УДК 532.685

ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОРИСТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2020 г. О. А. Базаркина[a],*, Н. Г. Тактаров[a],**

[a]Мордовский государственный педагогический институт им. М.Е. Евсевьева, Саранск, Россия

*E-mail: o.a.bazarkina@mail.ru

**E-mail: n.g.taktarov@mail.ru

Поступила в редакцию 25.02.2020 г.
После доработки 10.03.2020 г.
Принята к публикации 12.03.2020 г.

Определены течения вязкой жидкости, вызванные вращательными колебаниями погруженной в нее пористой сферической оболочки. В приближении Стокса получены аналитические решения нестационарного уравнения Бринкмана в области внутри пористой оболочки и уравнения Навье–Стокса – вне оболочки. Определен момент сил трения, действующих на контрольную сферическую поверхность вокруг пористого тела. Приведен анализ полученных решений. Рассмотрены различные частные случаи, в том числе случай равномерного вращения оболочки.

Ключевые слова: пористая сферическая оболочка, вращательно-колебательное движение, уравнение Бринкмана

DOI: 10.31857/S0568528120060043

В рамках модели фильтрации Бринкмана рассматриваются течения вязкой жидкости, вызванные вращательно-колебательным движением погруженной в нее пористой сферической оболочки. Подобные задачи могут представлять интерес для изучения некоторых технологических процессов, в которых используются пористые среды [1].

Задачи об обтекании пористых сферических оболочек стационарным потоком вязкой жидкости рассматривались ранее для закона фильтрации Дарси в работах [2, 3]. Поперечное обтекание стационарным потоком вязкой жидкости пористой цилиндрической оболочки и коаксиального с ней сплошного (непроницаемого) цилиндрического ядра исследовано в [4] с использованием уравнения Бринкмана и граничных условий, являющихся частным случаем граничных условий [5].

Целью настоящей работы является определение полей скоростей жидкости в областях внутри и вне пористой сферической оболочки в рамках модели фильтрации Бринкмана в приближении Стокса, а также оценка момента сил трения, действующих на контрольную сферическую поверхность, охватывающую пористую сферическую оболочку, совершающую вращательно-колебательное движение в вязкой жидкости вокруг фиксированной оси.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются течения вязкой жидкости, вызванные вращательно-колебательным движением погруженной в нее пористой сферической оболочки. Внутренний и внешний радиусы пористой сферической оболочки равны соответственно a и b ($a < b$). Предполагается, что пористая среда является однородной, изотропной, недеформируемой, имеет высокий коэффициент проницаемости K и достаточно большую пористость Г. При таких свойствах пористой среды в ней могут возникать колебательные движения жидкости со скоростью, заметно отличающейся от скорости пористой среды.

Угловую скорость вращения пористой сферической оболочки с центром O вокруг фиксированной оси, проходящей через точку O, запишем как функцию от времени t^* в виде $\Omega^* = \Omega_0 \exp(-i\omega t^*)$, где Ω_0 – постоянный вещественный вектор, ω – частота колебаний. Скорость любой точки вращающегося твердого тела с радиусом-вектором $\mathbf{r}^*$, выходящим из точки O, имеет вид: $\mathbf{v}^* = \mathbf{\Omega}^* \times \mathbf{r}^*$. Знаком “*” здесь и далее обозначены размерные переменные (но не размерные параметры), чтобы отличать их от безразмерных, обозначаемых теми же символами. В окончательных результатах везде подразумеваются действительные части комплексных выражений.

Течение вязкой жидкости внутри и вне пористой сферической оболочки, совершающей вращательно-колебательные движения, рассматривается в неподвижной декартовой системе координат $Ox^*y^*z^*$, начало которой совпадает с центром O сферической оболочки. Ось Oz^* этой системы координат направлена вдоль единичного вектора $\mathbf{e} = \mathbf{\Omega}_0/\Omega_0$.

Для решения задачи введем сферическую систему координат r^*, θ, φ с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$, полярная ось которой совмещена с осью Oz^*. Полярный угол θ отсчитывается от положительной полуоси Oz^*.

Величины, относящиеся к областям, занятым свободной жидкостью внутри полости ($0 < r^* < a$), в пористой оболочке ($a < r^* < b$) и вне пористой среды ($r^* > b$), обозначаются индексами 1, 2 и 3 соответственно.

Нестационарные уравнения движения свободной жидкости в областях 1, 3 запишем в приближении Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}_j^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}^* p_j^* + \eta \nabla^{*2}\mathbf{u}_j^*, \quad \operatorname{div}^* \mathbf{u}_j^* = 0 \quad (j = 1,3) \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}_j^*$ – скорость свободной жидкости, p_j^* – давление, ρ – плотность жидкости, η – вязкость свободной (вне пористой среды) жидкости, ∇^* – набла оператор.

Уравнения нестационарного движения вязкой жидкости в пористой среде (область 2) в рамках модели Бринкмана запишем в виде [5–9, 13]

$$\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial \mathbf{u}_2^*}{\partial t^*} = -\operatorname{grad}^* p_2^* + \eta' \nabla^{*2}\mathbf{u}_2^* - \frac{\eta}{K}(\mathbf{u}_2^* - \mathbf{u}^*), \quad \operatorname{div}^* \mathbf{u}_2^* = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $\Gamma = \mathrm{const}$ – пористость, $\mathbf{u}_2^*$ – скорость фильтрации, p_2^* – среднее по объему пор давление, η' – величина с размерностью вязкости, $\mathbf{u}^* = \Gamma \mathbf{v}^*$.

Вследствие осевой симметрии относительно оси вращения давление выпадает из уравнений (1.1), (1.2). Предполагаем, что $u_{j\varphi}^* \neq 0$, $u_{jr}^* = 0$, $u_{j\theta}^* = 0$ ($j = 1, 2, 3$), и что от азимутального угла φ все величины не зависят вследствие осевой симметрии.

Уравнения (1.1), (1.2) в сферической системе координат примут вид

$$\rho\frac{\partial u_{j\varphi}^*}{\partial t^*} = \eta\left(\Delta^* u_{j\varphi}^* - \frac{u_{j\varphi}^*}{r^{*2}\sin^2\theta}\right) \quad (j = 1,3) \tag{1.3}$$

$$\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial u_{2\varphi}^*}{\partial t^*} = \eta'\left(\Delta^* u_{2\varphi}^* - \frac{u_{2\varphi}^*}{r^{*2}\sin^2\theta}\right) - \frac{\eta}{K}(u_{2\varphi}^* - u_\varphi^*)$$

Здесь $u_\varphi^* = \Gamma v_\varphi^*$, $v_\varphi^* = \Omega_0 \exp(-i\omega t^*) r^* \sin\theta$.

Граничные условия к уравнениям (1.3) имеют следующий вид.

На внутренней поверхности пористой оболочки при $r^* = a$

$$u_{1\varphi}^* - v_\varphi^* = u_{2\varphi}^* - \Gamma v_\varphi^* \tag{1.4}$$

$$\Lambda\left[\eta'\left(\frac{\partial(u_{2\varphi}^* - \Gamma v_\varphi^*)}{\partial r^*} - \frac{u_{2\varphi}^* - \Gamma v_\varphi^*}{a}\right) - \eta\left(\frac{\partial(u_{1\varphi}^* - v_\varphi^*)}{\partial r^*} - \frac{u_{1\varphi}^* - v_\varphi^*}{a}\right)\right] = -\eta(u_{2\varphi}^* - \Gamma v_\varphi^*)$$

На внешней поверхности пористой оболочки при $r^* = b$

$$u_{2\varphi}^* - \Gamma v_\varphi^* = u_{3\varphi}^* - v_\varphi^*$$

$$\Lambda\left[\eta'\left(\frac{\partial(u_{2\varphi}^* - \Gamma v_\varphi^*)}{\partial r^*} - \frac{u_{2\varphi}^* - \Gamma v_\varphi^*}{b}\right) - \eta\left(\frac{\partial(u_{3\varphi}^* - v_\varphi^*)}{\partial r^*} - \frac{u_{3\varphi}^* - v_\varphi^*}{b}\right)\right] = \eta(u_{2\varphi}^* - \Gamma v_\varphi^*)$$

Здесь Λ – параметр с размерностью длины. Параметр Λ определяется равенством $\Lambda = \sqrt{K}/\tau$, где τ – безразмерный параметр, характеризующий свойства пористой среды [5–7]. Отметим, что граничные условия (1.4) являются обобщением граничных условий, приведенных в [5–7, 10, 11] для неподвижной плоской поверхности раздела пористой среды и жидкости, на случай движущейся сферической поверхности.

К граничным условиям (1.4) следует добавить также условие конечности решений всюду в областях их определения, в том числе при $r^* \to 0$ и $r^* \to \infty$.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Введем безразмерные переменные, принимая за единицу длины b, за единицу времени $1/\omega$, за единицу скорости $v_0 = \Omega_0 b$: $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*/b$, $t = \omega t^*$, $\mathbf{u}_{1\varphi} = \mathbf{u}^*_{1\varphi}/v_0$, $\mathbf{u}_{2\varphi} = \mathbf{u}^*_{2\varphi}/v_0$, $\mathbf{u}_{3\varphi} = \mathbf{u}^*_{3\varphi}/v_0$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*/v_0 = \Gamma(\mathbf{e}\times\mathbf{r})\exp(-it)$.

Уравнения (1.3) движения жидкости в безразмерном виде в областях 1 ($0 < r < \alpha$), 2 ($\alpha < r < 1$), 3 ($r > 1$) примут вид

$$\frac{\omega b^2}{\nu}\frac{\partial u_{j\varphi}}{\partial t} = \Delta u_{j\varphi} - \frac{u_{j\varphi}}{r^2\sin^2\theta} \quad (j = 1, 3) \tag{2.1}$$

$$\frac{\omega b^2}{\Gamma\nu}\frac{\partial u_{2\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma^2}\left[\Delta u_{2\varphi} - \frac{u_{2\varphi}}{r^2\sin^2\theta}\right] - \frac{b^2}{K}(u_{2\varphi} - \Gamma r\sin\theta e^{-it})$$

Здесь $\alpha = a/b$ ($\alpha < 1$), $\gamma^2 = \eta/\eta'$, $\nu = \eta/\rho$,

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)$$

Безразмерные граничные условия

$$\text{при}\quad r = \alpha{:}\ u_{1\varphi} - v_\varphi = u_{2\varphi} - \Gamma v_\varphi, \quad v_\varphi = \alpha e^{-it}\sin\theta \tag{2.2}$$

$$\lambda\left[\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{\partial u_{2\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{2\varphi}}{\alpha}\right) - \left(\frac{\partial u_{1\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{1\varphi}}{\alpha}\right)\right] = -(u_{2\varphi} - \Gamma\alpha\sin\theta e^{-it})$$

$$\text{при}\quad r = 1{:}\ u_{2\varphi} - \Gamma v_\varphi = u_{3\varphi} - v_\varphi, \quad v_\varphi = e^{-it}\sin\theta$$

$$\lambda\left[\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{\partial u_{2\varphi}}{\partial r} - u_{2\varphi}\right) - \left(\frac{\partial u_{3\varphi}}{\partial r} - u_{3\varphi}\right)\right] = u_{2\varphi} - \Gamma\sin\theta e^{-it}$$

$$\text{при}\quad r \to \infty{:}\ u_{3\varphi} = 0$$

Здесь $\lambda = \Lambda/b$.

Скорость жидкости в областях 1, 2, 3 будем искать в виде [12, §24]

$$u_{1\varphi} = e^{-it}F_1(r)\sin\theta, \quad u_{2\varphi} = e^{-it}F_2(r)\sin\theta, \quad u_{3\varphi} = e^{-it}F_3(r)\sin\theta$$

Подставляя в (2.1) выражения для $u_{1\varphi}$, $u_{2\varphi}$ и $u_{3\varphi}$, получим уравнения для определения функций $F_1(r)$, $F_2(r)$ и $F_3(r)$. Граничные условия к этим уравнениям имеют вид

$$\text{при}\quad r = \alpha{:}\ F_1(r) - F_2(r) = \alpha(1 - \Gamma) \tag{2.3}$$

$$\lambda\left[\frac{1}{\gamma^2}\left(F_2'(r) - \frac{F_2(r)}{\alpha}\right) - \left(F_1'(r) - \frac{F_1(r)}{\alpha}\right)\right] = -F_2(r) + \alpha\Gamma$$

$$\text{при}\quad r = 1{:}\ F_2(r) - F_3(r) = \Gamma - 1$$

$$\lambda\left[\frac{1}{\gamma^2}(F_2'(r) - F_2(r)) - (F_3'(r) - F_3(r))\right] = F_2(r) - \Gamma$$

Сюда добавляется также условие конечности решений в областях их определения.

Уравнение для $F_1(r)$ имеет вид

$$r^2 F_1''(r) + 2rF_1'(r) + (m_2^2 r^2 - 2)F_1(r) = 0 \tag{2.4}$$

где $m_2^2 = 2i\left(b/\delta_2\right)^2$, $m_2 = (b/\delta_2)(1+i)$.

Конечное при $r \to 0$ решение уравнения (2.4) имеет вид

$$F_1(r) = \frac{A_1}{m_2^2 r^2}\left(\sin m_2 r - m_2 r \cos m_2 r\right) \tag{2.5}$$

Здесь A_1 – неопределенный коэффициент.

Уравнение для $F_2(r)$

$$r^2 F_2''(r) + 2rF_2'(r) + (m_1^2 r^2 - 2)F_2(r) + 2\gamma^2 \left(b/\delta_1\right)^2 r^3 = 0 \tag{2.6}$$

Здесь $m_1^2 = (2/\Gamma)\gamma^2[i\left(b/\delta_2\right)^2 - \left(b/\delta_1\right)^2]$, $\delta_1 = \sqrt{2K/\Gamma}$, $\delta_2 = \sqrt{2\nu/\omega}$

$$m_1 = (\gamma b/\sqrt{\Gamma})(1/\delta + i\delta/\delta_2^2), \quad 1/\delta^2 = -1/\delta_1^2 + \sqrt{1/\delta_1^4 + 1/\delta_2^4}$$

Решение уравнения (2.6) имеет вид

$$F_2(r) = \frac{A_2}{m_1^2 r^2}\left(\sin m_1 r - m_1 r \cos m_1 r\right) - \frac{B_2}{m_1^2 r^2}\left(\cos m_1 r + m_1 r \sin m_1 r\right) - Cr \tag{2.7}$$

Здесь A_2, B_2 – неопределенные коэффициенты, $C = (2\gamma^2/m_1^2)\left(b/\delta_1\right)^2$.

Уравнение для $F_3(r)$

$$r^2 F_3''(r) + 2rF_3'(r) + (m_2^2 r^2 - 2)F_3(r) = 0 \tag{2.8}$$

Решение уравнения (2.8), конечное при $r \to \infty$

$$F_3(r) = -\frac{A_3}{m_2^2 r^2}\left(i + m_2 r\right)\exp(i m_2 r) \tag{2.9}$$

Здесь A_3 – неопределенный коэффициент.

Подставляя выражения (2.5), (2.7) и (2.9) в граничные условия (2.3), получим систему четырех алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_1, A_2, B_2, A_3, решая которую, находим

$$A_1 = \frac{\gamma^2 m_2^2 (D_{11}D_{12} - \alpha^3 D_{13}D_{14})(D_2 D_{15} - D_3 D_{11})}{D_1 D_{11}(D_{14}D_{15} - D_{11}D_{16})} + \frac{\alpha^3\gamma^2 m_2^2 D_2 D_{13}}{D_1 D_{11}} + \frac{\alpha^3 m_2^2 (1 - \Gamma - C)}{D_1} \tag{2.10}$$

$$A_2 = \frac{\gamma^2 m_1^2 D_{15}(D_{11}D_{12} - \alpha^3 D_{13}D_{14})}{D_{11}(D_{14}D_{15} - D_{11}D_{16})} + \frac{\alpha^3\gamma^2 m_1^2 D_{13}}{D_{11}}$$

$$B_2 = \frac{\gamma^2 m_1^2 (D_{11}D_{12} - \alpha^3 D_{13}D_{14})}{D_{14}D_{15} - D_{11}D_{16}}$$

$$A_3 = \frac{m_2^2 e^{-i m_2}}{i + m_2}\left[\frac{\gamma^2 (D_{11}D_{12} - \alpha^3 D_{13}D_{14})(D_8 D_{11} - D_7 D_{15})}{D_{11}(D_{14}D_{15} - D_{11}D_{16})} - \frac{\alpha^3\gamma^2 D_7 D_{13}}{D_{11}} + C + \Gamma - 1\right]$$

$$D_1 = \sin m_2\alpha - m_2\alpha\cos m_2\alpha, \quad D_2 = \sin m_1\alpha - m_1\alpha\cos m_1\alpha$$

$$D_3 = \cos m_1\alpha + m_1\alpha\sin m_1\alpha$$

$$D_4 = (\alpha\gamma^2 - 3\lambda)(\sin m_1\alpha - m_1\alpha\cos m_1\alpha) + \lambda\alpha^2 m_1^2 \sin m_1\alpha$$

$$D_5 = (\alpha\gamma^2 - 3\lambda)(\cos m_1\alpha + m_1\alpha\sin m_1\alpha) + \lambda\alpha^2 m_1^2 \cos m_1\alpha$$

$$D_6 = 3\alpha m_2 \cos m_2\alpha + (\alpha^2 m_2^2 - 3)\sin m_2\alpha$$

$$D_7 = \sin m_1 - m_1\cos m_1, \quad D_8 = \cos m_1 + m_1 \sin m_1$$

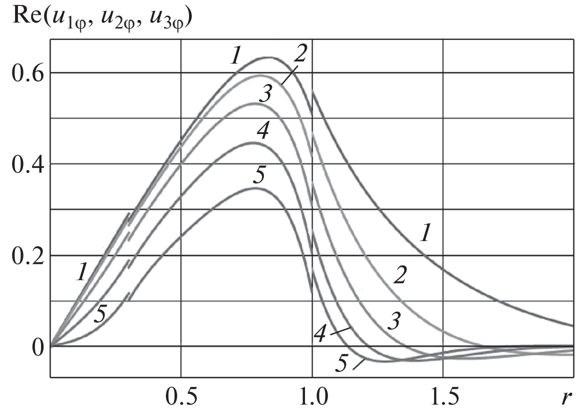

Рис. 1. Зависимость $\mathrm{Re}(u_{1\varphi}, u_{2\varphi}, u_{3\varphi})$ от r при $t = 0$, $\alpha = 0.3$, $\lambda = 1$, $\theta = \pi/2$, $\Gamma = 0.95$, $b/\delta_1 = 5$: *1–5* – $b/\delta_2 = 1, 2, 3, 4, 5$.

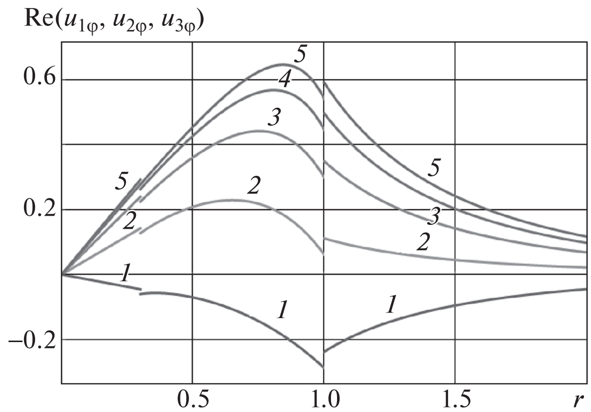

Рис. 2. Зависимость $\mathrm{Re}(u_{1\varphi}, u_{2\varphi}, u_{3\varphi})$ от r при $t = 0$; $\alpha = 0.3$, $\lambda = 1$, $\theta = \pi/2$, $\Gamma = 0.95$, $b/\delta_2 = 0.5$: *1–5* – $b/\delta_1 = 1, 2, 3, 4, 5$.

$$D_9 = (3\lambda + \gamma^2)D_7 - \lambda m_1^2 \sin m_1, \quad D_{10} = (3\lambda + \gamma^2)D_8 - \lambda m_1^2 \cos m_1$$

$$D_{11} = D_1 D_4 - \lambda\gamma^2 D_2 D_6$$

$$D_{12} = (C + \Gamma)(i + m_2) + \lambda(3i + 3m_2 - im_2^2)(1 - C - \Gamma)$$

$$D_{13} = \lambda D_6 + (C + \Gamma)(\alpha D_1 - \lambda D_6)$$

$$D_{14} = (i + m_2)D_9 - \lambda\gamma^2(3i + 3m_2 - im_2^2)D_7$$

$$D_{15} = D_1 D_5 - \lambda\gamma^2 D_3 D_6$$

$$D_{16} = (i + m_2)D_{10} - \lambda\gamma^2(3i + 3m_2 - im_2^2)D_8$$

На рис. 1, 2 показаны профили скоростей фильтрации и свободной жидкости. При построении профилей скоростей жидкости принято $\gamma^2 = \Gamma$ [5, 6]. В связи с нестационарностью движения скорость фильтрации и скорость свободной жидкости на графиках приведены для момента времени $t = 0$. На всех графиках приведены зависимости действительной части $\mathrm{Re}(u_{1\varphi}, u_{2\varphi}, u_{3\varphi})$ от r, т.е. $\mathrm{Re}\, u_{1\varphi}(r)$ $(0 < r < \alpha)$, $\mathrm{Re}\, u_{2\varphi}(r)$ $(\alpha < r < 1)$ и $\mathrm{Re}\, u_{3\varphi}(r)$ $(1 < r < \infty)$.

На рис. 1 приведены графики зависимостей $\mathrm{Re}\, u_{1\varphi}(r)$, $\mathrm{Re}\, u_{2\varphi}(r)$ и $\mathrm{Re}\, u_{3\varphi}(r)$ для случая, когда величина $b/\delta_1 = 5$ зафиксирована, а b/δ_2 принимает значения 1, 2, 3, 4, 5 при $\alpha = 0.3$, $\lambda = 1$, $\theta = \pi/2$, $\Gamma = 0.95$.

Из рис. 1 следует, что в области 3 имеются слои жидкости с противоположными направлениями скоростей. С увеличением значений b/δ_2 (а значит, с увеличением частоты ω) скорости $\operatorname{Re} u_{1\varphi}(r)$, $\operatorname{Re} u_{2\varphi}(r)$ и $\operatorname{Re} u_{3\varphi}(r)$ уменьшаются при каждом заданном значении r. Наличие разрывов графиков на границе пористой среды и свободной жидкости связано с тем, что скорость фильтрации не является скоростью частиц жидкости. При $\Gamma \to 1$ эти разрывы исчезают.

Профили скоростей на рис. 2 построены при фиксированных значениях $b/\delta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.3$, $\lambda = 1$, $\theta = \pi/2$, $\Gamma = 0.95$ для разных значений $b/\delta_1 = 1, 2, 3, 4, 5$.

Из рис. 2 следует, что скорости жидкости внутри и вне пористой среды увеличиваются с возрастанием величины b/δ_1 при каждом значении r.

3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

При переходе в полученном выше решении (2.5), (2.7), (2.9) к пределу $\omega \to 0$ ($b/\delta_2 \to 0$) находим поля скоростей жидкости внутри и вне пористой сферической оболочки при ее равномерном вращении вокруг оси Oz

$$u_{1\varphi} = V_1 r \sin\theta, \quad u_{3\varphi} = -\frac{V_3}{r^2}\sin\theta$$

$$u_{2\varphi} = \sin\theta\left[\frac{V_2}{m_1^2 r^2}(\sin m_1 r - m_1 r\cos m_1 r) - \frac{W_2}{m_1^2 r^2}(\cos m_1 r + m_1 r \sin m_1 r) - Cr\right]$$

где

$$V_1 = \frac{\gamma^2 N_4[\alpha^4 N_1(C+\Gamma) - N_3]}{\alpha^3 D_4(N_2 D_4 - N_1 D_5)} + \frac{\alpha\gamma^2 D_2(C+\Gamma)}{D_4} + 1 - \Gamma - C$$

$$V_2 = \frac{\gamma^2 m_1^2 D_5[\alpha^4 N_1(C+\Gamma) - N_3]}{D_4(N_2 D_4 - N_1 D_5)} + \frac{\alpha^4\gamma^2 m_1^2(C+\Gamma)}{D_4}$$

$$W_2 = \frac{\gamma^2 m_1^2[\alpha^4 N_1(C+\Gamma) - N_3]}{N_2 D_4 - N_1 D_5}$$

$$V_3 = \frac{\gamma^2 N_5[\alpha^4 N_1(C+\Gamma) - N_3]}{D_4(N_2 D_4 - N_1 D_5)} - \frac{\alpha^4\gamma^2 D_7(C+\Gamma)}{D_4} + C + \Gamma - 1$$

$$N_1 = D_9 - 3\lambda\gamma^2 D_7, \quad N_2 = D_{10} - 3\lambda\gamma^2 D_8$$

$$N_3 = D_4\left[C + \Gamma + 3\lambda(1 - \Gamma - C)\right], \quad N_4 = D_2 D_5 - D_3 D_4$$

$$N_5 = D_4 D_8 - D_5 D_7, \quad m_1^2 = -(2/\Gamma)\gamma^2\left(b/\delta_1\right)^2$$

В пористой среде с высокой пористостью, близкой к единице, можно принять $\eta' \approx \eta$ [8]. При этом в частном случае при $\alpha \to 0$ из полученных результатов следует решение задачи о течении вязкой жидкости, вызванном вращательно-колебательным движением пористого шара [13]. Из этого решения, в свою очередь, следует (при $K \to 0$, $\lambda \to 0$) решение задачи о течении вязкой жидкости, вызванном вращательно-колебательным движением погруженного непроницаемого шара [12, §24].

4. МОМЕНТ СИЛ ТРЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА КОНТРОЛЬНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ, ОХВАТЫВАЮЩУЮ ПОРИСТУЮ ОБОЛОЧКУ

Безразмерный момент относительно оси z сил трения, действующих со стороны свободной (внешней) жидкости на контрольную сферическую поверхность, охватывающую внешнюю поверхность насыщенной жидкостью пористой оболочки, совершающей вращательно-колебательное движение в вязкой жидкости, определяется равенством [12]

$$M_z = \iint \sigma'_{3r\varphi}\sin\theta\, dS, \quad \sigma'_{3r\varphi} = \frac{\partial u_{3\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{3\varphi}}{r}$$

Здесь $dS = 2\pi \sin\theta d\theta$ — элемент площади, интегрирование проводится по всей поверхности сферы $r = 1$, $\sigma'_{3r\varphi}$ — безразмерный тензор вязких напряжений в области 3.

В результате находим

$$M_z = \frac{8\pi}{3} e^{-it}(3i + 3m_2 - im_2^2)\frac{A_3 e^{im_2}}{m_2^2} \tag{4.1}$$

Размерный момент сил трения равен $M_z^* = \eta\Omega_0 b^3 M_z$.

Момент сил трения (4.1) действует со стороны внешней жидкости на единую систему, состоящую из пористого тела и содержащейся в нем и в полости жидкости, которая в рассматриваемом здесь случае при движении не выходит из объема пористого тела. При этом моменты сил взаимодействия на поверхности контакта между жидкостью в полости и средой в пористом теле по третьему закону Ньютона при суммировании сокращаются. Вопрос об определении момента сил трения, действующих на одно только пористое тело, остается открытым.

Таблица 1

b/δ_2	$\mathrm{Re}\,\sigma'_{3r\varphi}$
1	$1.98\cos(t - 3.044)\sin\theta$
2	$2.28\cos(t - 3.055)\sin\theta$
3	$2.46\cos(t - 3.159)\sin\theta$
4	$2.47\cos(t - 3.295)\sin\theta$
5	$2.34\cos(t - 3.427)\sin\theta$

В табл. 1 приведены действительные части выражения $\sigma'_{3r\varphi}$ при $r = 1$ для следующих значений параметров: $\alpha = 0.3$, $\lambda = 1$, $\Gamma = 0.95$, $b/\delta_1 = 5$, $b/\delta_2 = 1, 2, 3, 4, 5$.

Таким образом, между безразмерной силой трения, отнесенной к единице площади контрольной поверхности ($r = 1$), и безразмерной скоростью поверхности пористой оболочки $\mathrm{Re}\, v_\varphi = \cos t \sin\theta$ при $r = 1$ имеется сдвиг фаз.

При $\alpha \to 0$ и $\eta' \approx \eta$ выражение (4.1) принимает вид момента сил трения, действующих на контрольную поверхность, окружающую пористый шар, совершающий вращательно-колебательное движение в вязкой жидкости [14]

$$M_z = \frac{8}{3}\pi e^{-it}(m_2^2 + 3im_2 - 3)\frac{Q_1 \sin m_1 + m_1 Q_2 \cos m_1}{Q_3 \sin m_1 + m_1 Q_4 \cos m_1} \tag{4.2}$$

$$Q_1 = -1 + \lambda(m_1^2 - 3)(1 - \Gamma - 2C); \quad Q_2 = 1 + 3\lambda(1 - \Gamma - 2C)$$

$$Q_3 = -1 + im_2 + \lambda(m_1^2 - im_1^2 m_2 - m_2^2); \quad Q_4 = 1 - im_2 + \lambda m_2^2$$

При $\lambda \to 0$, ($K \to 0$) (b/δ_2 — произвольное) выражение (4.2) принимает вид безразмерного момента сил трения, действующих на твердый непроницаемый шар, совершающий вращательно-колебательное движение в вязкой жидкости

$$M_z = -\frac{8\pi}{3} e^{-it} \frac{3 + 6(b/\delta_2) + 6(b/\delta_2)^2 + 2(b/\delta_2)^3 - 2i\,(b/\delta_2)^2(1 + b/\delta_2)}{1 + 2(b/\delta_2) + 2(b/\delta_2)^2}.$$

В размерном виде $M_z^* = \eta\Omega_0 b^3 M_z$ этот момент сил совпадает с [12, §24].

При $m_2 = 0$ ($\omega = 0$) формула (4.2) (без множителя e^{-it}) дает выражение для момента сил трения, действующих на контрольной поверхности вокруг пористого шара, вращающегося с постоянной угловой скоростью в вязкой жидкости [14]

$$M_z = -8\pi \frac{(\lambda(m_1^2 - 3)(1 - \Gamma - 2C) - 1)\sin m_1 + m_1(1 + 3\lambda(1 - \Gamma - 2C))\cos m_1}{(\lambda m_1^2 - 1)\sin m_1 + m_1 \cos m_1}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано влияние вращательно-колебательного движения пористой сферической оболочки, погруженной в вязкую жидкость, на движение этой жидкости внутри и вне пористого тела. В сферической системе координат найдены в приближении Стокса аналитические решения нестационарного уравнения Бринкмана, описывающего движение жидкости в пористой среде, и уравнения Навье–Стокса, описывающего движение жидкости вне пористой среды.

Определены поля скорости фильтрации и скорости свободной жидкости внутри и вне пористого тела. Построены графики профилей скорости фильтрации и свободной жидкости при разных значениях параметров задачи.

Определен момент сил трения, действующих на контрольную сферическую поверхность, охватывающую внешнюю поверхность пористой сферической оболочки, совершающей вращательно-колебательное движение. Показано, что в частном случае из полученных результатов следуют известные ранее результаты для пористого шара, совершающего колебательные движения в вязкой жидкости, а также для сплошного (непроницаемого) шара.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Happel J., Brenner H.* Low Reynolds number hydrodynamics. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1965. = *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 632 с.

2. *Jones I.P.* Low Reynolds number flow past a porous spherical shell // Math. Proc. Camb. Phis. Soc. 1973. V. 73. № 1. P. 231–238.

3. *Rajvanshi S.C., Wasu S.* Slow extensional flow past a non-homogeneous porous spherical shell // Int. J. Applied Mechanics and Engineering. 2013. V. 18. № 2. P. 491–502.

4. *Deo S., Yadav P.K., Tiwari A.* Slow viscous flow through a membrane built up from porous cylindrical particles with an impermeable core // Appl. Math. Modelling. 2010. V. 34. № 5. P. 1329–1343.

5. *Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S.* Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. – I. Theoretical development // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1995. V. 38. № 14. P. 2635–2646.

6. *Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S.* Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. – II. Comparison with experiment // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1995. V. 38. № 14. P. 2647–2655.

7. *Tilton N., Cortelezzi L.* Linear stability analysis of pressure-driven flows in channels with porous walls // J. Fluid Mech. 2008. V. 604. P. 411–445.

8. *Brinkman H.C.* A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // Appl. Sci. Res. 1947. V. A1. № 1. P. 27–34.

9. *Auriault J.-L.* On the domain of validity of Brinkmah's equation // Transp. Porous Med. 2009. V. 79. № 2. P. 215–223.

10. *Alazmi B., Vafai K.* Analysis of fluid flow and heat transfer interfacial conditions between a porous medium and a fluid layer // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2001. V. 44. № 9. P. 1735–1749.

11. *Goyeau B., Lhuillier D., Gobin D., Velarde M.G.* Momentum transport at a fluid-porous interface // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2003. V. 46. № 21. P. 4071–1749.

12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2006. 736 с. = *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Theoretical Physics. V. 6. Fluid Mechanics. New York: Pergamon Press, 2013.

13. *Тактаров Н.Г.* Движение вязкой жидкости, вызванное вращательно-колебательным движением пористого шара // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 5. С. 133–138. = *Taktarov N.G.* Viscous fluid flow induced by rotational-oscillatory motion of a porous sphere // Fluid Dynamics. 2016. V. 51. № 5. P. 703–708.

14. *Тактаров Н.Г., Рунова О.А.* Силы и момент сил сопротивления, действующие на пористое сферическое тело в вязкой жидкости в рамках модели Бринкмана // Изв. вузов. Поволжский регион. Физико-матем. науки. 2018. № 2 (46). С. 27–37.