp(-\gamma\eta), \quad \eta = \tau z^{-k}$$

Здесь $\gamma \sim 1$ — некоторый коэффициент, учитывающий в том числе и долю внешнего притока тепла, пошедшего на повышение температуры носка клина. Используя далее эту формулу для оценки члена q_{λ} в уравнении (2.1), получим оценку отношения $\mu' = q_{\lambda}/q_0 \sim \tau/z^2$. И, наконец, исключив переменную τ из постулированного выше условия (1.4) $\mu' \sim 1$, получим в таком приближении следующую оценку для начального мгновенного распределения температуры, осредненной по малой окрестности острия клина размером $\Delta z = z - 0 \ll 1$

$$T \sim 1 - \exp(-\gamma z^{1-n}) \approx z^{1-n}, \quad T \rightarrow T_0, \quad z \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

А исключив из (2.4) $z \sim \tau^{1/2}$, получим зависимость температуры от τ при $z \rightarrow 0$

$$T \sim \tau^m, \quad m = 1 - \frac{k}{2} = \frac{1}{2}(1 - n), \quad n = \frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{4}, \quad n = \frac{1}{5}, \quad m = \frac{2}{5} \quad (2.5)$$

Таким образом, несмотря на неограниченность производной $\partial T/\partial \tau \sim \tau^{m-1} \rightarrow \infty$ в точке $z \rightarrow 0$ в начальный момент времени $\tau \rightarrow 0$, температура носка клина растет непрерывным образом. Заметим, что условие $z \sim \tau^{1/2}$ определяет порядок области прогрева окрестности носка клина за время τ , которое при малых z и τ оказывается меньшим области $z \sim \tau^{1/k}$, чем это было бы при отсутствии оттока тепла из этой области (что следует из (1.2), так как $1 + n < 2$).

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Производная $\partial T/\partial z \sim z^{-n} \rightarrow \infty$, при $z \rightarrow 0$, что затрудняет непосредственное применение стандартной процедуры метода конечных разностей к численному решению уравнения (1.4). Но этот недостаток устраняется переходом к эквивалентному уравнению (1.5), поскольку переменная $y = \ln z$ переводит сингулярную точку $z = 0$ в бесконечно удаленную $y \rightarrow -\infty$, в которой в силу граничного условия (2.2) обе первых производных по y стремятся к нулю.

Численное решение уравнения (1.4) с условиями (2.2) было получено путем серии расчетов, с увеличивающейся расчетной областью и уменьшающимися шагами по обеим осям. Условиями завер-

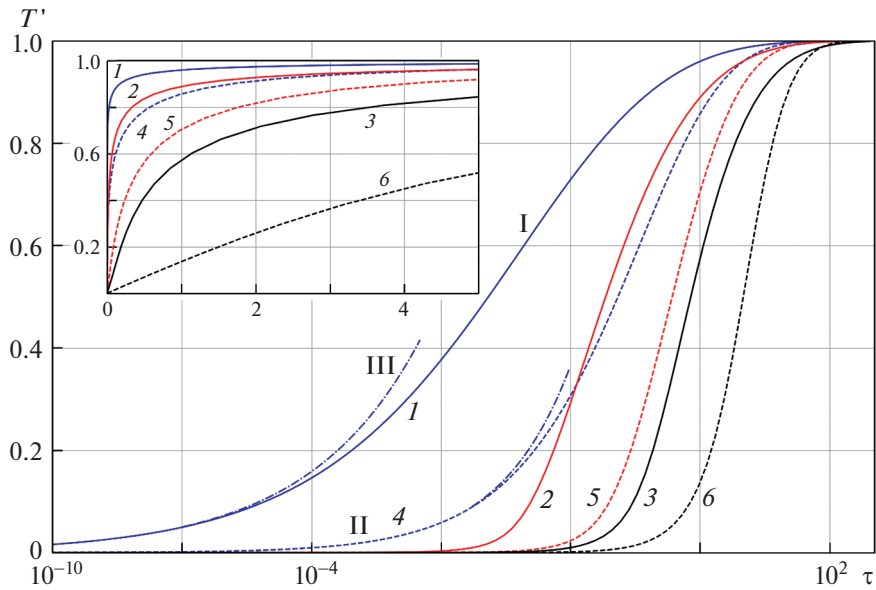


Рис. 1. Зависимость безразмерной температуры T' от безразмерного времени τ в логарифмическом масштабе: I – ламинарный режим; II – турбулентный; III – асимптотические решения $z = 0, \tau \rightarrow 0$; 1, 2 – $z = 0$; 3, 4 – $z = 0.2$; 5, 6 – $z = 2$.

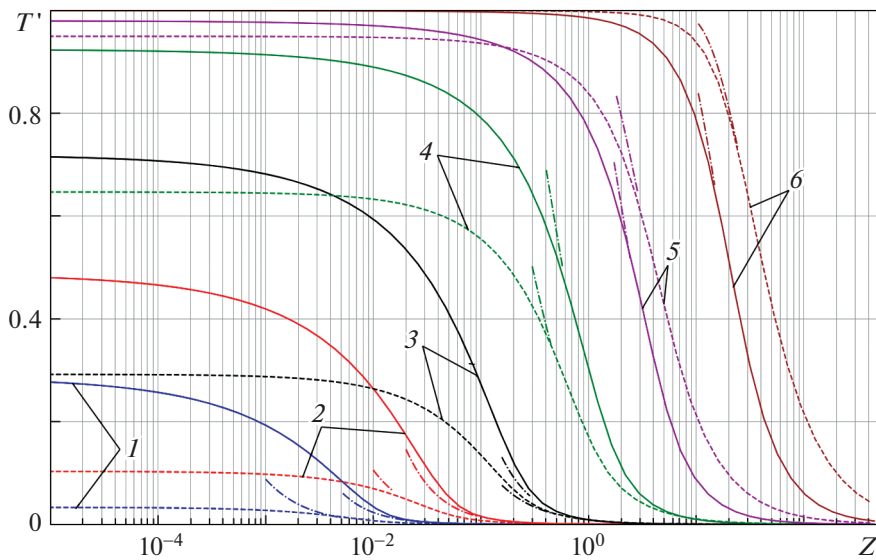


Рис. 2. Зависимость безразмерной температуры T' от безразмерной координаты z в логарифмическом масштабе: I, II как на рис. 1; III – асимптотические решения при $\tau < \infty, z \rightarrow +\infty$; 1–6 – $\tau = 2.5 \times 10^{-5}; 4.5 \times 10^{-4}, 8.5 \times 10^{-3}, 2.5 \times 10^{-1}, 2.8, 60$.

шения серии и получения решения являлись сходимость по расчетной сетке и неизменность сеточного решения при увеличении области (при крайне левой границе $y = -50$ или $z = 2^{-22}$).

На рис. 1 приведены зависимости безразмерной температуры T' от τ в логарифмическом и обычном масштабах координат в некоторых сечениях $z = 0-5$. При этом расчетные кривые при данных z выходят на свои значения, близкие к равновесным, уже при $\tau \approx 3-5$, а при $z = 0$ и небольших $T'(\tau, 0)$ хорошо согласуются со своими асимптотами $T' = A\tau^m$ с коэффициентами $A = 5$ при $n = 1/2$, $A = 10$ при $n = 1/5$, что подтверждает правильность асимптотики (2.5).

На рис. 2, 3 приведены аналогичные зависимости безразмерной температуры T' от координаты z (в логарифмическом и обыкновенном масштабе соответственно), а также асимптотические

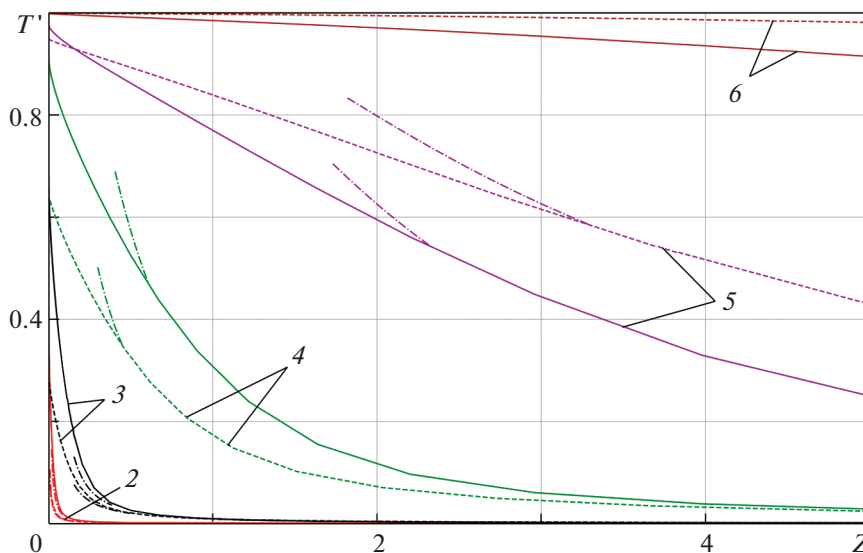


Рис. 3. Зависимость безразмерной температуры T' от безразмерной координаты z ; I, II как на рис. 1; III – асимптотические решения при $\tau < \infty$, $z \rightarrow +\infty$; 2–5 $\tau = 4.5 \times 10^{-4}$, 8.5×10^{-3} , 2.5×10^{-1} , 2.8, 60.

кривые (2.3) при фиксированных значениях $\tau \approx 10^{-5} - 60$. При больших $\eta = \tau/z^k \geq 0.5$ расчетные кривые хорошо соответствуют своим асимптотам, которые, как видно, при $\tau \geq 3$ вообще служат вполне приемлемой аппроксимацией точных кривых вплоть до предельных величин $T \approx 1$. В глобальном масштабе задачи ($\tau, z \sim 1-10$) вся “переходная” область в окрестности острия клина на рис. 3 стягивается в точку.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача о нагреве острого клина, внезапно погруженного в высокотемпературный сверхзвуковой поток, при ламинарном и турбулентном законах теплообмена. Исследована асимптотика решения в окрестности особой точки на острие клина, температура в которой, однако, растет непрерывным по времени образом. Интенсивность оттока тепла за счет теплопроводности от носка клина сравнима с внешним притоком тепла, который в то же время является основным фактором роста температуры в дальней периферии клина. Исходное сингулярное уравнение теплопроводности преобразовано к виду, пригодному для численного его решения, результаты которого согласуются с полученной асимптотикой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. 6-е изд., испр. и доп. М.: Изд-во МГУ, 1999. 799 с.
2. Землянский Б.А., Лунев В.В., Власов В.И., Горшков А.Б., Залогин Г.Н., Ковалев Р.В., Маринин В.П., Мурзинов И.Н. Конвективный теплообмен летательных аппаратов. М.: Физматлит, 2014. 380 с.