

УДК 533.9:537.3:541.135

ОБРАЗОВАНИЕ И ОТРЫВ ВИХРЕЙ ОТ ПОВЕРХНОСТИ ЗАРЯЖЕННОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МИКРОЧАСТИЦЫ В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

© 2021 г. Е. А. Франц^а, Д. А. Артюхов^а, Т. С. Киреева^а, Г. С. Ганченко^а, Е. А. Демехин^{а,*}

^а Краснодарский филиал финансового университета,
лаборатория электро- и гидродинамики микро- и наномасштабов, Краснодар, Россия

*E-mail: eafrants@fa.ru

Поступила в редакцию 06.04.2020 г.

После доработки 21.06.2020 г.

Принята к публикации 21.06.2020 г.

Впервые на основе численного решения системы Нернста–Планка–Пуассона–Стокса в широком диапазоне параметров исследовано движение заряженной диэлектрической микрочастицы в электрическом поле. Наиболее важным результатом является обнаружение формирования на задней стороне частицы микровихрей, которые при увеличении электрического поля теряют стационарность, периодически отрываясь от поверхности; при дальнейшем увеличении поля отрыв приобретает хаотический характер. Явление сильно напоминает образование цепочки Кармана, но в силу практически нулевых чисел Рейнольдса для микро-нанотечений имеет другой физический механизм. В работе даются асимптотический анализ и теоретическое обоснование механизма образования и отрыва микровихрей для малых чисел Дебая.

Ключевые слова: электрофорез, диэлектрическая частица, система Нернста–Планка–Пуассона–Стокса, сильное электрическое поле, неравновесные процессы

DOI: 10.31857/S0568528121010047

Электрофорез представляет собой фундаментальную проблему теоретической физики, теоретическое изучение которой берет начало более ста лет назад, с классической работы Смолуховского [1] для диэлектрических частиц. Практический интерес к задаче резко возрос в последние двадцать лет в связи с задачами управления заряженными частицами в микрофлюидных устройствах, задачами медицинской диагностики, изучением движения и разделения различных ДНК и белков по их свойствам [2, 3]. Помимо названных приложений, в микрофлюидике важную роль играет возможность перемешивания жидкости путем создания микровихрей, в частности, для снятия тепловых напряжений. Поведение частицы, ее поля скоростей, потенциала и плотности ионов критически зависят от типа поверхности: ионоселективный, металлический, диэлектрический или более сложный тип (частицы Янусы с неоднородностью их поверхностных или объемных свойств [4], белки, ДНК и т.д.). Настоящая работа полностью сконцентрирована на частицах с диэлектрическими поверхностями.

Линейная теория Смолуховского перестает работать для сильных электрических полей, когда становятся важны нелинейные эффекты. Теоретическое описание некоторых таких эффектов появились недавно [5–7], причем по большей части были предложены только асимптотические методы для некоторых частных случаев. Численный же анализ ограничен малыми и умеренными напряженностями электрического поля. Среди экспериментальных работ упомянем только наиболее свежую [8], которая содержит ссылки на другие более ранние экспериментальные работы. Основное внимание, как в экспериментальных, так и в теоретических работах, уделено зависимости скорости микрочастицы от напряженности внешнего электрического поля, числа Дебая и плотности заряда на поверхности частицы. Сравнение теории и эксперимента для скорости электрофореза дано только в [8], причем сравнение ограничено наноразмерами частицы.

Для приложений микрофлюидики, кроме скорости электрофореза, важно знать распределение скорости жидкости, электрического потенциала и концентрации ионов вблизи поверхности частицы, однако, экспериментальные методы плохо приспособлены для измерения деталей по-

лей неизвестных. Для этих целей идеально подходит прямое численное моделирование, проведенное в данной работе в широком диапазоне параметров, от нано- до микро размеров.

Наиболее важным полученным результатом является обнаружение формирования на задней стороне частицы микровихрей, которые при увеличении электрического поля теряют стационарность, периодически отрываясь от поверхности; при дальнейшем увеличении напряженности поля отрыв приобретает хаотический характер. Явление сильно напоминает образование вихря Кармана, но в силу приближения ползущего течения имеет другой физический механизм. Экспериментально известно [9] и подтверждено расчетами [10, 11], что стационарные микровихри образуются вблизи ионоселективной частицы (частицы, поверхность которой пропускает ионы только одного знака) около точки поверхности, где поток ионов меняет знак. В случае диэлектрической частицы поток ионов через ее поверхность отсутствует, но тем не менее микровихри образуются. Для объяснения физического механизма образования и отрыва микровихрей проводится асимптотический анализ для малых чисел Дебая.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается движение сферической микрочастицы диэлектрика с радиусом \tilde{a} , находящейся в растворе электролита, под действием внешнего электрического поля напряженности \tilde{E}_∞ .

В задачах электрокинетики наиболее распространены два подхода к описанию поведения заряда в жидкостях. Первый из них предполагает, что жидкость является диэлектрической, а заряд в ней образуется в результате инжекции из электродов [12]. В этом случае заряд может распространяться в объеме жидкости и приводить к электрогидродинамическим эффектам. Второй подход, основанный на принципах электрокинетики, предполагает, что жидкость является электролитом, и заряд образуется за счет разности концентрации ионов растворенных в жидкости солей. В данной работе будет использован второй подход, так как он в большей степени соответствует задачам микрогидродинамики.

В качестве буферного электролита рассматривается бинарный одновалентный раствор электролита. Коэффициенты диффузии катионов и анионов предполагаются равными, т.е. $\tilde{D}^+ = \tilde{D}^- = \tilde{D}$. Поведение электролита описывается системой уравнений Нернста–Планка, относительно концентраций ионов \tilde{c}^\pm . Система дополняется уравнениями Пуассона относительно электрического потенциала $\tilde{\Phi}$ и Навье–Стокса относительно поля скоростей $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{U}, \tilde{V})$. В силу малости масштаба и, как следствие, малости числа Рейнольдса, для описания движения жидкости используется приближение Стокса для ползущего течения. Электрическое поле внутри микрочастицы описывается уравнением Лапласа для потенциала $\tilde{\phi}$; на поверхности частицы предполагается существование поверхностного заряда, плотность которого $\tilde{\sigma}$ однородна по всей поверхности.

Постановка задачи проводится в сферической системе координат, движущейся со скоростью частицы, в центре которой находится точка отсчета (см. рис. 1).

Для перехода к безразмерной постановке были использованы следующие характерные величины: радиус микрочастицы \tilde{a} , термический потенциал $\tilde{\Phi}_0 = \tilde{R}\tilde{T}/\tilde{F}$, равновесная концентрация электролита \tilde{c}_∞ , динамическая вязкость жидкости $\tilde{\mu}$ и коэффициент диффузии ионов \tilde{D} . Здесь \tilde{R} – универсальная газовая постоянная, \tilde{T} – абсолютная температура, \tilde{F} – постоянная Фарадея.

Система описывается следующими безразмерными параметрами: напряженность электрического поля $E_\infty = \tilde{a}\tilde{E}_\infty/\tilde{\Phi}_0$; число Дебая $\nu = \tilde{\lambda}_D/\tilde{a}$, где $\tilde{\lambda}_D^2 = \tilde{\epsilon}\tilde{R}\tilde{T}/\tilde{F}^2\tilde{c}_\infty$ – толщина двойного электрического слоя; коэффициент сцепления между гидродинамической и электростатической частями задачи $\kappa = \tilde{\epsilon}\tilde{\Phi}_0/\tilde{\mu}\tilde{D}$, и отношение диэлектрических проницаемостей $\delta = \tilde{\epsilon}_d/\tilde{\epsilon}$, где $\tilde{\epsilon}_d$ и $\tilde{\epsilon}$ – соответственно, диэлектрические проницаемости материала микрочастицы и жидкой среды.

Безразмерная система уравнений в электролите имеет вид:

$$\frac{\partial c^\pm}{\partial t} + \mathbf{U} \times \nabla c^\pm = \pm \nabla \times (c^\pm \nabla \Phi) + \nabla^2 c^\pm, \quad \nu^2 \nabla^2 \Phi = c^- - c^+ \quad (1.1)$$

$$-\nabla P + \nabla^2 \mathbf{U} = \frac{\kappa}{\nu^2} (c^+ - c^-) \nabla \Phi, \quad \nabla \times \mathbf{U} = 0 \quad (1.2)$$

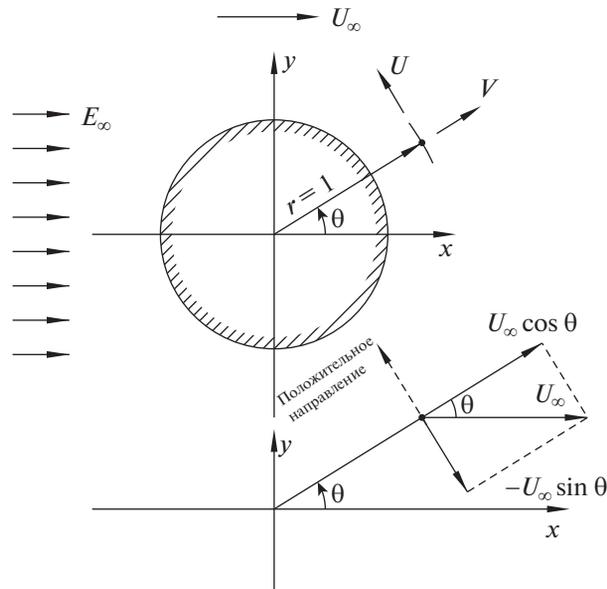


Рис. 1. Схема течения в системе координат микрочастицы.

Электрический потенциал φ в микрочастице описывается уравнением Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.3)$$

При пересечении поверхности частицы электрический потенциал предполагается непрерывным, в то время как его нормальная к поверхности производная испытывает скачок, обусловленный поверхностным зарядом σ ; на поверхности частицы поток положительных и отрицательных ионов равен нулю, а компоненты скорости удовлетворяют условиям непроницаемости и непроскальзывания:

$$r = 1: \quad \Phi = \varphi, \quad v \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \delta v \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \sigma, \quad \pm c^\pm \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial c^\pm}{\partial r} = 0, \quad U = V = 0 \quad (1.4)$$

Вдали от микрочастицы, при $r \rightarrow \infty$, концентрация ионов стремится к равновесной, напряженность электрического поля – к внешнему наложенному полю, а скорость жидкости – к скорости частицы:

$$r \rightarrow \infty: \quad c^\pm \rightarrow 1; \quad \Phi \rightarrow -E_\infty r \cos \theta; \quad U \rightarrow -U_\infty \sin \theta; \quad V \rightarrow -U_\infty \cos \theta \quad (1.5)$$

На потенциал внутри микрочастицы φ должно быть наложено условие отсутствия особенности при $r = 0$.

Для замыкания задача дополняется начальными условиями для концентраций c^\pm ; в начальный момент времени концентрации однородно распределены по пространству:

$$t = 0: \quad c^\pm = 1 \quad (1.6)$$

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

В проведенном численном моделировании задачи значение параметров κ и δ фиксировалось для водного раствора NaCl и стеклянной диэлектрической микрочастицы, для которых $\kappa = 0.26$ и $\delta = 0.1$. Расчеты проводились для нескольких значений параметра ν , однако в силу того, что результаты не имеют принципиального отличия, в данной работе приводятся результаты только для $\nu = 0.0086$, что соответствует размерному радиусу частицы 5 мкм. Отдельно были проведены расчеты при $\delta = 0$, показавшие малое отличие от расчетов при $\delta = 0.1$, порядка 3–5%. Это соответствует результатам Ярива [6, 7], полученным аналитически для умеренных значений напряженности внешнего поля E_∞ .

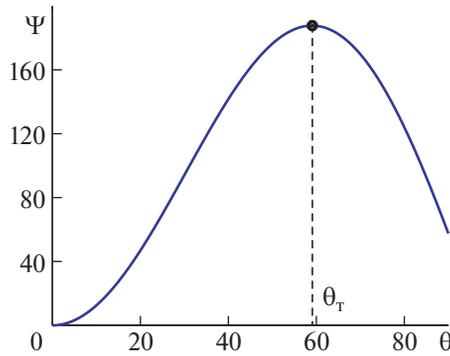


Рис. 2. Максимум функции тока Ψ вдоль радиуса от угла θ для $E_\infty = 400$, $\nu = 0.0086$ и $\sigma = 20$. Значение r согласно с рис. 3.

Для решения нестационарной задачи (1.1)–(1.6) использовался метод прямого численного моделирования, основанный на конечно-разностном подходе, адаптированный из работы [13]. Интегрирование по времени производится полунявным методом Рунге–Кутты третьего порядка точности. Установившиеся решения были найдены при $t \rightarrow \infty$. Для проведения массовых расчетов и обнаружения новых феноменов задача распараллеливалась на суперкомпьютере “Ломоносов”.

Для наночастиц, $\nu = O(1)$, решения быстро выходили на стационарный режим, $\partial/\partial t = 0$, и хорошо совпадали с полученными в [5–7]. Наиболее интересные результаты были получены для микрочастиц, при малых числах Дебая $\nu \ll 1$ и больших напряженностях поля E_∞ . При некотором критическом значении E_∞^* на задней стороне частицы возникала система стационарных тороидальных микровихрей. Удобно характеризовать каждый вихрь углом $a = \theta_T$, при котором $\partial\Psi/\partial\theta = 0$ (см. рис. 2). Типичное распространение микровихрей в системе координат неподвижного наблюдателя изображено на рис. 3.

Из рис. 3, где приведены последовательные кадры распространения вихря, видно, что вихрь зарождается на экваторе при $\theta_T = 90^\circ$. При отходе от поверхности частицы вихри вытягиваются вдоль течения и заканчиваются при предельном значении угла $\theta_T^\infty \approx 60^\circ$, когда вихрь схлопывается в точку. Для всех наших расчетов угол θ_T^∞ менялся слабо и находился в диапазоне $\theta_T^\infty \approx 50\text{--}60^\circ$.

При дальнейшем увеличении E_∞ микровихрь теряет стационарность и происходит его периодический отрыв от поверхности и унос вместе с потоком (см. рис. 3). При достаточно большом E_∞ отрыв приобретает хаотический характер. Явление сильно напоминает образование цепочки Кармана, но в силу приближения ползущего течения имеет другой физический механизм.

Около ионоселективной частицы стационарный микровихрь был обнаружен ранее, причем сначала экспериментально [9], а затем численно [10, 11]. Существование этого вихря, называемого вихрем Духина-Мишук, обычно связывают с неравновесностью процессов около ионоселективной поверхности. Вихрь возникает вблизи точки поверхности, где поток ионов меняет знак. Диэлектрическая же поверхность является непроницаемой для обоих типов ионов и процессы около диэлектрической частицы носят равновесный характер. Следовательно, должен быть какой-то другой физический механизм, ответственный за возникновение микровихря около диэлектрической частицы.

Чтобы понять результаты численного моделирования, рассмотрим аналитическое решение полной задачи при $\nu \rightarrow 0$. Оно распадается на решение для внутреннего разложения по ν при $r - 1 = O(\nu)$ и для внешнего разложения при $r - 1 = O(1)$. При $(r - 1)/\nu \rightarrow \infty$ и $r - 1 \rightarrow 0$ производится сращивание двух разложений [14].

В задачах электростатики обычно предполагается, что плотность заряда $\rho = c^+ - c^-$ является ненулевой только вблизи поверхности, на расстоянии порядка числа Дебая, $O(\nu)$, т.е. для внут-

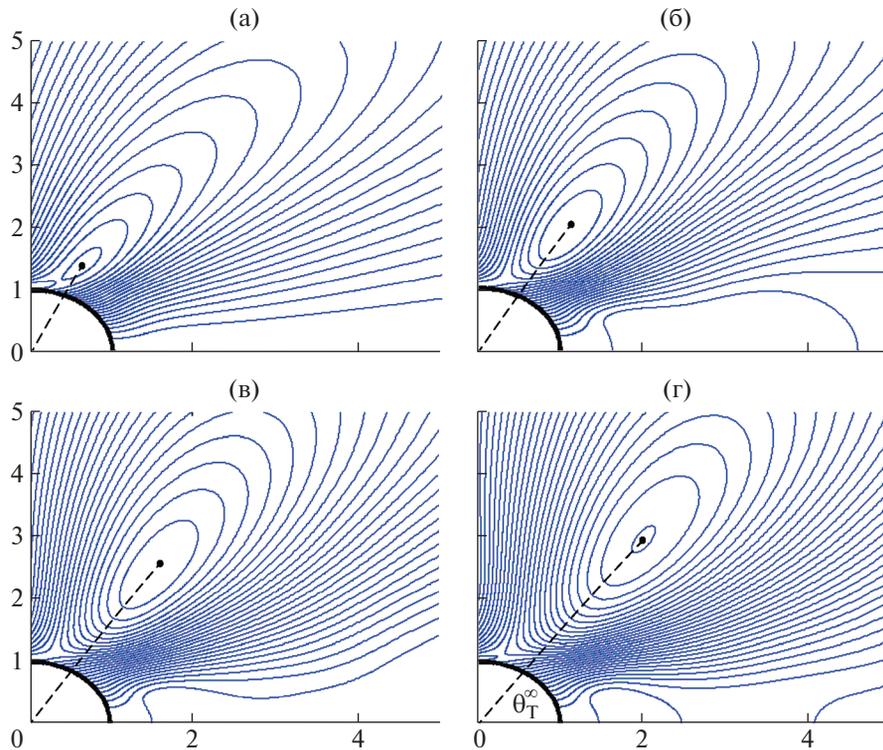


Рис. 3. Распространение нестационарного отрывающегося вихря: $E_\infty = 320$, $\nu = 0.0086$, $\sigma = 5$; моменты времени $t = t_1$ (а), t_2 (б), t_3 (в), t_4 (г); $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$.

ренного решения, а для внешнего решения раствор является электронейтральным (см., например, [15]), в результате:

$$\rho \neq 0: \quad \frac{r-1}{\nu} = O(1); \quad \rho = 0: \quad r-1 = O(1) \quad (2.1)$$

Из внутреннего разложения для $(r-1)/\nu \rightarrow \infty$ находится скорость скольжения $U_m(\theta)$; нормальная компонента скорости V_m равна нулю.

Для внешнего разложения, вдали от поверхности, правая часть уравнений Стокса, обусловленная силами Кулона, обращается в ноль. Жидкость приводится в движение не массовыми силами, а поверхностными, за счет скорости скольжения, которая дает эффективное гидродинамическое краевое условие при $r = 1$. Именно это предположение делается в работах группы Ярива [5–7].

Исключив давление из системы (1.2) перекрестным дифференцированием и введением функции тока, Ψ в осесимметричной постановке в координатах r и θ определяется из соотношения:

$$U = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad V = \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (2.2)$$

Уравнения системы (1.2) для электронейтрального внешнего решения перейдут в однородное бигармоническое уравнение относительно функции тока Ψ с эффективными краевыми условиями для внешнего решения:

$$r = 1: \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\sin \theta \times U_m(\theta)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Psi \rightarrow \frac{r^2}{2 \sin^2 \theta} U_\infty, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} \rightarrow r U_\infty \sin^2 \theta$$

Из однородного уравнения Стокса в сферической системе координат со скоростью скольжения $U_m(\theta)$ и скоростью U_∞ на бесконечности функцию тока Ψ можно представить как линейную

комбинацию решения с нулевой скоростью скольжения и решения с нулевой скоростью на бесконечности:

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 \quad (2.3)$$

В системе координат частицы решение имеет вид:

$$\Psi_0 = U_\infty \left(\frac{3}{2}r - \frac{1}{2r} \right) Q_1(\cos \theta) \quad (2.4)$$

$$\Psi_1 = \sum_{i=1}^{\infty} C_i Q_i(\cos \theta) (r^{2-i} - r^{-i}) \quad (2.5)$$

где Q_i – полином Гегенбауэра [16], а C_i – коэффициенты разложения скорости скольжения U_m по полиномам Гегенбауэра:

$$C_i = -\frac{i(i+1)(2i+1)}{4} \int_0^\pi U_m(\theta) Q_i(\cos \theta) d\theta \quad (2.6)$$

Согласно теореме Г. Лиля (см. [17], соотношение 4-180): для того, чтобы выполнялся баланс сил, действующих на сферическую частицу в бесконечном объеме жидкости в отсутствие объемных сил, необходимо, чтобы функция тока была ортогональна первому полиному Гегенбауэра $Q_1 = \cos \theta$. В нашем случае это условие означает, что

$$C_1 = -\frac{3}{2} U_\infty \quad (2.7)$$

Используя это выражение, можно переписать формулу для функции тока в виде:

$$\Psi = \frac{U_\infty}{r} Q_1(\cos \theta) + C_2 \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) Q_2(\cos \theta) + \sum_{i=3}^{\infty} C_i Q_i(\cos \theta) (r^{2-i} - r^{-i}) \quad (2.8)$$

Кривая $\theta_T = \theta_T(r)$ – это кривая, на которой расположены центры вихря в сечении по углу θ , которую можно посчитать как экстремум функции тока по углу:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}(\theta_T) = 0 \quad (2.9)$$

На самой частице $r = 1$, из (2.8) этот угол равен $\pi/2$, как корень первого полинома Лежандра:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \theta} = -\sin \theta P_1'(\cos \theta) = -\sin \theta \cos \theta \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \theta} = -\sin \theta P_2'(\cos \theta) = -\frac{\sin \theta}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (2.11)$$

В результате $\theta_T^\infty \approx 54.7^\circ$. Причем значение этого угла не зависит ни от скорости скольжения U_m , ни от U_∞ . Эти величины влияют только на скорость перехода θ_T от 90° на частице до 54.7° на бесконечности. Причем численная картина показывает, что выход на угол 54.7° происходит достаточно быстро. В этом случае при численном моделировании в полной постановке как раз в области 54.7° наблюдается отрыв зоны пространственного заряда, вызванный, по всей видимости, именно конвективным влиянием вихря Духина. В пользу этой гипотезы также говорит тот факт, что угол отрыва практически не зависит от параметров.

Оба угла $\theta_T|_{r=1}$ и $\theta_T|_{r=\infty}$ хорошо коррелируют с полученными в численном эксперименте.

Таким образом, существование стационарного вихря физически объясняется неравномерностью распределения заряда, а следовательно, и силы Кулона вблизи поверхности частицы. Возникает вопрос, почему при достаточно большой напряженности поля микровихри начинают отрываться от поверхности частицы?

Одним из оснований для вышеприведенного асимптотического анализа является допущение о балансе сил во внешнем решении, что обуславливает применение теоремы Г. Лиля [17]. Фактически предполагается, что для внешнего течения правая часть уравнений Стокса, обусловленная силами Кулона, обращается в ноль. Однако, как показывают численные расчеты, такое предположение верно только для достаточно малых напряженностей поля E_∞ . При достаточно

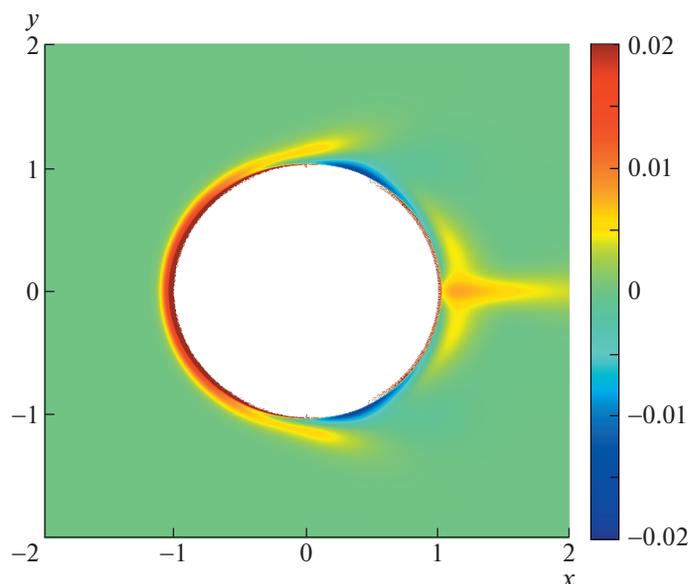


Рис. 4. Распределение плотности заряда $\rho = c^+ - c^-$ около микрочастицы, $E_\infty = 400$, $\nu = 0.0086$, $\sigma = 20$.

больших E_∞ происходит интересное явление: заряд начинает увлекаться потоком жидкости и выходит во внешнее решение. Одно из следствий: невыполнение баланса сил, приводящая к отрыву вихря. Типичное распределение заряда для этого случая приведено на рис. 4: отделение заряда происходит как на экваторе $\theta = 90^\circ$, так и на полюсе $\theta = 0^\circ$ частицы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью прямого численного моделирования системы было обнаружено формирование вихря Духина для диэлектрической частицы. Было показано наличие как стационарных, так и неустойчивых и нестационарных вихрей. При малых закритичностях вихри отрываются строго периодически. При увеличении напряженности электрического поля отрыв вихрей становится хаотичным, что напоминает известную картину дорожки фон Кармана. В отличие от дорожки фон Кармана, где механизмом образования вихрей служит инерция, в нашей задаче инерционные силы пренебрежимо малы, и механизмом возникновения вихрей Духина служит сила Кулона.

Авторы приносят глубокую благодарность проф. МГУ имени М.В. Ломоносова В.А. Полянскому за замечания к постановке задачи, обсуждение и анализ результатов расчетов и указание на некоторые важные работы, выпавшие из поля внимания авторов, что в конечном итоге способствовало существенному улучшению качества статьи. Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края в рамках научного проекта № 19-48-235001.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smoluchowski M.* Contribution to the theory of electro-osmosis and related phenomena // *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie* 1903. V. 184. P. 199.
2. *Napoli M., Eijkel J.C.T., Pennathur S.* Nanofluidic technology for biomolecule applications // *Lab. Chip*. 2010. V. 10. P. 957.
3. *Chang H.-C., Yossifon G., Demekhin E.A.* Nanoscale electrokinetics and microvortices // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2012. V. 44. P. 401.
4. *Granick S., Jiang S.* Janus particle synthesis, self-assembly and applications. The Royal Society of Chemistry, 2012. 292 p.

5. *Schnitzer O., Yariv E.* Macroscale description of electrokinetic flows at large zeta potentials: Nonlinear surface conduction // *Phys. Rev. E.* 2012. V. 86. № 2. P. 021503.
6. *Schnitzer O., Zeyde R., Yavneh I., Yariv E.* Weakly nonlinear electrophoresis of a highly charged colloidal particle // *Physics of Fluids.* 2013. V. 25. № 5. P. 052004.
7. *Schnitzer O., Yariv E.* Nonlinear electrophoresis at arbitrary field strengths: small-Dukhin-number analysis // *Physics of Fluids.* 2014. V. 26. № 12. P. 122002.
8. *Tottori S., Misiunas K., Keyser U.F.* Nonlinear Electrophoresis of Highly Charged Nonpolarizable Particles // *Physical Review Letters.* 2019. V. 123. № 1. P. 014502.
9. *Mishchuk N.A., Takhistov P.V.* Electroosmosis of the second kind // *Colloids and Surfaces A.* 1995. V. 95. P. 119.
10. *Ben Y., Demekhin E.A., Chang H.-C.* Nonlinear electrokinetics and “superfast” electrophoresis // *J. Colloid Interface Sci.* 2004. V. 276. P. 483.
11. *Ganchenko G., Frants E., Shelistov V., Nikitin N., Amiroudine S., Demekhin E.* Extreme nonequilibrium electrophoresis of an ion-selective microgranule // *Physical Review Fluids.* 2019. V. 4. № 4. P. 043703.
12. *Vázquez P.A., Pérez A.T., Castellanos A., Atten P.* Dynamics of electrohydrodynamic laminar plumes: Scaling analysis and integral model // *Phys Fluids.* 2000. V. 12. № 11. P. 2809.
13. *Nikitin N.V.* Third-order-accurate semi-implicit Runge-Kutta scheme for incompressible Navier–Stokes equations // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 2006. V. 51. P. 221–233.
14. *Van Dyke M.* *Perturbation Methods in Fluid Mechanics.* New York: Academic press, 1964.
15. *Probstein R.F.* *Physicochemical Hydrodynamics. An Introduction.* New York: Wiley-Interscience, 2005.
16. *Суетин П.К.* *Классические ортогональные многочлены.* Физматлит, 2007.
17. *Gary Leal L.* *Laminar Flow and Convective Transport Processes: Scaling Principles and Asymptotic Analysis.* Butterworth-Heinemann, 1992.