

УДК 533.95:534.13

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В РЯДАХ ПО ЛАГРАНЖЕВОЙ КООРДИНАТЕ И ИХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

© 2020 г. Д. В. Украинский*

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: d.v.ukrainskiy@gmail.com

Поступила в редакцию 07.05.2020 г.

После доработки 18.06.2020 г.

Принята к публикации 18.06.2020 г.

Для уравнений одномерной нестационарной газовой динамики с плоскими волнами построен подход к нахождению точных аналитических решений задач о движении газа в трубе с поршнем в виде степенных рядов по специальной лагранжевой координате, например, начальному положению частиц или переменной энтропии. Все зависящие от времени коэффициенты рядов находятся последовательно из рекуррентных соотношений по двум заданным граничным условиям — закону движения поршня и температуре на поршне. Задаваемые величины допускается выбрать таким образом, чтобы удовлетворить нужным начальным данным. Для точного вычисления членов рядов используются математические пакеты, в функционал которых входят символьные преобразования. Обсуждается возможность достижения сходимости построенных решений. Приводятся примеры физических задач, решаемых в рамках изложенного подхода.

Ключевые слова: газовая динамика, нелинейные уравнения, точные решения в рядах, неортогональные системы функций

DOI: 10.31857/S0568528120060122

Настоящая работа — продолжение тематики исследований [1] по построению решений уравнений газовой динамики с помощью специальных степенных рядов и представляет собой переход от разложений по функциям времени к разложениям по лагранжевым координатам. Предлагаемый подход развивается применительно к задачам об одномерном нестационарном адиабатическом движении совершенного идеального газа в трубе с поршнем при неоднородных начальных условиях. В рамках построенной теории решение данных задач определяется выбранной для разложения функцией, например, связанной с распределением начальных координат частиц или энтропии, а также законом движения поршня и температурой на поршне. Подход позволяет получить новые аналитические решения физических задач, в частности, с периодическими колебаниями поршня при неоднородной начальной плотности, распространением возмущений от колебаний или роста температуры на неподвижном поршне и движением поршня с торможением при наличии гравитации.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВРЕМЕНИ И ЛАГРАНЖЕВОЙ КООРДИНАТЫ

Естественный вид независимых переменных, присущих системе уравнений в частных производных, можно получить при построении решений с разделением этих переменных. Для одномерной нестационарной газовой динамики с плоскими волнами использование массовой координаты m позволяет записать уравнения в наиболее простой форме

$$x_{tt} + p_m = 0 \quad (1.1)$$

$$p(x_m)^{\gamma} = \sigma(m) \quad (1.2)$$

приводящей к разделению переменных специального вида [2]

$$x = a(t)b(m), \quad p = q(m)/a^{\gamma}(t)$$

где $x = x(m, t)$ – закон движения, t – время, $p = p(m, t)$ – давление, γ – показатель адиабаты, $\sigma(m)$ – энтропийная функция.

Уравнение движения (1.1) дает уравнение для определения $a(t)$

$$\ddot{a} = -Ca^{-\gamma} \quad (1.3)$$

откуда

$$\frac{\dot{a}^2}{2} = \frac{Ca^{-(\gamma-1)}}{\gamma-1} + E \quad (1.4)$$

а также связь между $q(m)$ и $b(m)$

$$q' = Cb$$

которую можно записать в виде

$$b' = Cb \left(\frac{dq(b)}{db} \right)^{-1} \quad (1.5)$$

Здесь C – постоянная разделения переменных, E – постоянная интегрирования. Для функций одной переменной используются обозначения производных: точка – по времени, штрих – по массе.

Закон сохранения (1.2) содержит произвольную функцию σ , за счет которой функцию q можно также считать произвольной.

Выражение \ddot{a} и \dot{a} через a с помощью формул (1.3) и (1.4), а также b' через b с помощью формулы (1.5) свидетельствует о том, что для газовой динамики естественными переменными служат именно a и b , т.е. преобразования от времени и массовой лагранжевой координаты. Это позволяет перейти к уравнениям с коэффициентами, зависящими от a и b . О соответствующей замене временной переменной $a(t)$ опубликована статья [1]. Настоящее исследование, в свою очередь, посвящается замене лагранжевой координаты.

Классический пример решения с разделением переменных в газовой динамике – решение задачи Лагранжа о движении поршня в трубе [3, задача 25.33]

$$x = \frac{a(t)m}{\rho_0}, \quad p = \frac{2\rho_0 p_0 + Cm^2}{2\rho_0 a^\gamma(t)} \quad (1.6)$$

Здесь ρ_0 и p_0 – постоянные, а функция $a(t)$ удовлетворяет уравнению (1.4) при условии $a(0) = 1$.

Данное решение можно обобщить, если перейти от переменной m к ее преобразованию $b(m)$. В переменных a и b уравнение (1.1) переписывается в виде

$$2 \left(\frac{C}{(\gamma-1)a^{\gamma-1}} + E \right) x_{aa} - \frac{C}{a^\gamma} x_a + f(b)p_b = 0 \quad (1.7)$$

где $f(b) = b'$.

Обобщенное решение будет иметь вид

$$x = ab, \quad p = q(b)/a^\gamma$$

При этом уравнение (1.7) устанавливает связь между функциями $f(b)$ и $q(b)$

$$f(b)q'(b) = Cb$$

Таким образом, можно по заданному $f(b)$, равному ρ^{-1} при $t = 0$, где ρ – плотность, найти $q(b)$ или по нужному виду зависимости $q(b) = f(b)$, т.е. конкретизировать замену $b(m)$ с точностью до произвольной постоянной.

2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Дифференцируя по времени уравнение (1.2) и вводя учет массовых сил $g(m)$, уравнения газовой динамики переписываются в квадратично-нелинейном виде

$$x_{tt} + p_m = g(m) \quad (2.1)$$

$$x_m p_t + \gamma p x_{mt} = 0 \tag{2.2}$$

Например, в теории гравитации $g(m) = -g_0 - Gm$, где $-g_0$ – внешнее гравитационное поле, а G – гравитационная постоянная. В дальнейшем предполагается, что в точке $m = 0$ находится поршень.

В уравнениях (2.1), (2.2) можно совершить замену переменной $b = b(m)$. В этом случае система приводится к виду

$$x_{tt} + f(b)p_b = g(b) \tag{2.3}$$

$$x_b p_t + \gamma p x_{bt} = 0 \tag{2.4}$$

где $f(b) = b'$. Важно, что функция $f(b)$ входит в уравнение (2.3) в виде переменного коэффициента, в то время как функция $g(b)$ – в виде неоднородности. Пусть $b(0) = 0$.

Преобразование массовой переменной в законе сохранения (1.2) в свою очередь дает

$$p(f(b)x_b)' = \sigma(b) \tag{2.5}$$

Решение уравнений ищется в виде ряда Тейлора по b в окрестности нуля

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)b^n \tag{2.6}$$

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t)b^n \tag{2.7}$$

Таким образом, функции $A_0(t) = x(0,t)$ и $B_0(t) = p(0,t)$ обладают следующим механическим смыслом: вводят закон движения поршня и давление на поршне соответственно.

Рекуррентные формулы при одинаковых степенях b , следующие из подстановки (2.6) и (2.7) в уравнение (2.3), зависят от разложений функций $f(b)$ и $g(b)$ в степенной ряд

$$f(b) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n b^n$$

$$g(b) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n b^n$$

и имеют вид

$$B_1(t) = \frac{D_0 - \ddot{A}_0(t)}{C_0}, \quad B_n(t) = \frac{D_{n-1} - \ddot{A}_{n-1}(t) - \sum_{k=1}^{n-1} k C_{n-k} B_k(t)}{n C_0} \tag{2.8}$$

где $n = 2, 3, \dots$ Важно заметить, что $C_0 = f'(0) \neq 0$, поскольку иначе $b(m) \equiv 0$. Формула (2.8) помогает находить неизвестные $B_n(t)$ по известным величинам с прошлых шагов.

Рекуррентные формулы для нахождения неизвестных $A_n(t)$ можно вывести, воспользовавшись законом сохранения (2.5). При этом коэффициенты находятся из алгебраических соотношений, получающихся с помощью вычисления n -й производной по b от левой и правой частей (2.5) в точке $b = 0$ с использованием формул Лейбница и Фaa-ди-Бруно [4]. Как и в [1] – все члены рядов вычисляются поочередно без необходимости решать дифференциальные уравнения и интегрировать. Для конкретизации итогового решения необходимо задать степенной ряд для энтропийной функции, а также задать $A_0(t)$ и $B_0(t)$.

Однако в таком случае общие формулы получаются достаточно громоздкими и удобнее вычислить неизвестные $A_n(t)$ на основе дифференциального следствия закона сохранения. При подстановке (2.6) и (2.7) в уравнение (2.4) рекуррентные соотношения представляются в виде дифференциальных уравнений

$$\dot{A}_1(t) + \frac{\dot{B}_0(t)}{\gamma B_0(t)} A_1(t) = 0$$

$$\dot{A}_n(t) + \frac{\dot{B}_0(t)}{\gamma B_0(t)} A_n(t) = - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \frac{A_k(t) \dot{B}_{n-k}(t) + \gamma B_{n-k}(t) \dot{A}_k(t)}{\gamma B_0(t)} \equiv -K_n(t) \quad (2.9)$$

где $n = 2, 3, \dots$ и давление на поршне предполагается отличным от нулевого.

Разрешая уравнения (2.9) относительно $A_n(t)$, получают следующие рекуррентные формулы ($K_1 = 0$):

$$A_n(t) = \frac{1}{B_0^{1/\gamma}(t)} \left(A_n(0) B_0^{1/\gamma}(0) - \int_0^t K_n(\tau) B_0^{1/\gamma}(\tau) d\tau \right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.10)$$

Согласно (2.8) и (2.10) все члены рядов также находятся последовательно по заданным функциям $A_0(t)$ и $B_0(t)$, только вместо задания степенного ряда для энтропийной функции нужно задать постоянные $A_n(0)$, которые фактически определяют начальное положение частиц (и начальное распределение плотности $\rho = 1/x_m$)

$$x(m, 0) = A_0(0) + A_1(0)b(m) + A_2(0)b^2(m) + \dots$$

В частности, если положить

$$A_0(0) = A_2(0) = \dots = A_n(0) = \dots = 0, \quad A_1(0) = 1$$

то $b(m) = x(m, 0)$ и решение ищется в виде разложения в степенной ряд по лагранжевой начальной координате частиц. Условие $x(0, 0) = A_0(0) = 0$ представляет собой выбор начала системы координат.

Важно отметить, что неизвестные коэффициенты рядов по заданным величинам можно находить точно с использованием математических пакетов, функционал которых позволяет проводить символьные преобразования.

Например, можно получить решение (1.6), если задать

$$A_0(t) = 0, \quad B_0(t) = \frac{p_0}{a^\gamma(t)}, \quad b(m) = x(m, 0) = \frac{m}{\rho_0}, \quad g(m) = 0$$

Существует также возможность найти необходимые $A_n(0)$ для получения нужной начальной плотности $\rho(m, 0)$ при заданном $b(m)$. В этом случае известно разложение

$$\rho^{-1}(b, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n b^n$$

Тогда в силу соотношения $\rho^{-1}(b, 0) = x_b(b, 0)f(b)$ последовательно находятся

$$A_1(0) = \frac{W_0}{C_0}, \quad A_n(0) = \frac{W_{n-1}}{nC_0} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \frac{C_{n-k}}{C_0} A_k(0), \quad n = 2, 3, \dots$$

С точки зрения физической реализации граничного условия для давления допускается задавать на поршне температуру, приводящую к нужной зависимости давления от времени. Связь между давлением и искомой температурой $T_p(t)$ определяется из уравнения состояния газа и условия адиабатичности и имеет вид

$$RT_p(t) = C_0 A_1(0) B_0^{1/\gamma}(0) B_0^{\gamma-1}(t)$$

где R — газовая постоянная. Важно заметить, что данная температура вычисляется на основе только известных на этапе постановки задачи величин.

Поскольку функции $A_0(t)$ и $B_0(t)$ задаются независимо друг от друга, существует возможность рассмотрения согласованного движения поршня с массой M_p и площадью поверхности S_p под действием давления газа и других внешних сил с равнодействующей F_p . В этом случае связь между функциями имеет вид второго закона Ньютона

$$M_p \ddot{A}_0(t) = -S_p B_0(t) + F_p$$

В силу условия $b(0) = 0$ найденные решения в виде степенных рядов всегда будут сходиться для достаточно малых m (а значит и достаточно малых b) при ограниченных коэффициентах. Следовательно, определяя при необходимости границы области рассмотрения движения (с точки зрения массовой переменной $m \in [0, M]$) путем, например, установки второго поршня, всегда можно добиться регулярного поведения рядов. Закон движения второго поршня в этом случае определяется функцией $x(M, t)$, точный вид которой, в общем, находится после вычисления всех неизвестных коэффициентов, т.е. после решения задачи. Рассматривая интересующий отрезок времени $t \in [0, t_0]$, величину M можно подбирать как функцию $M(t_0)$.

Существует также возможность рассмотреть задачу о нахождении необходимых функций $A_0(t)$ и $B_0(t)$ для получения заданных начальных условий $p(m, 0)$ и $x_i(m, 0)$, т.е. фактически для получения заданных $B_n(0)$ и $\dot{A}_n(0)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$

Для решения данной задачи будем искать $A_0(t)$ и $B_0(t)$ также в виде степенного ряда

$$A_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n t^n, \quad U_n = \frac{A_0^{(n)}(0)}{n!} \tag{2.11}$$

$$B_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n t^n, \quad V_n = \frac{B_0^{(n)}(0)}{n!} \tag{2.12}$$

При этом сразу получается, что $U_1 = \dot{A}_0(0)$ и $V_0 = B_0(0)$, т.е. эти коэффициенты зафиксированы изначально. Коэффициент $U_0 = A_0(0)$ отражает начальное положение поршня, которое, как отмечалось выше, может быть взято за точку отсчета оси Ox , тогда $U_0 = 0$. Для дальнейших выкладок важно заметить, что величина $A_1(0) = (\rho(0, 0)C_0)^{-1}$ подразумевается отличной от нуля.

При подстановке (2.11) и (2.12) в (2.8) и (2.10) находятся все остальные коэффициенты

$$V_1 = -\frac{\gamma V_0 \dot{A}_1(0)}{A_1(0)}, \quad U_2 = \frac{D_0 - C_0 B_1(0)}{2} \tag{2.13}$$

$$U_3 = \frac{C_0}{6A_1(0)} (2\gamma V_0 \dot{A}_2(0) + 2V_1 A_2(0) + \gamma B_1(0) \dot{A}_1(0)) \tag{2.14}$$

$$V_2 = \frac{\gamma V_0}{2A_1(0)} (2C_0 B_2(0) + C_1 B_1(0) - D_1) + \frac{1 + \gamma}{2\gamma V_0} V_1^2 \tag{2.15}$$

и так далее. С ростом номеров коэффициентов формулы становятся чрезмерно громоздкими за счет перекрестной рекуррентной природы. Однако указать алгоритм итеративного нахождения коэффициентов в общем виде и доказать (с помощью математической индукции) возможность их нахождения — несложно.

Пусть $n = 1, 2, \dots$ Прежде всего для удобства стоит связать коэффициенты U_{n+1} и V_n в смысловую пару, находящуюся на одной итерации. При нахождении очередной такой пары все предыдущие пары уже известны. При разворачивании рекуррентных выражений на каждом шаге до оператора, воздействующего на функции $A_0(t)$ и $B_0(t)$, становится видно, что получение очередных требуемых $\dot{A}_{2n-1}(0)$, $B_{2n-1}(0)$, $\dot{A}_{2n}(0)$, $B_{2n}(0)$ достигается именно за счет подбора нужных V_{2n-1} , U_{2n} , U_{2n+1} , V_{2n} соответственно. За счет свойств дифференцирования рекуррентные формулы устроены так, что подбор представляет собой решение линейного уравнения, у которого коэффициент при неизвестной отличен от нуля благодаря $A_1(0) \neq 0$.

Все шаги можно реализовать с использованием символьных вычислений в математическом пакете. Алгоритм для нахождения пары V_{2n-1} , U_{2n} через задание $\dot{A}_{2n-1}(0)$, $B_{2n-1}(0)$ выглядит следующим образом (для последующей пары процедура аналогичная). Нужно рассмотреть A_{2n-1} как функцию t и V_{2n-1} , а B_{2n-1} как функцию t и U_{2n} , при этом все V_k и U_{k+1} , где $k = 0, 1, \dots, 2n - 2$, на данном этапе уже просто известные числа с предыдущих этапов. Далее нужно вычислить решение задачи вплоть до коэффициентов $A_{2n-1}(t, V_{2n-1})$ и $B_{2n-1}(t, U_{2n})$ по формулам (2.8) и (2.10) на основе функций

$$A_0(t, U_{2n}) = \sum_{k=0}^{2n-1} U_k t^k + U_{2n} t^{2n}, \quad B_0(t, V_{2n-1}) = \sum_{k=0}^{2n-2} V_k t^k + V_{2n-1} t^{2n-1}$$

после чего найти корни уравнений $\dot{A}_{2n-1}(0, V_{2n-1}) = \dot{A}_{2n-1}(0)$ и $B_{2n-1}(0, U_{2n}) = B_{2n-1}(0)$.

Данный алгоритм фактически отражает рассуждения математической индукции, базу для которой составляют формулы (2.13)–(2.15).

При этом в силу поиска $A_0(t)$ и $B_0(t)$ в виде степенных рядов в окрестности нуля гарантируется их сходимость хотя бы при небольших t .

3. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПО ПРОСТРАНСТВУ НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Указанные выше рассуждения можно применить к построению решения задачи об изэнтропическом движении газа с периодическими по пространственной переменной начальными данными. Например, такой задаче посвящена статья [5], в которой приведены точные решения в неявном виде (с помощью решения уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу в плоскости годографа) для условий

$$\rho(x, 0) = (1 + \varepsilon \cos x)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad v(x, 0) = 0 \quad (3.1)$$

при $\gamma = 3, 5/3$ и $7/5$. Следует отметить, что здесь все величины записаны в безразмерном виде. В качестве параметров обезразмеривания выбраны характерные значения плотности, давления и длины.

Для случая $\gamma = 3$ общее решение представляется следующим образом:

$$\rho = 1 + \varepsilon \cos(x - vt) \cos(\rho t), \quad v = \varepsilon \sin(x - vt) \sin(\rho t)$$

Чтобы получить решение задачи газовой динамики с начальными данными (3.1) в изэнтропическом случае в явном виде, можно воспользоваться разложением в степенной ряд по начальному положению частиц $b = x(m, 0)$, для которого

$$f(b) = (1 + \varepsilon \cos b)^{-\frac{2}{\gamma-1}}$$

и при этом удовлетворить условиям

$$p(b, 0) = (1 + \varepsilon \cos b)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad x_i(b, 0) = 0$$

с помощью приведенного алгоритма нахождения необходимых $A_0(t)$ и $B_0(t)$.

Условие $b(0) = 0$ представляет собой требование при интегрировании уравнения $b'(m) = f(b)$ для нахождения зависимости b от m , если это нужно. В частности, при $\gamma = 3$ функция $b(m)$ определяется как решение трансцендентного уравнения

$$b + \varepsilon \sin b = m$$

при каждом конкретном m .

Таким образом, используя метод поиска решений в виде специальных степенных рядов по функции от массы, можно построить явное решение задачи, для которой ранее было известно решение только в неявном виде с использованием плоскости годографа.

4. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ПОРШНЯ

С помощью изложенного в настоящей работе подхода можно решить, например, задачу о периодическом движении поршня при экспоненциально возрастающей начальной плотности. Ниже приводится решение такой задачи для $\gamma = 1.4$ без учета массовых сил. Температура на поршне для удобства задается постоянной.

Для получения решения необходимо положить

$$A_0(t) = 0.1 \sin t, \quad B_0(t) = 1, \quad x(m, 0) = b(m) = 1 - \exp(-m) \quad (4.1)$$

В этом случае начальная плотность имеет вид $\rho(m, 0) = \exp(m)$.

Решение при условиях (4.1) для первых 10 членов рядов показано на рис. 1. Исходя из графиков видно, что решение представляет собой осцилляции, период которых равен периоду колебаний поршня. С учетом порядка задаваемых величин сходимость решения достигается, например, при $m \in [0, 1]$.

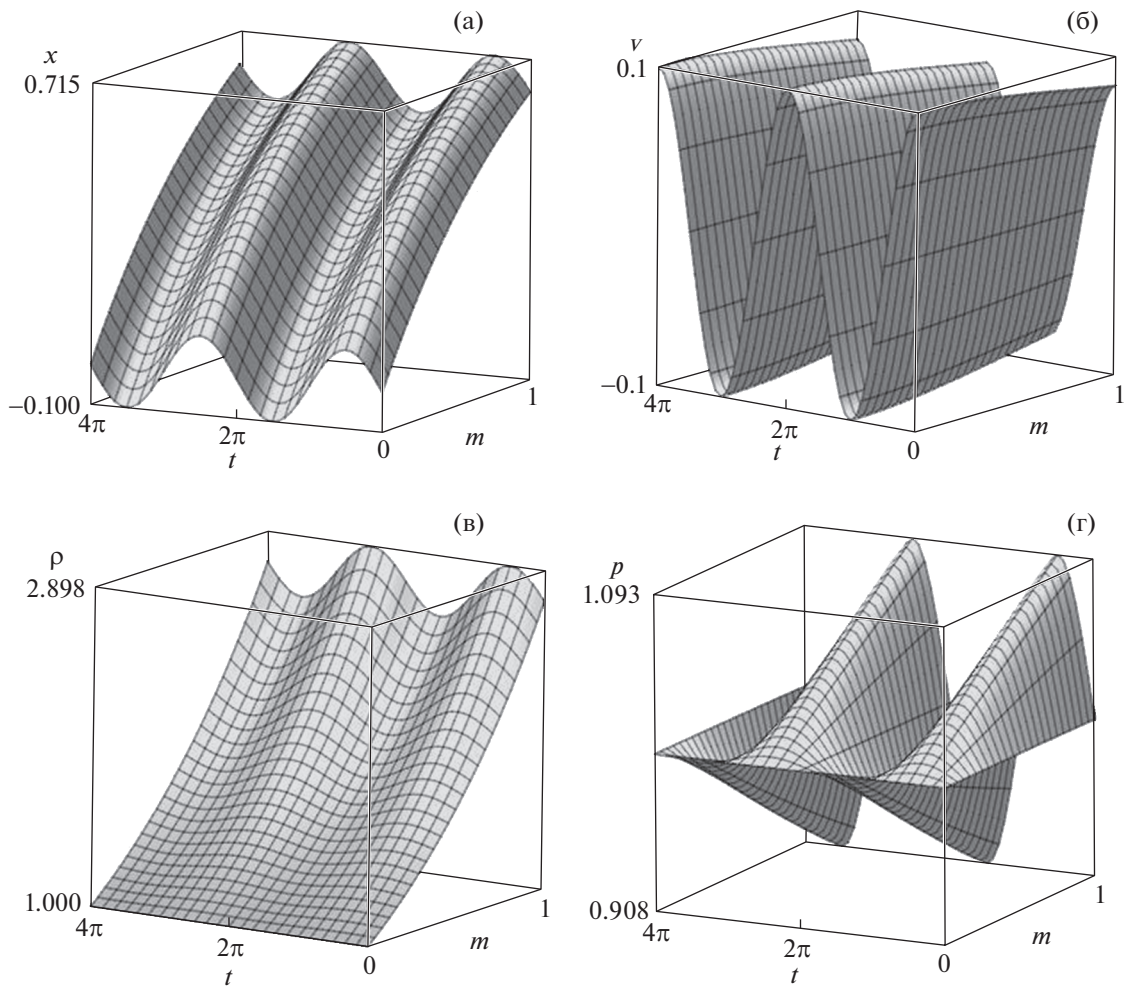


Рис. 1. Графики закона движения (а), скорости (б), плотности (в) и давления (г) для задачи о периодических колебаниях поршня при экспоненциально возрастающей начальной плотности.

При проведении расчетов коэффициентов и проверке сходимости решения удобнее задавать функции приблизительно одного порядка. Но нужно отметить, что, согласно теории размерности, в приведенном примере и далее можно выбрать заданным образом только три размерно-независимых масштаба. Порядки остальных величин фактически определяют значения безразмерных чисел, входящих в рассматриваемую задачу. В данном случае за единицы приняты давление и начальная плотность на поршне, а также период колебаний поршня, разделенный на 2π .

5. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА НЕПОДВИЖНОМ ПОРШНЕ

В рамках развитого подхода также возможно получить решение задачи о распространении возмущений от колебаний температуры на неподвижном поршне. Для простоты считается, что $\gamma = 2$ и начальная плотность постоянна. Наличие массовых сил не предполагается.

Для расчета всех коэффициентов рядов в рамках указанной задачи следует задать

$$A_0(t) = 0, \quad B_0(t) = 1 + 0.1 \sin t, \quad x(m, 0) = b(m) = m \quad (5.1)$$

За единицы принимаются начальная плотность, давление на поршне в начальный момент времени и период колебаний температуры на поршне, разделенный на 2π .

Решение на основе условий (5.1) для первых 10 членов рядов представлено на рис. 2. Как и в предыдущем случае колебательный процесс на поршне порождает осцилляции физических ве-

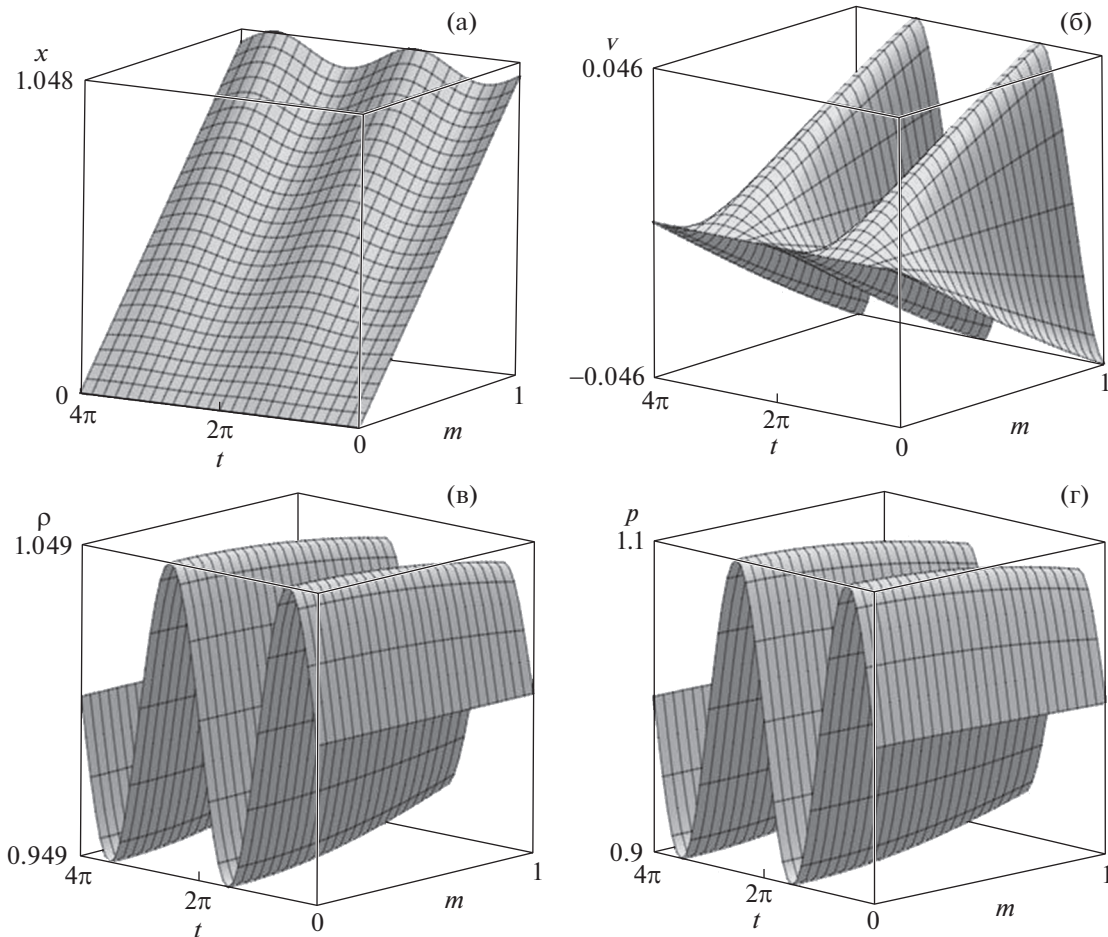


Рис. 2. Графики закона движения (а), скорости (б), плотности (в) и давления (г) для задачи о распространении возмущений от колебаний температуры на неподвижном поршне.

личин во всей области с тем же периодом. При $m \in [0, 1]$ наблюдается сходимость построенного решения.

6. ДВИЖЕНИЕ ПОРШНЯ С ТОРМОЖЕНИЕМ

Пусть закон движения поршня имеет вид гиперболического тангенса от времени, т.е. рассматривается процесс вдвигания поршня в газ. Предполагается, что массовые силы представлены в виде постоянного гравитационного поля, температура на поршне сохраняется, а начальная плотность экспоненциально убывает.

Для получения решения указанной задачи необходимо положить

$$A_0(t) = 0.1 \operatorname{th} t, \quad B_0(t) = 1, \quad x(m, 0) = b(m) = \exp(m) - 1, \quad g(m) = -0.1 \quad (6.1)$$

Показатель адиабаты берется как $\gamma = 1.4$. Соответственно начальная плотность имеет вид $\rho(m, 0) = \exp(-m)$.

В данной задаче за единицы удобнее принять давление и начальную плотность на поршне, а также величину ускорения свободного падения, умноженную на 10.

Решение с учетом условий (6.1) для первых 10 членов рядов приведено на рис. 3. Наблюдается достаточно резкий рост давления на небольших временах с последующей релаксацией: зависимость для каждой массовой переменной выходит на начальное значение с течением времени. Аналогичным, но менее резким образом ведет себя плотность. Неоднородная начальная скорость затухает со временем к тождественному нулю.

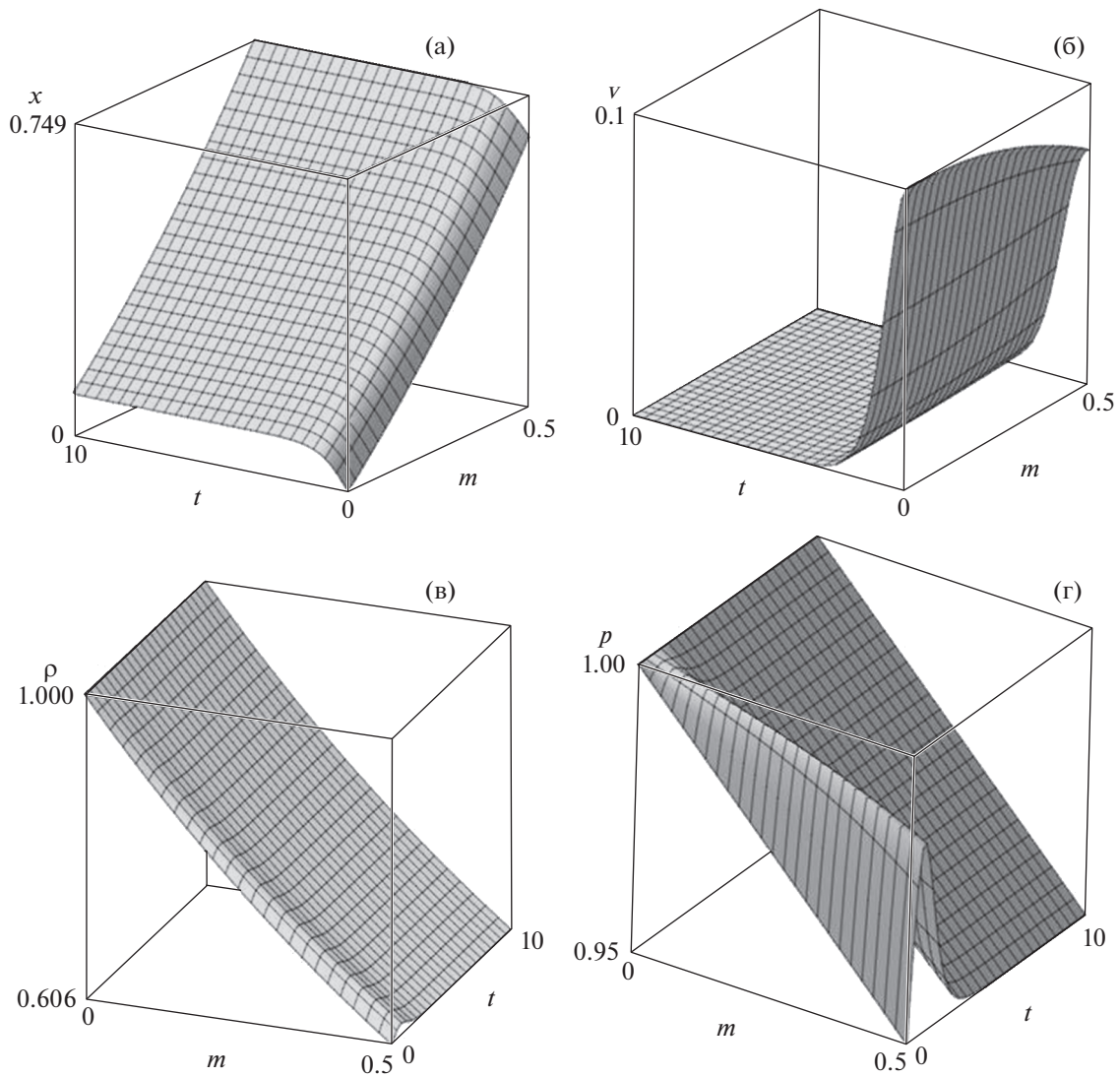


Рис. 3. Графики закона движения (а), скорости (б), плотности (в) и давления (г) для задачи о вдвижении поршня в газ с торможением при экспоненциально убывающей начальной плотности в постоянном гравитационном поле.

Сходимость решения с учетом порядка задаваемых величин можно получить, например, при $m \in [0, 1/2]$. Соответственно решение не опрокидывается.

7. ФОРМА ВЕБЕРА

Уравнения газовой динамики (2.1), (2.2) без учета массовых сил также могут быть записаны в инвариантном виде относительно преобразования лагранжевой системы координат в форме Вебера [6]

$$x_{tt}x_{\xi} + h_{\xi} - \frac{h}{c_p} s_{\xi} = 0 \quad (7.1)$$

$$x_{\xi}h_t + (\gamma - 1)hx_{\xi t} = 0 \quad (7.2)$$

Здесь $h = h(\xi, t)$ – удельная энтальпия, $s = s(\xi)$ – удельная энтропия, c_p – теплоемкость газа при постоянном давлении, а закон движения – функция произвольной лагранжевой координаты ξ и времени.

Однако имеет смысл взять переменную энтропию в качестве лагранжевой координаты. В этом случае система (7.1), (7.2) примет вид

$$x_t x_s + h_s - \frac{h}{c_p} = 0 \quad (7.3)$$

$$x_s h_t + (\gamma - 1) h x_{st} = 0$$

Аналогичным образом можно построить решения в виде степенных рядов

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) s^n$$

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t) s^n$$

Важной особенностью данного случая является отсутствие в уравнении (7.3) дополнительного произвола, связанного с наличием функции $b' = f(b)$, которую также необходимо раскладывать в ряд Тейлора.

Рекуррентные формулы для коэффициентов рядов устроены следующим образом:

$$A_n(t) = \frac{1}{H_0^{1/(\gamma-1)}(t)} \left(A_n(0) H_0^{1/(\gamma-1)}(0) - \int_0^t L_n(\tau) H_0^{1/(\gamma-1)}(\tau) d\tau \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$L_1(t) = 0, \quad L_n(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k A_k(t) \dot{H}_{n-k}(t) + (\gamma - 1) H_{n-k}(t) \dot{A}_k(t)}{(\gamma - 1) H_0(t)}, \quad n = 2, 3, \dots$$

$$H_n(t) = \frac{H_{n-1}(t)}{c_p} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{n} \ddot{A}_k(t) A_{n-k}(t), \quad n \in \mathbb{N}$$

Вычисление всех членов происходит последовательно, сначала $A_1(t)$, потом $H_1(t)$, затем $A_2(t)$ и так далее, по задаваемым $A_0(t)$ и $H_0(t)$, которые при отсчете энтропии от нуля на поршне имеют механический смысл — закон движения поршня и энтальпия на поршне. Физически энтальпию на поршне допускается задавать с помощью температуры

$$T_p(t) = H_0(t)/c_p$$

Предполагается, что энтальпия на поршне, а вместе с ней и температура, отличны от нуля.

Также, для получения конкретного решения следует задать величины $A_n(0)$, которые фактически определяют начальное положение частиц

$$x(s, 0) = A_0(0) + A_1(0)s + A_2(0)s^2 + \dots$$

Стоит отметить, что плотность и давление выражаются через энтропию и время по формулам

$$\rho(s, t) = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{h(s, t)}{\sigma(s)} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

$$p(s, t) = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{h(s, t)}{\sigma^{1/\gamma}(s)} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

В качестве примера рассматривается задача о росте температуры на неподвижном поршне. С этой целью для $\gamma = 1.4$ задаются величины

$$A_0(t) = 0, \quad H_0(t) = 1 + 0.1t^2, \quad x(s, 0) = s^2 \quad (7.4)$$

Пусть также $c_p = 2$. За единицы измерения здесь стоит принять удельную энтальпию на поршне в начальный момент времени, теплоемкость газа при постоянном давлении, разделенную на 2, и характерное значение длины, либо времени — что более удобно.

При вычисленных первых 10 членах рядов решение для условий (7.4) изображено на рис. 4. Для существования такого решения оказывается необходимым, чтобы частицы с большей эн-

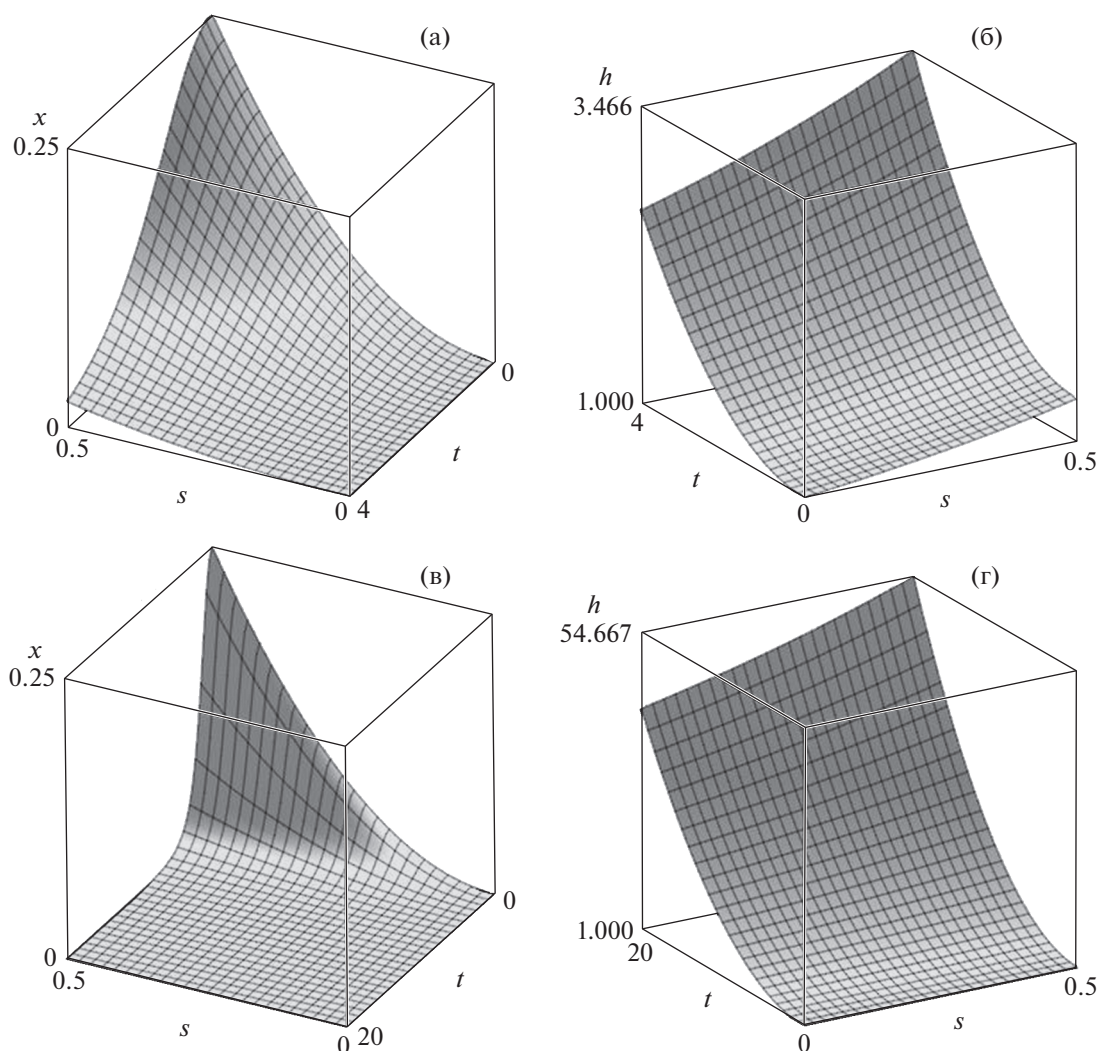


Рис. 4. Графики закона движения (а, в) и удельной энтальпии (б, г) на разных временах для задачи о росте температуры на неподвижном поршне при переменной энтропии.

тропией обладали более высокой температурой, в связи с чем наблюдается сильное сжатие газа. Однако при этом не образуются ударных волн, по крайней мере, до моментов времени порядка $t = 20$. Наблюдается сходимость решения в области $s \in [0, 1/2]$.

Решение некоторых других задач о безударном сжатии газа в случаях цилиндрической и сферической симметрии можно найти в [7]. Ударное сжатие, вплоть до концентрации энергии, предложено в [8].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках одномерной нестационарной газовой динамики с плоскими волнами разработан метод построения точных аналитических решений задач о движении поршня в трубе при неоднородных начальных данных в виде специальных степенных рядов от заданной лагранжевой координаты с коэффициентами, зависящими от времени. В частности, допускается строить разложение по начальному положению частиц или переменной энтропии. Все члены рядов находятся последовательно из рекуррентных формул по заданному закону движения поршня и температуре на поршне. Существует возможность выбирать такие задаваемые функции, чтобы удовлетворить нужным начальным условиям. Использование функционала математических пакетов облегчает задачу точного вычисления коэффициентов. Сходимость построенных решений достигается за

счет выбора области рассмотрения движения. В рамках развитого подхода получены новые решения физических задач, например, о периодических колебаниях поршня при неоднородной начальной плотности, распространении возмущений от колебаний и роста температуры на неподвижном поршне и движении поршня с торможением при наличии гравитации.

Автор выражает глубокую благодарность проф. А.Н. Голубятникову за идеи и плодотворное руководство работой.

Работа выполнена при поддержке Стипендии Президента РФ для аспирантов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубятников А.Н., Украинский Д.В.* О точных аналитических решениях уравнений газовой динамики // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 3. С. 141–150.
2. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 448 с.
3. *Галин Г.Я., Голубятников А.Н., Каменярж Я.А., Карликов В.П., Куликовский А.Г., Петров А.Г., Свешникова Е.И., Шикина И.С., Элит М.Э.* Механика сплошных сред в задачах. М.: Московский лицей, 1996. Т. 1. Теория и задачи. 396 с. Т. 2. Ответы и решения. 394 с.
4. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа, 2004. 640 с.
5. *Аксенов А.В.* Нелинейные периодические волны в газе // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 5. С. 88–98.
6. *Слезкин Н.А.* Лекции по гидромеханике. М.: Изд-во Московского ун-та, 1984. 225 с.
7. *Крайко А.Н.* Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2010. 440 с.
8. *Голубятников А.Н.* Об ускорении ударных волн и концентрации энергии // Труды Математического ин-та им. В.А. Стеклова. 2013. Т. 281. С. 162–169.