

УДК 533.697.4

ВНУТРЕННИЕ СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ КОНТУРОВ ОПТИМАЛЬНЫХ ТЕЛ И СОПЕЛ

© 2020 г. А. Н. Крайко^{a,b,*}, К. С. Пьянков^{a,**}, Н. И. Тилляева^{a,***}, В. А. Шаповалов^{a,b,****}

^a Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, Москва, Россия

^b Московский физико-технический институт, Москва, Россия

*E-mail: akraiko@ciam.ru

**E-mail: kspyankov@ciam.ru

***E-mail: ntill@ciam.ru

****E-mail: vladimirs44@yandex.ru

Поступила в редакцию 12.06.2020 г.

После доработки 18.06.2020 г.

Принята к публикации 18.06.2020 г.

В рамках идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа рассмотрены задачи построения контуров плоских и осесимметричных тел минимального волнового сопротивления и сопел максимальной тяги, при обтекании которых возможны внутренние скачки уплотнения. Такие скачки могут возникать при обтекании внутренних изломов оптимальных контуров или при пересечении идущих от них одноименных характеристик. Возникающие во втором случае висячие скачки названы внутренними, если их начальные точки лежат внутри области определенности обтекаемого участка оптимального контура. Снизу по потоку область определенности ограничена характеристикой, приходящей в концевую точку такого участка. Внутренние висячие скачки могут возникать при наличии в оптимальном контуре отрезка изобарической линии тока. Появление внутренних изломов оптимальных контуров возможно из-за отражения идущих от них волн давления от головного скачка (для головных частей) или, как ожидалось, – от тангенциального разрыва (для кормовых частей). Для набегающих сверхзвуковых потоков с тангенциальным разрывом прямым методом с представлением искомого контура кривыми Бернштейна–Безье, генетическим алгоритмом и быстрой и точной маршевой схемой расчета стационарных сверхзвуковых течений выполнен поиск оптимальных плоских кормовых частей с внутренним вогнутым изломом, обтекаемым с косым скачком. При надежном воспроизведении указанным методом построенных ранее общим методом множителей Лагранжа оптимальных кормовых частей с выпуклым внутренним изломом ожидаемые оптимальные конфигурации с вогнутым изломом и внутренним скачком при использовании прямого метода не были обнаружены. Вместо них реализовывались оптимальные контуры с центрированными волнами сжатия и разрежения с общим фокусом на тангенциальном разрыве и идущим из него “внешним” косым скачком. Затем новые “разрывные безударные” решения построены в точной постановке в рамках “метода неопределенного контрольного контура” и метода характеристик. Выполнены обобщения на контуры кормовых частей тел вращения и сверхзвуковых частей сопел. При равномерном набегающем потоке оптимальные кормовые части всегда обтекаются без внутренних скачков.

Ключевые слова: сверхзвуковые течения, оптимальные контуры головных и кормовых частей и сопел, внутренние изломы и скачки, прямой метод оптимизации, генетический алгоритм, новые “разрывные безударные” решения с центрированными волнами сжатия и разрежения с фокусом на тангенциальном разрыве

DOI: 10.31857/S0568528120060079

Скачки уплотнения в обтекающих тела минимального волнового сопротивления сверхзвуковых потоках невязкого и нетеплопроводного (идеального) газа привычны и естественны. Так, заостренные (или затупленные – при малых удлинениях) головные части плоских симметричных тел и всегда затупленные головные части осесимметричных тел, реализующие при заданном удлинении минимум волнового сопротивления, почти всегда обтекаются с присоединенным или отошедшим головным скачком [1]. Лишь в практически неинтересном пределе бесконечно-го удлинения (для головных частей конечной длины – при нулевой полувысоте или радиусе ос-

нования) эти скачки вырождаются в C^+ -характеристику (здесь и далее газ течет слева направо). Другое исключение – “биплан Буземана” и его осесимметричные аналоги – сконструированные специальным образом тела с протоком, которые, не возмущая внешний сверхзвуковой набегающий поток, имеют (при конечном объеме!) нулевое волновое сопротивление [1].

Оптимальные контуры плоских головных частей, обтекаемые с присоединенным головным скачком, как правило, имеют небольшие внутренние положительные (“вогнутые”) или отрицательные (“выпуклые”) изломы [2–8]. Их знак определяется знаком коэффициента отражения от головного скачка возмущений давления, приходящих на него по C^+ -характеристике и отражающихся по C^- -характеристике. Вогнутые изломы обтекаются с образованием слабых “внутренних” скачков, а выпуклые – также слабых пучков волн разрежения. С помощью развитого в [7] эффективного аналитического метода близкие к оптимальным головные части плоских тел с одним внутренним изломом построены для чисел Маха набегающего потока $1 < M_\infty \leq \infty$ и всех удлинений, при которых плоские головные части обтекаются с присоединенным головным скачком (см. также [8]). Анализ всей совокупности полученных в [7] результатов показал, что выпуклые изломы, обтекаемые с образованием пучков волн разрежения, заметно больше вогнутых изломов, обтекаемых с образованием слабых внутренних скачков. Следствие такого различия – много меньший эффект введения вогнутых изломов и сопровождающих их скачков на сопротивление головных частей.

Гораздо более интенсивные внутренние скачки возникают при наличии в оптимальном контуре отрезка изобарической линии тока – участка краевого экстремума, обтекаемого с фиксированным числом Маха $M_m \geq 1$. Именно такие участки присутствуют в оптимальных контурах тарельчатых сопел, реализующих максимум тяги при заданных реальных габаритах [9–11]. В построенных оптимальных тарельчатых соплах приходящие на изобарическую линию тока волны разрежения из C^+ -характеристик пучка с фокусом на кромке противоположной стенки сопла отражаются как волны сжатия, пересечение которых с образованием висячего внутреннего скачка возможно внутри области определенности оптимального контура. Для тарельчатого сопла с направлением сверхзвукового потока слева направо и любым направлением дозвукового потока правая граница области определенности – C^+ -характеристика пучка волн разрежения, приходящая в конечную точку b обтекаемой сверхзвуковым потоком части оптимального контура. В общем случае точка b – начальная точка торца $x = X$ – участка краевого экстремума, появляющегося из-за ограничения: $x \leq X$ на протяженность сопла по оси симметрии. Оптимальные контуры тарельчатых сопел без начального изобарического участка и возникающего из-за него внутреннего висячего скачка возможны лишь при нереально больших величинах X .

Данная статья начиналась как реакция на доклады [12, 13]. Рассматривая плоские кормовые части при равномерном сверхзвуковом набегающем потоке, авторы этих докладов пытались построить “оптимальные ударные” контуры таких кормовых частей, а затем также “оптимальные ударные” контуры сверхзвуковых частей сопел Лаваля, обтекаемые с образованием внутренних скачков. Однако при равномерном набегающем потоке оптимальные кормовые части, обтекаемые без образования внутренних скачков, намного лучше “оптимальных ударных” контуров [12, 13]. “Оптимальные ударные” контуры сверхзвуковых частей сопел [12, 13], также уступают правильно спрофилированным оптимальным безударным образующим сверхзвуковых сопел. Подтверждающие сказанное результаты специально выполненных расчетов в 2018 г. были представлены авторам доклада [12]. Тем не менее через год они без каких-либо пояснений почти дословно воспроизвели свои прежние утверждения. Кстати, в желании улучшить характеристики оптимальных безударных конфигураций введением внутренних скачков авторы [12, 13] не одиноки. Применительно к сверхзвуковым частям сопел Лаваля задолго до них это пытался сделать Л.В. Гогиш [14], правда, также неудачно (см. [15]). Как реакция на [12, 13] в первом разделе статьи описано правильное безударное решение задачи построения плоской кормовой части при равномерном набегающем потоке.

Если при равномерном набегающем потоке оптимальные кормовые части обтекаются безударно, то для неравномерного набегающего потока с тангенциальным разрывом до данной работы представлялись вполне ожидаемыми оптимальные контуры с вогнутым изломом и внутренним скачком. С учетом полувековой (начиная с [14]) истории попыток улучшения безударных оптимальных конфигураций введением внутренних скачков построение решений с “законными” внутренними изломами и возникающими при их обтекании скачками представлялось вполне оправданным. По аналогии с оптимальными головными частями тип ожидаемого излома, т.е. будет ли он выпуклым или вогнутым, должен зависеть от знака коэффициента отражения K возмущений давления от тангенциального разрыва. Для положительных K несколько

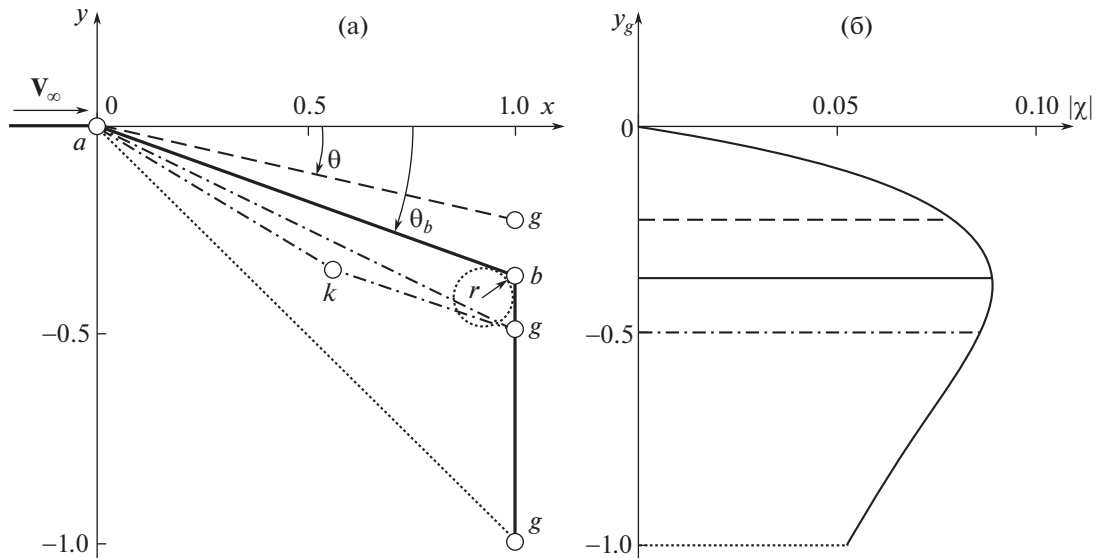


Рис. 1. К построению плоской кормовой части минимального волнового сопротивления при равномерном набегающем потоке с $M_\infty = 1$: (а) – разные положения прямолинейной образующей ag кормовой части, (б) – зависимость величины $|\chi|$ образующей ag от ординаты y_g ее концевой точки g .

оптимальных плоских кормовых частей с большими выпуклыми внутренними изломами были построены в [16] с применением крайне сложного и трудоемкого общего метода множителей Лагранжа [5, 17–19]. Там же высказано предположение о возможности существования при $K < 0$ оптимальных контуров кормовых частей с изломом, обтекаемым с внутренним скачком. Для их построения развитый в [20–23] прямой метод, опирающийся на аппроксимацию искомого контура кривыми Бернштейна–Безье и генетический алгоритм оптимизации, усовершенствован в рамках данной работы внедрением быстрого и точного маршевого метода расчета стационарных сверхзвуковых течений. Эта часть исследования и найденные в результате неожиданные новые точные решения – наиболее интересные результаты статьи.

1. ОПТИМАЛЬНЫЕ КОНТУРЫ ПЛОСКИХ КОРМОВЫХ ЧАСТЕЙ ПРИ РАВНОМЕРНОМ НАБЕГАЮЩЕМ ПОТОКЕ. СРАВНЕНИЕ С “УДАРНЫМИ” КОНТУРАМИ [12, 13]

Напомним постановку и решение задачи построения контура образующей ag плоской кормовой части (рис. 1а) минимального волнового сопротивления при заданном равномерном сверхзвуковом набегающем потоке идеального совершенного газа с отношением удельных теплоемкостей (показателем адиабаты) γ . В дальнейших расчетах $\gamma = 1.4$. Ось x прямоугольных координат xu с началом в точке a направим по вектору скорости набегающего потока V_∞ . Наряду с параметрами набегающего потока при профилировании оптимальной кормовой части заданы ее максимально допустимая длина X , ордината концевой точки контура y_g и “донное” давление p^+ , действующее на ее возможный донный торец bg . Размер торца или условие его отсутствия определяют параметры сверхзвукового потока в точке b_- и величина донного давления, которое предполагается не зависящим от формы искомого контура. При сформулированных условиях величина минимизируемого волнового сопротивления с точностью до несущественных при решении вариационной задачи множителя и слагаемого определяется выражением (p – давление)

$$\chi = \int_a^b p dy + (y_g - y_b) p^+ \tag{1.1}$$

Оптимальный контур реализует минимум $\chi < 0$ или максимум $|\chi| = -\chi$.

Решение сформулированной задачи хорошо известно [1, 5, 6, 24]. Это – отрезок прямой с оптимальным углом наклона и возможный донный торец – участок краевого экстремума. Выбор оптимального угла для числа Маха $M_\infty = 1$ и $p^+ = 0$ поясняет рис. 1. На рис. 1б для прямолинейного контура ag приведена зависимость $|\chi|$ от ординаты y_g его концевой точки. За масштабы плот-

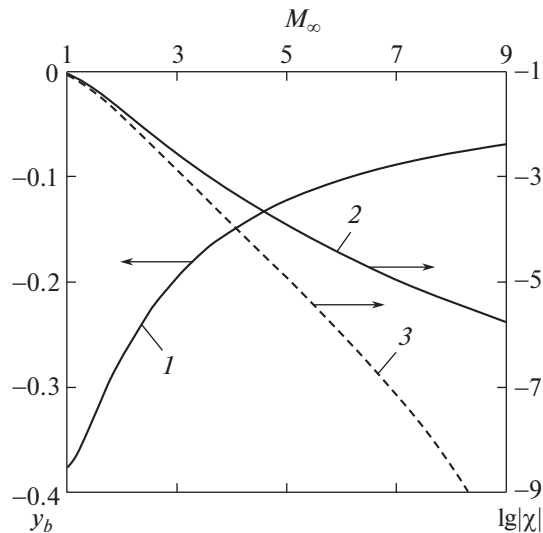


Рис. 2. Зависимость от числа Маха M_∞ набегающего потока оптимальной ординаты точки стыковки y_b прямолинейного контура ab с торцом bg (1) и величин $|\chi|$ оптимального контура abg с торцом и оптимальной ординатой y_b (2) и “конического” контура ag (3).

ности и скорости взяты их критические значения в набегающем потоке $\rho_{* \infty}$ и $a_{* \infty}$, давление отнесено к $\rho_{* \infty} a_{* \infty}^2$, а за линейный масштаб взята максимально допустимая длина X кормовой части. Для $M_\infty < 2.56$ правильная величина p^+ – результат поворота потока на -90° . Получающаяся поправка к p^+ (ее максимум равен 4×10^{-4} для $M_\infty = 1$, когда $p_\infty = 1/\gamma$) далее не учитывается.

Согласно рис. 1, по мере увеличения $|y_g|$ величина $|\chi|$ сначала растет, а после достижения ординатой y_g величины $y_g = y_b$ дальнейший рост $|y_g|$ или модуля угла наклона контура $|\theta|$ уменьшает $|\chi|$. Следовательно, дальше увеличивать $|\theta|$ не следует, и при $y_g < y_b$ оптимален составной контур с начальным прямолинейным участком ab и торцом bg . При $y_g > y_b$ оптимален прямолинейный контур ag без торца. Максимально возможный оптимальный $|\theta_b|$ находится из необходимого условия экстремума χ (“условия Буземана”)

$$p_b - p^+ + (\rho V^2 \sin\theta \cos\theta \tan\mu)_b = 0 \quad (1.2)$$

Здесь p , ρ , модуль V вектора скорости и угол Маха μ в точке b – известные функции угла θ_b . Для $M_\infty = 1$ и $p^+ = 0$ оптимальные значения $\theta_b = -0.36$ и $y_b = -0.376$. Для больших M_∞ так же, как и для больших p^+ , максимальный оптимальный угол $|\theta_b|$ наклона отрезка ab меньше.

Зависимость величины y_b от M_∞ для $p^+ = 0$ дает кривая 1 рис. 2. С ростом M_∞ модуль $y_b < 0$ уменьшается. В результате при рассмотренных в [12, 13] значениях $y_g \leq -0.5$ конечная точка g лежит заведомо ниже точки b , и соответствующий прямолинейный (“конический”) контур ag , приходящий в эту точку, неоптимален. Следовательно, его можно улучшить, например, введением штрих-пунктирного излома в точке k на рис. 1а с образованием косоугольного скачка. Однако оптимальным (наилучшим) решением в этом случае является контур abg . Его преимущество в $|\chi|$ по сравнению с “коническим” растет с ростом M_∞ и может составлять не “десятки процентов”, как у “ударных контуров” [12, 13], а сколь угодно больше. Кривые 2 и 3 на рис. 2 дают $|\chi|$ соответственно оптимального контура с торцом и конического контура с $\zeta = \tan\theta = -0.5$. Для $M_\infty = 7$, например, преимущество оптимального контура по отношению к коническому составляет 15900%.

Часто в оправдание неверно решенной вариационной задачи ссылаются на выбранный класс функций, в котором, вроде бы, ищется нужное решение. На самом же деле такой выбор должен определяться ограничениями, следующими из постановки задачи. Так, если по какой-либо причине выпуклые точки излома на контуре (точки a и b в нашем случае) недопустимы, то должен быть задан минимально допустимый радиус кривизны r искомой оптимальной образующей, и изломы скругляются минимально допустимым радиусом, как для точки b показано на рис. 1а.

Такая замена, позволяя удовлетворить заданным ограничениям на кривизну контура, слабо влияет на величину оптимизируемого волнового сопротивления [1, 5, 25].

2. ПРЯМОЙ МЕТОД И ЕГО ВОЗМОЖНОСТИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ КОРМОВЫХ ЧАСТЕЙ В ПОТОКАХ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ОТРАЖЕНИЯ ОТ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА

При неравномерном набегающем потоке образующая ab оптимальной кормовой части не прямолинейная. Ее форма находится из решения задачи Гурса по данным на отрезке ah замыкающей C^+ -характеристики пучка волн разрежения, возникающего при обтекании излома в точке a , и на экстремальной C^- -характеристике hb . Уравнения, определяющие такую C^- -характеристику, включают уравнения [1, 5]

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta - \mu), \quad d\theta - \frac{\cot\mu}{\rho V^2} dp = 0, \quad \frac{dx}{d\psi} = \frac{-\cos(\theta - \mu)}{k\rho V \sin\mu}, \quad \cot\mu = \sqrt{M^2 - 1} \quad (2.1)$$

справедливые на любой C^- -характеристике, и условие оптимальности

$$\rho V^2 \sin^2\theta \tan\mu = \lambda \quad (2.2)$$

наиболее просто получаемое “методом неопределенного контрольного контура”. В (2.1) и (2.2) ψ – функция тока, такая что $\psi_b = 0$, k – нормирующий множитель, а λ – константа, определяемая значением левой части равенства (2.2) в точке h . Два произвола в выборе начального пучка волн разрежения, т.е. замыкающей его C^+ -характеристики и положения точки h на ней, в принципе, позволяют удовлетворить двум условиям в точке b : условию Буземана (1.2) и равенству $x_b = X$. Если же получившаяся при этом величина y_b оказалась меньше заданной: $y_b < y_g < 0$, то вместо условия Буземана удовлетворяется равенство: $y_b = y_g$. При построении характеристики hb – решении уравнений (2.1) и (2.2) – используются известные в набегающем потоке зависимости полной энthalпии H и удельной энтропии s или энтропийной функции p/ρ^γ от функции тока:

$$\frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{V^2}{2} = H(\psi), \quad \frac{p}{\rho^\gamma} = S(\psi) \quad (2.3)$$

Из-за задания этих функций и того, что $\psi_b = \psi_a = 0$, при построении характеристики hb за независимую переменную удобно брать функцию тока ψ .

Описанный, реализуемый “в принципе” способ построения экстремальной характеристики, на самом деле, осуществим не при любых функциях в правых частях равенств (2.3). Так, при наличии в потоке тангенциального разрыва в точке его пересечения с характеристикой hb , как следствие условия (2.2), должно выполняться равенство

$$\frac{\gamma_- M_-^2 \sqrt{M_+^2 - 1}}{\gamma_+ M_+^2 \sqrt{M_-^2 - 1}} = 1 \quad (2.4)$$

с индексом “–” (“+”), метящим параметры под (над) разрывом. Согласно [16] для совершенных газов с $\gamma_+ = \gamma_-$ упоминавшийся выше коэффициент отражения возмущений давления от тангенциального разрыва дается формулой

$$K = \frac{1 - \omega}{1 + \omega}, \quad \omega = \frac{M_-^2 \sqrt{M_+^2 - 1}}{M_+^2 \sqrt{M_-^2 - 1}} \quad (2.5)$$

Поэтому равенство (2.4) эквивалентно нулевому коэффициенту отражения $K = 0$. При произвольном тангенциальном разрыве $K \neq 0$, равенство (2.4) не выполняется и решение с условием (2.2) на hb не реализуется.

На рис. 3а и 3в тот же результат – следствие предложенного Г.Г. Черным [2, 3] варьирования в характеристических полосках. При $K \neq 0$ гладкий участок ab искомого контура неоптимален, так как его сопротивление можно уменьшить введением “бугорка” или “ямки” в окрестности точки k такой, что C^+ -характеристика, вышедшая из нее, отразится от тангенциального разрыва C^- -характеристикой, приходящей в точку b . Тогда из волн повышенного и пониженного давления, помеченных значками “+” и “–”, после отражения от разрыва на ab попадет только волна со значками “+”, а волна со значками “–” пройдет мимо него. Это даст некомпенсированное положительное приращение величине $|\chi|$. Поэтому контур с допускающим такое варьирова-

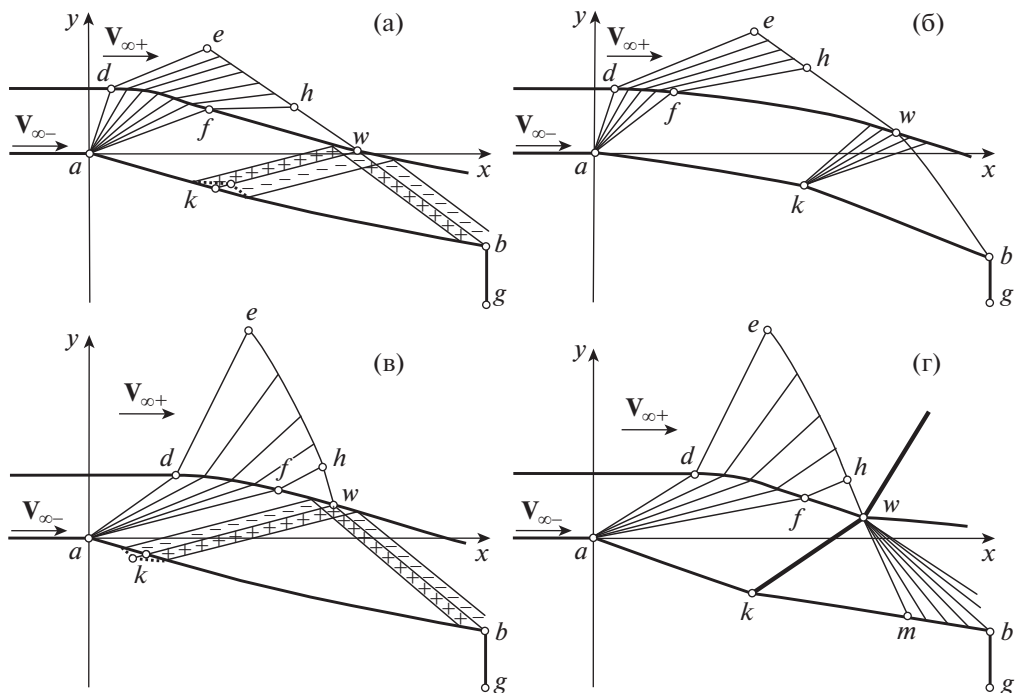


Рис. 3. Схемы обтекания плоской кормой части набегающим сверхзвуковым потоком с тангенциальным разрывом: неоптимальные кормовые части с гладким участком ab при $K_w > 0$ (а) и $K_w < 0$ (б); оптимальные кормовые части с возможными внутренними изломами при $K_w > 0$ (в) и $K_w < 0$ (г).

ние участком ab не может быть оптимальным. При варьировании в характеристических полосках для уменьшения сопротивления вид излома выбирает знак коэффициента отражения K : выпуклый (бугорок), как на рис. 3а, — при $K > 0$, и вогнутый (ямку), как на рис. 3в, — при $K < 0$.

На основе подобных рассуждений в [16] предполагалось, что при $K > 0$ конечный излом оптимального контура обтекается с образованием пучка волн разрежения (рис. 3б), а при $K < 0$ — скачка уплотнения (рис. 3г). В обоих случаях бракуящее контуры с гладким участком ab варьирование в характеристических полосках не проходит. Для оптимальных контуров с внутренними изломами описанное выше построение экстремальной характеристики с полученным методом неопределенного контрольного контура условием (2.2) невозможно. Построенные в [16] с применением общего метода множителей Лагранжа (ОММЛ) 5 оптимальных контуров плоских кормовых частей с изломом, обтекаемым с образованием пучка волн разрежения, подтвердили предположение о виде решения для тангенциальных разрывов с $K > 0$. Внутренние изломы этих контуров того же порядка, что и изломы в их начальных точках a . Отвечающие тангенциальным разрывам с $K < 0$ контуры с предполагаемыми изломами, обтекаемыми с образованием скачка уплотнения, в [16] не рассматривались из-за чрезвычайной сложности их построения ОММЛ. Этот пробел предполагалось восполнить в данной работе с применением прямого метода оптимизации.

Для оценки точности развиваемого подхода проведена оптимизация трех из пяти построенных в [16] контуров для $K_\infty > 0$. Выбранные для сравнения примеры (№ 3–5 из [16]) отвечают фиксированным параметрам набегающего потока и разным значениям максимально допустимой длины X и донного давления p^+ . Здесь, как в [16], за масштаб длины взята начальная высота пристеночного слоя, а за масштабы скорости и плотности — их критические значения в этом слое. Поэтому безразмерные $y_d = V_{* \infty -} = \rho_{* \infty -} = 1$, а значения энтропийной функции $S = p/\rho^\gamma$ и полной энтальпии пристеночного набегающего потока $S_{\infty -} = 1/\gamma$ и $H_{\infty -} = (\gamma + 1)/[2(\gamma - 1)]$. В выбранных примерах $M_{\infty -} = 1.1$, $M_{\infty +} = 8.57$, $S_{\infty +} = 0.143$ и $H_{\infty +} = 12$. При таких числах Маха по формуле (2.5) $K_\infty = 0.53$, и оптимальные контуры имеют выпуклые внутренние изломы, обтекаемые с образованием пучков волн разрежения. В верхней части табл. 1 приведены значения X и p^+ этих примеров, а также ординаты y_g нижних точек торцов и вычисленные для них в [16] значения $\chi < 0$

Таблица 1. Данные вариантов № 3–5 и сравнение контуров, построенных в [16] (“ОММЛ”) и прямым методом (“ГА”)

№	3			4			5		
	ОММЛ	ГА	$\Delta, \%$	ОММЛ	ГА	$\Delta, \%$	ОММЛ	ГА	$\Delta, \%$
X		5.10			7.61			11.3	
p^+		0.201			0.081			0.012	
$-y_g$		0.67			1.66			4.00	
$\delta \chi , \%$		3.18			4.57			3.45	
x_k	1.91	1.935	1.3	2.6	2.61	0.3	3.08	3.15	2.3
$-y_k$	0.185	0.179	3.2	0.343	0.341	-0.6	0.504	0.515	-2.2
$-y_b$	0.58	0.578	-0.34	1.39	1.385	-0.4	3.09	3.07	-0.7
$-\zeta_{k-}$	0.061	0.069	13.1	0.074	0.080	8.1	0.091	0.086	-5.5
$-\zeta_{k+}$	0.151	0.134	-11	0.235	0.213	-9.4	0.359	0.328	-8.6
$-\Delta\zeta_k$	0.090	0.065	-28	0.161	0.134	-17	0.268	0.244	-9.0
$ \chi $	0.222	0.222	0	0.357	0.357	0	0.469	0.467	-0.4

и выигрыша в процентах $\delta|\chi|$ по сравнению с гладкими “почти оптимальными” контурами. “Почти” – поскольку при их построении не удовлетворялось условие, выполнение которого обеспечивается введением излома.

Используемый в развитом прямом методе генетический алгоритм (ГА) основывался на двухкритериальной оптимизации. В ней при фиксированном давлении p^+ в качестве критериев наряду с $\chi < 0$ минимизировалась длина X . В результате вместо одной найденной из решения обратной задачи в рамках ОММЛ оптимальной кормовой части заданной длины прямым методом с ГА строилось избыточное множество решений для некоторого диапазона длин.

Для поиска внутреннего излома участок ab делится на два: ak и kb , которые задаются кривыми Бернштейна–Безье второго или третьего порядков. Основной массив расчетов выполнен с кривыми Бернштейна–Безье второго порядка. Меньшая, но очень ценная часть результатов получена с помощью кривых Бернштейна–Безье третьего порядка. Абсциссы контрольных точек кривых Бернштейна–Безье второго или третьего порядка находились делением x_k и $(x_b - x_k)$ – проекций на ось x отрезков ak и kb – соответственно на две или три равные части. Абсцисса x_k и ординаты всех (кроме $y_a = 0$) контрольных точек кривых Бернштейна–Безье ищутся. При втором порядке аппроксимации контур оптимальной кормовой части заданной длины определяется пятью, а при третьем – семью искомыми параметрами.

При поиске оптимальных контуров с помощью ГА “начальная популяция” параметров кривых Бернштейна–Безье создается их случайным выбором. Затем из них выбираются “решения-родители” такие, что среди всех оставшихся контуров нет лучших по обоим критериям. Семейство решений-родителей образует “фронт Парето-оптимальных” решений – совокупность наилучших из всех построенных решений. Новые контуры (“особи”) генерируются вариацией (“мутацией”) параметров случайно выбранного родителя. В процессе оптимизации амплитуда мутаций постепенно уменьшается (большая на начальном этапе, малая на последних этапах) для более близкого приближения решения к оптимальному.

Величина $|\chi|$ каждой сгенерированной ГА кормовой части находилась расчетом ее стационарного сверхзвукового обтекания. Уравнения Эйлера, описывающие такое обтекание, интегрировались конечно-разностной маршевой схемой [26, 27], реализованной со вторым порядком аппроксимации по x и y согласно подходам, первоначально предложенным в [28–30] для повышения порядка аппроксимации (на гладких решениях) “нестационарной” схемы Годунова. В начальном сечении $x = 0$ задавалось N ячеек равной высоты $\Delta y = 1/N$ в пристеночном слое ($0 \leq y \leq 1$) и N ячеек, растущих от $\Delta y = 1/N$ по геометрической прогрессии – во внешнем потоке ($1 \leq y \leq Y$). Сеточные линии в плоскости xu при $x > 0$ строились в процессе счета по линиям тока и по нормальям к ним. Маршевый счет велся с постоянным стационарным аналогом числа Куранта $Cu = 0.8$. В разд. 2 маршевый шаг лимитировал пристеночный поток с начальным числом Маха $M_{\infty-} = 1.1$, а в разд. 3 – внешнее течение с $M_{\infty+} = 1.2$. По сравнению с интегрированием не-

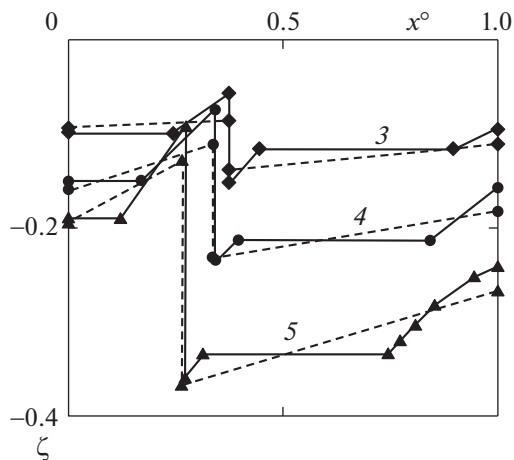


Рис. 4. Зависимость ζ контуров № 3–5 от $x^\circ = x/X$: сплошные ломаные – результаты [16], штриховые ломаные с теми же маркерами – результаты прямого метода с кривыми Бернштейна–Безье второго порядка.

стационарных двумерных уравнений Эйлера и установлением по времени маршевый счет многократно ускоряет решение, причем на много более мелких сетках. Как показали специальные расчеты, $N = 108$ при $Y = 4$ в разд. 2 и $Y = 3X$ – в разд. 3 более чем достаточно для обеспечения высокой точности всех полученных результатов.

По описанной технологии с кривыми Бернштейна–Безье второго порядка построены оптимальные кормовые части для трех величин донного давления p^+ примеров № 3–5 из [16]. Для каждого p^+ в некотором диапазоне длин искомым контуров формировался фронт Парето наилучших по X и χ решений. Каждой его точке отвечает свой оптимальный контур кормовой части, в том числе и для длин кормовых частей из [16]. В нижней части табл. 1 даны геометрические характеристики, включая $\zeta_{k\pm} = \tan\theta_{k\pm}$ и $\Delta\zeta_k = \zeta_{k+} - \zeta_{k-}$, значения $|\chi|$ оптимальных решений [16] (“ОММЛ”), значения $|\chi|$, найденные прямым методом (“ГА”) с кривыми Бернштейна–Безье третьего порядка, и отличия Δ в процентах результатов прямого метода от результатов [16]. Согласно табл. 1, отличие координат x_k , y_k и y_b не превышает 3.2% при заметно большем отличии $\zeta_{k\pm}$ (до 13%) и $\Delta\zeta_k$ (до 28%) и не превышающем 0.4% отличии оптимизируемой характеристики $|\chi|$. При том, что преимущество $\delta|\chi|$ оптимальных контуров [16] над гладкими, близкими к оптимальным контурами составляет от 3.2 до 4.6%. На рис. 4 сплошные ломаные с маркерами (цифры 3–5 – номера вариантов) – зависимости ζ от $x^\circ = x/X$ для контуров из [16]. Те же маркеры со штриховыми ломаными дают величины ζ_{a+} , $\zeta_{k\pm}$, ζ_{b-} и $\zeta = \zeta(x^\circ)$, полученные прямым методом с кривыми Бернштейна–Безье второго порядка. Двумя гладкими кривыми Бернштейна–Безье любого порядка воспроизвести ломаные точного решения невозможно. Однако “в среднем” (по x_k , y_k , y_b и χ) отличия от точных величин малы уже для кривых Бернштейна–Безье второго порядка.

Рисунок 5а дает зависимости $\chi^\circ = \chi/X$ оптимальных контуров от $y_d^\circ = 1/X$. На нем для вариантов № 3 и 5 в плоскости y_d°, χ° представлены фронты Парето, образованные множеством маркеров, отклонения которых от гладких кривых в масштабе рис. 5а неразличимы. Для каждого варианта при $y_d^\circ > y_{d1}^\circ$ величина χ° перестает изменяться. Это происходит тогда, когда область определенности контура ab полностью попадает внутрь пристеночного слоя, и реализуется описанное в разд. 1 оптимальное решение с прямым отрезком ab для равномерного набегающего потока. Величина $X_1 = 1/y_{d1}^\circ$ дает значение длины, при превышении которой тангенциальный разрыв попадает в область определенности отрезка ab . Для вариантов № 3 и 5 $y_{d1}^\circ = 0.749$ и 0.638 , а у оптимальных контуров с $y_d^\circ \geq y_{d1}^\circ$ значения $|\chi_{d1}^\circ| = 0.1660$ и 0.1266 . На рис. 5а точки с такими y_d° и χ° даны треугольниками. Фронты Парето справа от них неотличимы от горизонтальных прямых.

Светлые кружки на рис. 5а дают величины контуров [16] из табл. 1. В пределе $y_d^\circ \rightarrow 0$, который отвечает отсутствию пристеночного слоя, у оптимальных контуров вариантов № 3 и 5 также с прямыми отрезками ab на рис. 5а темными кружками даны величины $|\chi^\circ| = 0.142$ и 0.065 . При

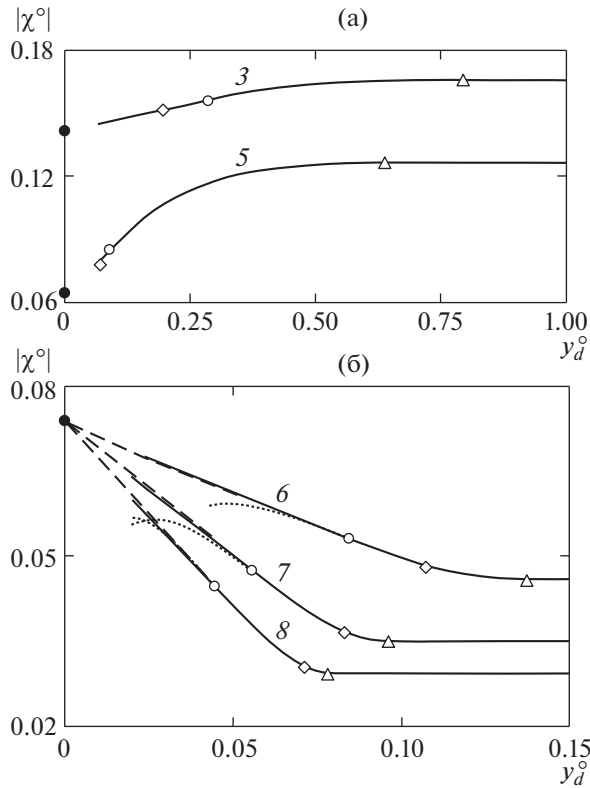


Рис. 5. Множества оптимальных значений $|\chi^\circ|$ в зависимости от высоты пристеночного слоя y_d° : (а) – варианты № 3 и № 5 с $K_\infty > 0$, (б) – варианты № 6–8 с $K_\infty < 0$.

$X > X_2 > X_1$ реализуются решения с внутренним изломом контура ab . Как установлено в [16], оптимальные контуры с изломом появляются при длинах, для которых при $X > X_2$ существует и решение с искривленным гладким участком ab . Для вариантов № 3 и 5 такие решения есть при $y_{d2}^\circ < y_d^\circ < y_{d1}^\circ$ с $y_{d2}^\circ = 0.285$ и 0.070 и отвечающими им значениями $|\chi_{d2}^\circ| = 0.1562$ и 0.0779 . На рис. 5а эти точки даны ромбиками, причем первая лежит на фронте, а вторая (в согласии с [16]) – ниже фронта Парето. Все приведенные в связи с рис. 5а числовые величины – результаты точного решения и расчетов методом характеристик.

3. ОПТИМАЛЬНЫЕ КОРМОВЫЕ ЧАСТИ В НАБЕГАЮЩЕМ ПОТОКЕ С ТАНГЕНЦИАЛЬНЫМИ РАЗРЫВАМИ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ОТРАЖЕНИЯ. НОВОЕ РЕШЕНИЕ

Согласно приведенным выше соображениям изломы оптимальных контуров, обтекаемые со скачками уплотнения, возможны при отрицательных коэффициентах отражения возмущений давления от тангенциального разрыва. Формула (2.5) определяет для $\gamma_+ = \gamma_- = \gamma$ значения чисел Маха, при которых коэффициент отражения положителен или отрицателен. Так, при $M_{\infty+} = 1.2$ коэффициент отражения $K_\infty \geq 0$ для $1.2 \leq M_{\infty-} \leq 1.809$ и отрицателен для иных значений $M_{\infty-}$. В выполненных ниже расчетах $M_{\infty+} = 1.2$, а числа Маха в пристеночном слое $M_{\infty-} > 1.809$. Далее при прежнем масштабе длины, в отличие от разд. 2, за масштабы скорости и плотности взяты их критические величины во внешнем потоке. Поэтому безразмерные значения $y_d = V_{* \infty+} = \rho_{* \infty+} = 1$, $S_{\infty+} = 1/\gamma$ и $H_{\infty+} = (\gamma + 1)/[2(\gamma - 1)]$. В пристеночном набегающем потоке для всех вариантов $H_{\infty-} = 30$, а значения энтропийной функции, числа Маха и коэффициента отражения приведены в табл. 2 под номерами 6–8 при $p^+ = 0$.

Реализация прямого метода при $K_\infty < 0$ такая же, как при $K_\infty > 0$. Построенные для вариантов № 6–8 с заданием отрезков ak и kb кривыми Бернштейна–Безье второго порядка фронты Парето в плоскости y_d°, χ° представлены на рис. 5б, аналогичном рис. 5а. Найденные для этих вариантов

Таблица 2. Данные вариантов № 6–8

№	6	7	8
$S_{\infty-}$	7.143	3.971	2.650
$M_{\infty-}$	2.73	3.73	4.50
K_{∞}	-0.15	-0.28	-0.36
y_{d1}°	0.137	0.096	0.078
$-\theta_{a1}$	0.209	0.160	0.134
$-\chi_{d1}^{\circ}$	0.0459	0.0351	0.0295
y_{d2}°	0.107	0.083	0.071
$-\theta_{a2}$	0.184	0.130	0.104
$-\chi_{d2}^{\circ}$	0.0482	0.0367	0.0306
y_{d3}°	0.086	0.058	0.045
$-\theta_{a3}$	0.283	0.258	0.244
$-\chi_3^{\circ}$	0.053	0.048	0.045

точные значения y_{d1}° , χ_{d1}° , y_{d2}° и χ_{d2}° , имеющие прежний смысл и данные на рис. 5б такими же маркерами, что на рис. 5а, а также θ_{a1} и θ_{a2} собраны в табл. 2. Пределу $y_d^{\circ} \rightarrow 0$, т.е. отсутствию пристеночного слоя отвечает $|\chi^{\circ}| = 0.074$.

Разное поведение $|\chi^{\circ}|$ при уменьшении высоты пристеночного слоя на рис. 5а и 5б связано с разным соотношением чисел Маха пристеночного и внешнего потоков. Согласно рис. 2 при равномерном набегающем потоке величина $|\chi|$ оптимального контура уменьшается с ростом M_{∞} . При неравномерном набегающем потоке та же тенденция сохраняется с ростом доли высокоскоростного потока в области определенности оптимального контура. Для вариантов № 3 и 5 (рис. 5а) $M_+ > M_-$, и при уменьшении высоты y_d° пристеночного слоя растет доля наружного высокоскоростного потока, что и ведет к уменьшению $|\chi^{\circ}|$. Для вариантов № 6–8 (рис. 5б) $M_- > M_+$, и с уменьшением y_d° доля высокоскоростного пристеночного потока уменьшается, что ведет к росту $|\chi^{\circ}|$.

Идеальное согласование на рис. 5 всех представленных маркерами точных величин с фронтами Парето – веский аргумент в пользу достоверности не только этих, но и иных результатов, получаемых развитым прямым методом. Самым интересным и неожиданным из таких (“иных”) результатов стали новые решения вместо “предсказанного” еще в [16] и изображенного на рис. 3г решения с изломом, обтекаемым с внутренним скачком kw . Это поясняют рис. 6а и 6б с обтеканием набегающим потоком, отвечающим варианту № 8, двух типичных, близких к оптимальным кормовых частей с $X = 22$ и $p^+ = 0$. При разных масштабах по осям x и y на рис. 6 показаны построенные кормовые части и с шагом $\Delta M = 0.05$ – изомахи сверхзвукового течения вблизи них. Во внешнем потоке до ударной волны (сгущения изомахи) в правых частях рис. 6а и 6б и частично в пристеночном слое изомахи совпадают с C^+ -характеристиками. Рисунок 6 демонстрирует высокое качество счета. Действительно, тангенциальный разрыв не размazan, а смещение от правильного положения ad начальной C^+ -характеристики пучка волн разрежения, связанный с попаданием ближайшей окрестности фокуса этого пучка в одну ячейку, мал.

Контуров кормовых частей, представленных на рис. 6а и 6б, отличаются только значениями порядков кривых Бернштейна–Безье, аппроксимирующих в прямом методе гладкие отрезки ak и kb , стыкующиеся с ожидаемым изломом в точке k . При построении первой кормовой части (рис. 6а) они были второго порядка, а при построении второй (рис. 6б) – третьего, т.е. уточняющими предыдущие результаты. Необходимость такого уточнения вытекала из анализа решений, полученных с применением кривых Бернштейна–Безье второго порядка, причем не только для $X = 22$, но и для других X . Важная особенность всех таких решений, хорошо видная на рис. 6а, – малый излом в точке k , а следовательно, малая интенсивность возникающего при его обтекании косоугольного скачка (kw на рис. 3г) при в разы более интенсивной непрерывной волне сжатия, форми-

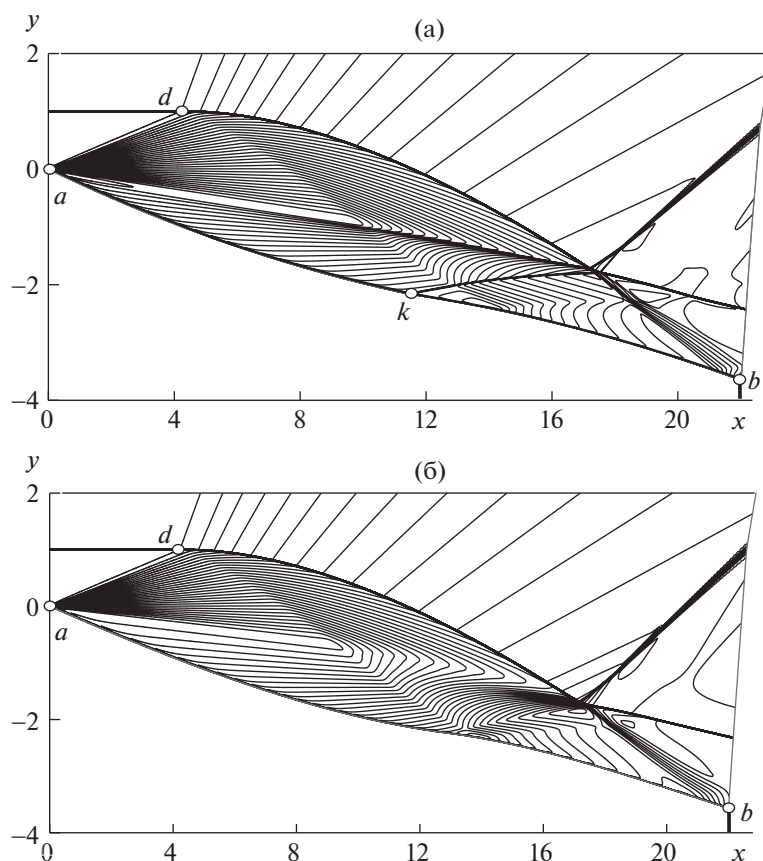


Рис. 6. Изомахи (первые слева: $M = 4.5$ и 1.2 , $\Delta M = 0.05$) при обтекании близких к оптимальным кормовых частей длины ($X = 22$), построенных с помощью кривых Бернштейна–Безье второго (а) и третьего (б) порядков.

рующей при обтекании криволинейного (вогнутого) контура ak . Взаимодействие интенсивной волны сжатия, слабого косоугольного скачка и тангенциального разрыва приводит к формированию интенсивного скачка во внешнем потоке и близкой к центрированной волны разрежения в высокоскоростном пристеночном слое. В случае рис. 6а $\Delta \zeta_k \approx -0.04$, $\Delta p_k \approx 0.2$, а разность давлений на скачке во внешнем потоке $\Delta p_{w+} \approx 1$.

При построении оптимальных кормовых частей с применением кривых Бернштейна–Безье третьего порядка получающиеся в результате генетической эволюции контуры имели практически гладкий участок ab , поскольку интенсивность $\Delta \zeta$ излома в точке k построенных контуров лежала в пределах $(-2-1) \times 10^{-4}$. Их обтекание (рис. 6б) показало, что в данном случае оптимален не контур с изломом и внутренним скачком, а контур, при обтекании гладкого участка ab которого формируется центрированная волна сжатия с фокусом на тангенциальном разрыве. Получающиеся оптимальный контур и течение, схема которых представлена на рис. 7а, так же как контуры и схемы течения, изображенные на рис. 3б и 3г, не бракуются варьированием в характеристических полосках. К тому же, в отличие от решений с контурами, имеющими любые внутренние изломы, условия оптимальности новых решений будут получены переходом к контрольному контуру.

Впервые в вариационные задачи сверхзвуковой газовой динамики центрированную волну сжатия с фокусом на замыкающей характеристике области определенности искомого контура ввел Ю.Д. Шмыглевский [31, 32], рассматривавший течения совершенного газа (см. также [6]). Выполненное в [33] обобщение на произвольный двупараметрический газ продемонстрировало серьезное упрощение выводов и результатов при таком, более общем подходе. Дальнейшие упрощения при решении тех же задач дал переход [5] от применявшегося в [31–33] “характеристического контрольного контура” к “неопределенному контрольному контуру” (см. также [1]).

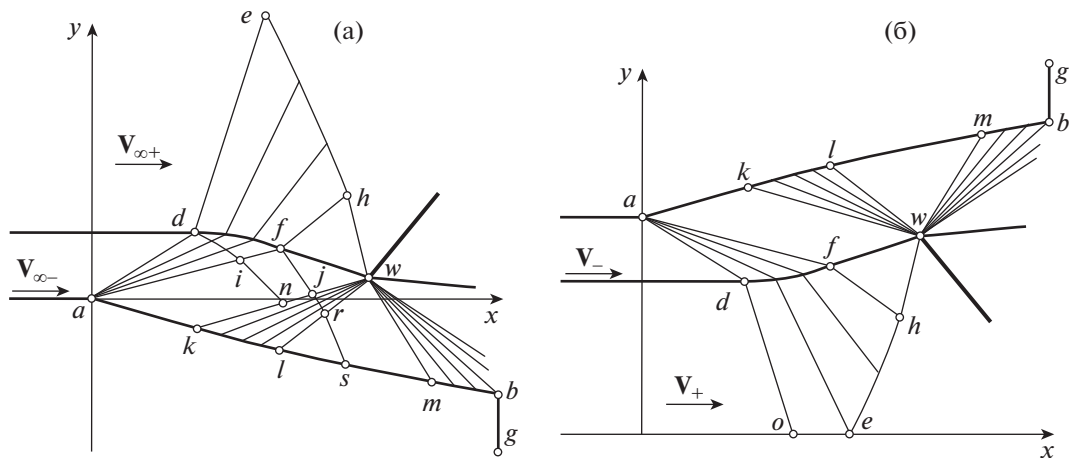


Рис. 7. Схемы обтекания с тангенциальным разрывом ($K_w < 0$) оптимальных контуров кормой части (а) и сверхзвуковой части сопла (б). Тонкие линии – отрезки C^\pm -характеристики.

Во “внешней” (о контуре кормовой части) и “внутренней” (о контуре сопла) задачах [31–33] с решениями, содержащими пучки волн сжатия, тангенциального разрыва в набегающем потоке не было. Фокус центрированной волны мог совпадать с точкой h рис. 3 и 7а и с такой же точкой внутренней задачи (рис. 7б). Из точки h так же, как из точки w рис. 7, выходили косой скачок и пучок волн разрежения, одна из характеристик которого приходила в точку b искомого контура. Контрольный контур, через интегралы по которому выражалась x -компонента интеграла сил давления χ , действующих на контур ab , включал отрезки характеристик ae , eh и hb (в “методе неопределенного контрольного контура” отрезок “неопределенной кривой” hb становится характеристикой в процессе решения). В выражении для приращения χ появляются слагаемые, пропорциональные смещениям точки h : $\Delta\chi = \dots + A_h\Delta y_h + B_h\Delta\psi_h$. Результат – условия оптимальности, которые должны выполняться в этой точке [5, 33]

$$[p]_h \pm (\rho V^2 \sin^2 \theta \tan \mu)_{h-} [\cot \theta]_h = 0,$$

$$[V \cos \theta]_h \mp (\rho V^2 \sin^2 \theta \tan \mu)_{h-} \left[\frac{1}{\rho V \sin \theta} \right]_h = 0$$

Здесь $[\varphi]_h = \varphi_{h+} - \varphi_{h-}$, а φ_{h-} и φ_{h+} – предельные значения φ при подходе к точке h от точек b и e , верхние (нижние) знаки отвечают внешней (внутренней) задаче.

Аналогично из-за смещения фокуса пучка волн сжатия (точки w на рис. 7) на тангенциальном разрыве (при фиксированной функции тока $\psi_w = \psi_d$) в выражении для приращения χ появляется слагаемое: $\Delta\chi = \dots + A_w\Delta y_w$ с коэффициентом, отличающимся от A_h только индексом. Поэтому одно из условий, которое должно выполняться в точке w , как и в [5, 33], это

$$[p]_w + (\rho V^2 \sin^2 \theta \tan \mu)_{w+} [\cot \theta]_w = 0 \quad (3.1)$$

Кроме того, на hw и wb выполняется равенство (2.2) с единой константой λ . Как следствие в точке w должно выполняться еще одно условие

$$[\rho V^2 \sin^2 \theta \tan \mu]_w = 0 \quad (3.2)$$

Здесь и в (3.1) $[\varphi]_w = \varphi_{w+} - \varphi_{w-}$, а φ_{w-} и φ_{w+} – предельные значения φ при подходе к точке w по отрезкам C^- -характеристики bw_- и hw_+ соответственно.

Условиям (3.1) и (3.2) отвечают два произвола в выборе интенсивности волны сжатия и C^- -характеристики w_b в отраженной волне разрежения, возникающей вместе с косым скачком. Равенство числа условий и произволов – дополнительный аргумент в пользу решения, подсказанного изомахами рис. 6.

При заданном набегающем потоке и выбранных изломе контура в точке a и точки e на начальной C^+ -характеристике (или точки h – на замыкающей характеристике начальной волны разре-

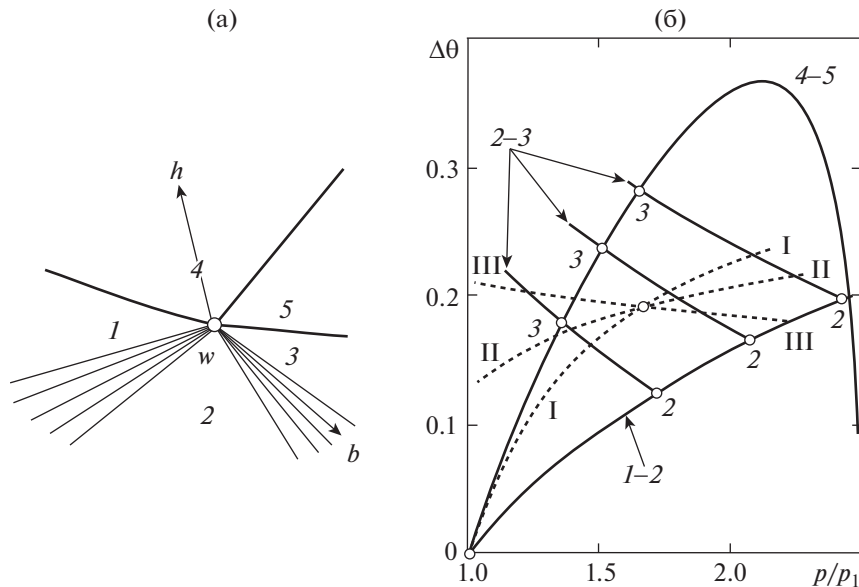


Рис. 8. Построение разрывных безударных решений: (а) – нумерация областей течения, (б) – решение уравнений (3.1) – I, (3.2) – II и (4.3) с $p^+ = 0$ – III.

жения) построение нового решения (рис. 7а) начинается с расчета методом характеристик волны разрежения, ограниченной отрезками характеристик ad, de, ai, if, fh и he . В этой волне потоки вне треугольника $ifdi$ – простые волны с прямыми C^+ -характеристиками. Произволы, эквивалентные выбору замыкающей C^+ -характеристики начальной волны разрежения и точки h на ней, позволяют удовлетворить двум условиям в точке b : равенству $x_b = X$ и условию Буземана (1.2) или равенству: $y_b = y_g$.

При обтекании оптимальной плоской кормовой части параметры на отрезке C^- -характеристики hw_+ постоянны, а под тангенциальным разрывом слева от точки w при непрерывных p и θ на нем определяются интегралами (2.3). При этом параметры потока в треугольниках $fhwf$ и fwf постоянны с одинаковыми p и θ , в четырехугольнике $inifi$ – простая волна с прямыми C^- -характеристиками, поток в четырехугольнике $aknia$ поступательный, а отрезок ak контура ab прямой. Кроме рассчитываемой методом характеристик части волны разрежения, при построении точного решения используются параметры лишь на прямых отрезках C^- -характеристики hw_+ и bw_- . Косой скачок и волны сжатия и разрежения рассчитываются только в точке w . Поэтому здесь и далее детали течения в $afhwba$ приводятся лишь для полноты изложения.

В рассматриваемых вариантах набегающего потока $K_w < 0$, и параметры в точках w_- и w_+ с непрерывными p и θ , т.е. при отсутствии пучка волн сжатия, удовлетворяя условию (3.1), не будут удовлетворять условию (3.2). Произволы в задании роста p в волне сжатия и выбора C^- -характеристики в волне разрежения в принципе позволяют найти параметры в точке w_- , удовлетворяющие условиям (3.1) и (3.2). Для оптимального контура плоской кормовой части они сохраняются на всей C^- -характеристике w_-b . Как следствие, течение в bw_-lb – простая волна с прямыми C^- -характеристиками, а частично (заведомо, в $mwrsm$) – поступательный поток.

4. ПОСТРОЕНИЕ НОВЫХ РАЗРЫВНЫХ БЕЗУДАРНЫХ РЕШЕНИЙ

Порядок построения искомого решения поясняет рис. 8 с нумерацией областей (а) вокруг точки w . Параметры с индексами “1” и “4” такие же, как в точке f , и для непрерывных на тангенциальном разрыве p и θ имеем

$$p_{w+} = p_4 = p_1 = p_f, \quad \theta_{w+} = \theta_4 = \theta_1 = \theta_f, \quad p_5 = p_3, \quad \theta_5 = \theta_3 \tag{4.1}$$

С учетом этих равенств и условия (3.2) условие (3.1) перепишем в форме

$$(p_{w-} - p_1) + (\rho V^2 \sin^2 \theta \tan \mu)_{w-} (\cot \theta_{w-} - \cot \theta_1) = 0 \quad (4.2)$$

Если излом контура в точке a фиксирован, то при росте длины отрезка fh прямого замыкающего луча S^+ -характеристики волны разрежения параметры с индексами “1” и “4” не изменяются. Не изменяются и определяемые по ним условиями (3.1) и (3.2) параметры с индексом “ $w-$ ” на прямолинейном отрезке w_b экстремальной характеристики, и величина донного давления p^+ , удовлетворяющая условию Буземана (1.2) с $p_b = p_{w-}$, $\theta_b = \theta_{w-}$, ...

$$p_{w-} + (\rho V^2 \sin \theta \cos \theta \tan \mu)_{w-} = p^+ \quad (4.3)$$

В противоположность им длина кормовой части X и величина χ – линейные функции разности ординат $(y_w - y_f)$ точек прямого отрезка fw в силу формул

$$\begin{aligned} X &= X_3 + (y_w - y_f) \cot \theta_f, & X_3 &= \int_a^f \cot(\theta + \mu) dy - \\ &- (y_w - y_b) \cot(\theta - \mu)_{w-}, & y_w - y_b &= \frac{(\rho V)_{\infty-} \sin(\mu - \theta)_{w-}}{(\rho V \sin \mu)_{w-}} \\ \chi &= \int_a^f p dy + (y_g - y_b) p^+ = \chi_3 + (y_w - y_f) p_f + (y_g - y_b) p^+ \\ \chi_3 &= \int_a^f \left[p + \frac{\rho V^2 \sin \mu}{\sin(\theta + \mu)} \right] dy - (y_w - y_b) \left[p - \frac{\rho V^2 \sin \mu}{\sin(\theta - \mu)} \right]_{w-} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Входящие в них интегралы – функции $y_f < 1$ вычисляются при расчете с привлечением метода характеристик начальной волны разрежения.

Для выбранных набегающего потока и начального излома в силу структуры формул (4.4) решение возникшей задачи начинается с построения оптимальной кормовой части с $X = X_3$. Определение X_3 , χ_3 и отвечающих им величин p^+ , как функций y_f , включает решение уравнений (3.1) и (3.2). С учетом этого и равенств (4.1) на рис. 8б в плоскости p/p_1 , $\Delta\theta$ приведены выходящие из точки $p/p_1 = 1$, $\Delta\theta \equiv \theta - \theta_1 = 0$ кривые “1–2” и “4–5”, описывающие поворот сверхзвуковых потоков в волне сжатия и в косом скачке. Рисунок 8б отвечает углу $\theta_{a+} = -0.244$ и $X = X_3 \approx 22$ варианта № 8. Кривые “2–3”, выходящие из любой точки 2 кривой “1–2”, описывают поворот нижнего потока в волне разрежения. Точки 3 пересечения кривых “2–3” и “4–5” решают задачу взаимодействия пучка сжатия с тангенциальным разрывом, но не уравнения (3.1) и (3.2).

Выполнению условий (3.1) и (3.2) отвечают соответственно пунктирные кривые “I” и “II”. Точка их пересечения дает значения p_{w-} и θ_{w-} в точке w_- и на всей оптимальной характеристике w_b . Далее по $p_b = p_{w-}$ и заданным $S_{\infty-}$ и $H_{\infty-}$ находятся ρ_b , V_b и μ_b , а по ним величина донного давления p^+ , удовлетворяющая условию Буземана (1.2).

Если получившееся p^+ отрицательно или положительно, но меньше заданной величины, то это значит, что излом в точке a нужно уменьшить. В противном случае излом надо увеличить так, чтобы p^+ стало равно заданной величине, например, нулю. Получившиеся в вариантах № 6–8 для $p^+ = 0$ изломы θ_{a3} в начальных точках оптимальных контуров и значения $y_{d3}^{\circ} = X_3^{-1}$ и χ_3° собраны в табл. 2. На рис. 5б точки $y_d^{\circ} = y_{d3}^{\circ}$ и $\chi^{\circ} = \chi_3^{\circ}$ даны светлыми кружками. Определенные формулами (4.4) значения X и χ длинных ($X \geq X_3$) оптимальных кормовых частей дают $y_d^{\circ} = 1/X$ и $\chi^{\circ} = \chi/X$. Полученные штриховые линии идут на рис. 5б от светлых кружков до темного. Следовательно, на участках фронтов Парето от ромбиков до светлых кружков описанное выше точное решение не работает.

Найти недостающее решение вновь помог анализ результатов прямого метода оптимизации на основе кривых Бернштейна–Безье третьего порядка для кормовых частей двух длин $X = 26$ и 18 при невозмущенном потоке варианта № 8. Если рис. 9а для $X = 26 > X_3 \approx 22$ подтвердил правильность построенного решения с прямолинейным участком fw тангенциального разрыва, прямолинейным участком экстремали hw и областью постоянных параметров между ними, при этом $y_h \geq y_w$ (равенство только при $X = X_3$), то рис. 9б для $X = 18 < X_3$ подсказал второе новое решение.

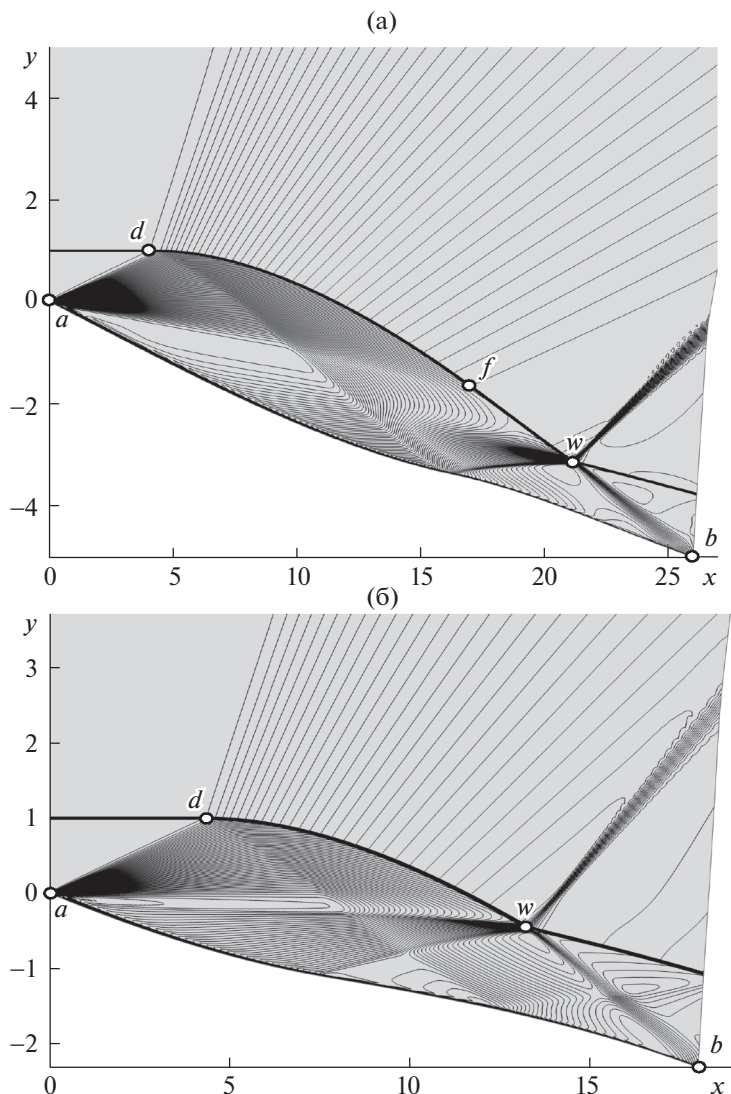


Рис. 9. Изомахи (первые слева: $M = 4.5$ и 1.2 , $\Delta M = 0.02$) при обтекании невозмущенным потоком варианта № 8 кормовых частей длин $X = 26$ (а) и 18 (б), построенных прямым методом с кривыми Бернштейна–Безье третьего порядка.

Его отличие от первого – отсутствие указанных участков и связанной с ними необходимости выполнения условия (3.2). Остаются условия (3.1) и (4.3) и пересечение кривых I и III на рис. 8б, построенных для $X_2 < X < X_3$. Рисунок 8б с пересечением трех кривых I, II и III в одной точке демонстрирует гладкую стыковку двух новых решений при этой длине. При больших длинах новые решения существуют одновременно с первыми, уступая им в величине критерия оптимизации. На рис. 5б кривые второго решения (пунктирные линии) видны только при X , заметно превышающих X_3 , где они уступают первому решению. При всех X трудно различимое на рис. 5 превосходство лучших кривых точных решений над фронтами Парето – свидетельство совершенства прямого метода.

5. ОБОБЩЕНИЯ НА ОПТИМАЛЬНЫЕ КОНТУРЫ КОРМОВЫХ ЧАСТЕЙ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ И СВЕРХЗВУКОВЫХ ЧАСТЕЙ СОПЕЛ

Естественны обобщения новых решений, во-первых, на тела вращения. Для этого формулы и уравнения (1.1), (2.1) и (2.2) нужно переписать в виде

$$\chi = \int_a^b y^{v-1} p dy + \frac{y_g^v - y_b^v}{v} p^+$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta - \mu), \quad d\theta - \frac{\cot\mu}{\rho V^2} dp - \frac{(v-1)\sin\theta\sin\mu}{y\sin(\theta-\mu)} dy = 0, \quad \frac{dx}{d\psi} = \frac{-\cos(\theta-\mu)}{ky^{v-1}\rho V\sin\mu} \quad (5.1)$$

$$y^{v-1}\rho V^2\sin^2\theta\tan\mu = \lambda$$

В плоском случае $v = 1$, в осесимметричном $v = 2$ и y – радиальная координата. Оставив без изменения остальные равенства разд. 2 и 3 и почти все сказанное в связи с ними, приходим к задаче об оптимальной кормовой части тела вращения. Основное отличие второго случая от первого в переменности параметров на отрезках hw_+ и w_-b экстремальной C^- -характеристики и в отсутствие простых волн и поступательных потоков. В обоих случаях набегающий поток может быть неравномерным, неосевым и не кусочно постоянным по $H(\psi)$ и $S(\psi)$. Все это несущественно. Главное в том, что методом характеристик считается только по-прежнему центрированная, но теперь целиком не простая волна разрежения, ограниченная C^+ -характеристиками ade и afh .

Далее, с теми же, что при $v = 1$, волнами сжатия и разрежения и косым скачком ищется точка w_- волны разрежения с параметрами, удовлетворяющими условиям (3.1) и (3.2). Параметры на hw_+ определяет задача Коши с начальной точкой h для дифференциальных уравнений и проинтегрированного пятого уравнения (5.1). Решение такой же задачи от точки w_- определяет параметры на отрезке w_-b . Одновременно считаются контурные интегралы по тем же отрезкам, которые вместе с интегралом по ah , вычисленным при счете волны разрежения $ahca$, определяют в силу интегрального закона сохранения x -компоненты количества движения первое слагаемое в формуле для χ из (5.1). Оптимальная образующая ab строится как линия тока $\psi = 0$ решения задачи Гурса методом характеристик с данными на характеристиках afh и hwb .

При наличии тангенциального разрыва с отрицательным коэффициентом отражения проверка возможности разрывного безударного решения сводится к описанным выше стандартным действиям. При расчете методом характеристик только начальной волны разрежения они несравненно проще решения той же задачи развитым прямым методом при всем его совершенстве и точности.

Другое обобщение относится к внутренней задаче – построению контура сверхзвуковой части плоского или осесимметричного сопла, реализующего максимум тяги при наличии во входном трансзвуковом потоке тангенциального разрыва с отрицательным коэффициентом отражения. Схема такого течения дана на рис. 7б с осью x , направленной по плоскости или оси симметрии сопла, и с векторами скорости без индекса “ ∞ ”. В общем случае все характеристики криволинейные. Во внутренней задаче, в отличие от внешней, индекс “ $-$ ” (“ $+$ ”) метит параметры над (под) разрывом (“ $-$ ” по-прежнему в пристеночном слое), а C^+ - и C^- -характеристики меняются местами, так, hw_+ и w_-b – здесь отрезки C^+ -характеристики. Теперь условия (1.2) в точке b и (3.1) в точке w и дифференциальные уравнения, справедливые на C^+ -характеристике hwb , принимают вид:

$$p_{b-} - (\rho V^2 \sin\theta \cos\theta \tan\mu)_{b-} = p^+, \quad [p]_w - (\rho V^2 \sin^2\theta \tan\mu)_{w+} [\cot\theta]_w = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta + \mu), \quad d\theta + \frac{\cot\mu}{\rho V^2} dp + \frac{(v-1)\sin\theta\sin\mu}{y\sin(\theta+\mu)} dy = 0, \quad \frac{dx}{d\psi} = \frac{\cos(\theta+\mu)}{ky^{v-1}\rho V\sin\mu}$$

Прочие уравнения и условия, включая первое и последнее равенства (5.1) и условие (3.2), не изменяются.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование, инициированное неверным решением известной простой вариационной задачи, сначала привело авторов к задаче с тангенциальным разрывом, в которой ожидался излом оптимального контура, обтекаемый с внутренним скачком. Однако прямой метод, созданный для ее решения, обнаружил гладкий контур и центрированную волну сжатия с фокусом на тангенциальном разрыве. Из фокуса вниз по потоку выходят косой скачок и центрированная волна разрежения. Одна из ее характеристик приходит в концевую точку искомого контура. Решение с фокусом центрированных волн в начальной точке экстремальной характеристики в вариационные задачи газовой динамики (без тангенциального разрыва) ввел Ю.Д. Шмыглевский [31, 32]. Это решение, названное “разрывным безударным” из-за того, что появляющийся в нем косой скачок располагается вне области определенности оптимального контура, встречается при построении сопел больших степеней расширения.

Если набегающие равномерные сверхзвуковые пристеночный и внешний потоки при тангенциальном разрыве с отрицательным коэффициентом отражения и донное давление фиксированы, то с ростом длины X реализуются различные гладкие участки ab плоских кормовых частей минимального сопротивления. При $0 \leq X \leq X_1$ участки ab прямые. При $X_1 \leq X \leq X_2$ участок ab в окрестности точки b искривлен. При $X_2 \leq X \leq X_3$ участок ab в окрестности точки a искривлен так, что идущие от него C^+ -характеристики фокусируются в точке w , совпадающей с f . При $X > X_3$ появляются (рис. 7а) прямые отрезки fw и ak тангенциального разрыва и оптимального контура ab .

В свете построенных решений, с заменой ожидаемых внутренних скачков пучками волн сжатия, такая же замена вполне вероятна и для внутренних изломов оптимальных головных частей при отрицательном коэффициенте отражения в соответствующей точке головного скачка. Однако из-за малости этих изломов подобная замена интересна лишь для теории.

Итак, построение новых безударных решений и анализ всего многообразия известных оптимальных конфигураций позволяют заключить, что единственные оптимальные конфигурации с внутренними скачками заметной интенсивности — это каналы с большими углами поворота потока (в частности, тарельчатые сопла), начальный участок одной из стенок которых — изобарическая линия тока с $M = M_m \geq 1$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов № 19-01-00671 и 20-01-00100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крайко А.Н. Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: Торус-пресс, 2010. 440 с.
2. Черный Г.Г. Сверхзвуковое обтекание профиля, близкого к клину // Тр. ЦИАМ. 1950. № 197. 11 с. = Газовая динамика. Избранное. В 2-х т. Изд. 2-е, испр. Т. 1 / Ред.-составитель А.Н. Крайко. М.: Физматлит, 2005. С. 443–462.
3. Черный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
4. Шипилин А.В. Вариационные задачи газовой динамики с присоединенными ударными волнами / Сб. теоретических работ по гидромеханике. М.: Труды ВЦ АН СССР, 1970. С. 54–106.
5. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
6. Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.
7. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е. К построению оптимального контура головной части тела в сверхзвуковом потоке // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 419–434.
8. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Якунина Г.Е. Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным. М.: “ЯНУС-К”, 2001. 132 с.
9. Крайко А.Н., Теляковский А.С., Тилляева Н.И. Профилирование оптимального контура сверхзвукового сопла при значительном повороте потока // ЖВМиМФ. 1994. Т. 34. № 10. С. 1444–1460.
10. Крайко А.Н., Тилляева Н.И. Оптимальное профилирование контура сверхзвуковой части тарельчатого сопла // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 6. С. 172–184.
11. Крайко А.Н., Пьянков К.С., Тилляева Н.И. Профилирование сверхзвуковой части тарельчатого сопла при неравномерном трансзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 4. С. 145–157.
12. Мустаев А.Р., Остапенко Н.А. Плоские контура с максимальной тягой в неизэнтропическом потоке // Тез. докл. “Всероссийской конференции молодых ученых-механиков (YSM-2018)”. Сочи, “Буревестник” МГУ, 4–14 сентября 2018. М.: МГУ, 2018. С. 125.
13. Мустаев А.Р., Остапенко Н.А. Ударные контура максимальной тяги // Тез. докл. Всероссийской школы-семинара “Современные проблемы аэрогидродинамики”. Сочи, “Буревестник” МГУ, 5–15 сентября 2019. М.: МГУ, 2019. С. 79.
14. Гогиш Л.В. Исследование коротких сверхзвуковых сопел // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 2. С. 175–180.
15. Крайко А.Н., Мельников Д.А., Пирумов У.Г., Сергиенко А.А., Стернин Л.Е., Шмыглевский Ю.Д. Замечания к статье Л.В. Гогиша “Исследование коротких сверхзвуковых сопел” (Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 2. С. 175–180) — письмо в редакцию // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 185–186.
16. Крайко А.Н., Тилляева Н.И. К построению контура минимального волнового сопротивления в неоднородном сверхзвуковом потоке // ПММ. 1973. № 3. С. 469–487.
17. Гудерлей К.Г., Армтейдж Д.В. Общий метод построения оптимальных ракетных сопел / В кн. Теория оптимальных аэродинамических форм / Пер. с англ. под ред. А.Л. Гонора. М.: Мир, 1969. С. 172–194.
18. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 2. С. 285–295.

19. *Крайко А.Н.* К решению вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 2. С. 312–320.
20. *Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Многокритериальная многодисциплинарная оптимизация лопатки рабочего колеса вентилятора на основе генетического алгоритма // ТВФ. 2010. № 3. С. 58–67.
21. *Крайко А.А., Пьянков К.С., Тилляева Н.И., Топорков М.Н.* Оптимизация биротативного вентилятора с учетом напряженно-деформированного состояния на основе генетического алгоритма // ТВФ. 2014. № 1. С. 22–34.
22. *Крайко А.А., Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Профилирование двусторонних несимметричных плоских сопел максимальной тяги // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 1. С. 115–120.
23. *Тилляева Н.И.* Сравнение эффективности штыревых и комбинированных кольцевых сопел // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 4. С. 140–152.
24. *Крайко А.Н., Наумова И.Н., Шмыглевский Ю.Д.* К построению тел оптимальной формы в сверхзвуковом потоке // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 178–182.
25. *Большаинов И.П., Захаров Н.Н., Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Оптимальные осесимметричные головные части обтекаемых тел: расчеты и эксперимент // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 2. С. 120–127.
26. *Иванов М.Я., Крайко А.Н., Михайлов Н.В.* Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений. I // ЖВМиМФ. 1972. Т. 12. № 2. С. 441–463.
27. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
28. *Колган В.П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Учен. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
29. *Родионов А.В.* Повышение порядка аппроксимации схемы С.К. Годунова // Ж. ВМиМФ. 1987. Т. 27. № 12. С. 1853–1860.
30. *Тилляева Н.И.* Обобщение модифицированной схемы С.К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки // Учен. зап. ЦАГИ. 1986. Т. 17. № 2. С. 18–26 = Газовая динамика. Избр. В 2-х т. Изд. 2-е, исправл. Т. 2 / Ред.-составители А.Н. Крайко, А.Б. Ватажин и А.Н. Секундов. М.: Физматлит, 2005. С. 201–210.
31. *Шмыглевский Ю.Д.* Вариационные задачи для сверхзвуковых тел вращения и сопел // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 1. С. 110–125.
32. *Шмыглевский Ю.Д.* Некоторые вариационные задачи газовой динамики. М.: Труды ВЦ АН СССР, 1963. 142 с.
33. *Крайко А.Н.* Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. М.: Труды ВЦ АН СССР, 1963. 84 с.