

УДК 532.526.4

ПРИМЕНИМОСТЬ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИСТЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ С ВДУВОМ И ОТСОСОМ НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

© 2020 г. В. А. Алексин*

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

**E-mail: alexsin@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 29.05.2020 г.

После доработки 18.06.2020 г.

Принята к публикации 18.06.2020 г.

Представлен анализ применимости двухпараметрических моделей турбулентности для исследования воздействия турбулентности высокой интенсивности набегающего потока на характеристики пристенного течения и теплообмена в стационарном и нестационарном пограничных слоях при условиях вдува и отсоса на проницаемых участках поверхности. Расчетные результаты, полученные при задании постоянного значения относительного параметра массового расхода в случаях вдува и отсоса на проницаемых участках, сопоставляются с экспериментальными данными. На основе численных решений изучаются механизмы взаимодействия вдува и отсоса однородного по составу газа с набегающим потоком на двух проницаемых участках и вниз по потоку от них в пристеночной области турбулентного пограничного слоя. Приводятся расчетные результаты, полученные при задании переменного во времени параметра расхода на двух проницаемых участках поверхности.

Ключевые слова: пристенное течение, пограничный слой, теплообмен, турбулентность, переход, нестационарность, модели турбулентности, проницаемый участок поверхности

DOI: 10.31857/S056852812006002X

Детальный подход, основанный на анализе особенностей структуры турбулентного пристенного течения в условиях воздействия вдува и отсоса на проницаемой поверхности в соответствии с экспериментальными данными [1–4], дал возможность разработать более эффективные методы расчета турбулентных стационарных пристенных течений на основе полуэмпирических моделей турбулентности. Так, в расчетных исследованиях с использованием алгебраических моделей турбулентности дополнительно учтена зависимость толщины вязкого подслоя в динамических переменных от интенсивности массового расхода на проницаемом участке поверхности. В результате учета этой зависимости получено вполне удовлетворительное согласование численных результатов [5, 6] с данными экспериментов [1, 2] для малых значений интенсивности расхода.

При численном исследовании обтекания тел пространственных конфигураций набегающим нестационарным турбулентным потоком газа с гармоническими по времени колебаниями продольных составляющих скорости по заданным распределениям, как правило, алгоритм решения основной задачи разбивается на решение ряда более простых задач меньшей размерности. Например, исследования пространственных обтеканий тел могут при некоторых условиях основываться на более простых приближениях, допускающих решения задач в двумерной и стационарной постановках. Далее расчетные результаты стационарной двумерной задачи могут задаваться как начальные условия для дальнейшего решения нестационарной пространственной задачи. С учетом этого решение нестационарной двумерной задачи рассматривается здесь не только как основная задача исследования, но и как промежуточный этап для дальнейших исследований. Для этой принятой постановки задачи численно исследуется режим взаимодействия нестационарного турбулентного набегающего потока и пристенного течения с массообменом на проницаемых участках поверхности.

К отдельному классу относятся исследования взаимодействия подобных течений в пристеночной области турбулентного пограничного слоя с однородным потоком вдуваемого газа через

проницаемый участок при нестационарном задании относительной плотности массового расхода газа. Здесь рассматриваются режимы малого и умеренного периодического расхода массы через проницаемые участки поверхности, при которых сохраняется приближение уравнений пограничного слоя.

Для сверхзвуковых турбулентных режимов течения на проницаемых поверхностях с условиями вдува многокомпонентного газа применяется граничное условие для уравнения энергии, в которое введено значение энтальпии охладителя [7–9]. Кроме того, проницаемые участки изменяются для управления переходом в ламинарных пограничных слоях. Так, для генерации волн неустойчивости и установления их воздействия на переход в сверхзвуковых пограничных слоях в [10] использованы нестационарные распределения массового расхода на проницаемых участках типа вдув–отсос.

В настоящем исследовании рассматриваются вопросы, связанные с обоснованием применимости введенной ранее двухпараметрической K – ϵ -модели турбулентности для решения задач исследования динамики течения и теплообмена как на одном, так и на последовательности нескольких проницаемых участков поверхности для условий вдува и отсоса для стационарных течений с высокой интенсивностью турбулентности набегающего потока. Для подтверждения обоснованности подобного подхода проводятся сопоставления получаемых численных результатов с экспериментальными данными по динамическим и тепловым характеристикам пограничного слоя как на проницаемых участках, так и вниз от них по потоку в условиях вдува и отсоса однородного по составу газа с набегающим на поверхность потоком высокой интенсивности турбулентности.

За счет вдува газа в начале проницаемого участка и далее вниз по потоку резко падают значения трения и теплового потока на стенке, что отражает процесс снижения массо- и теплопереноса в пристеночной области турбулентного пограничного слоя. Детали этого механизма взаимодействия вдуваемого газа с набегающим потоком на стенку заключаются в образовании на поверхности участка дополнительного защитного слоя, толщина которого медленно возрастает вниз по потоку в зависимости от массы полного расхода вдуваемого газа, т.е. от интенсивности вдува. Этот процесс уменьшения трения и теплообмена отмечается даже при малых расходах массы газа и становится более интенсивным с его возрастанием как в экспериментальных, так и в расчетных исследованиях [1–6].

Следует заметить, что при расчетах турбулентных режимов течений в пограничных слоях, в отличие от ламинарных, основная проблема заключается в значительной зависимости численного решения как от выбора общего используемого подхода, так и от принятого конкретного варианта модели турбулентности, и, что самое главное, при его численной реализации требуются сохранение и выполнение всех условий для принятого варианта.

Ранее эта проблема решалась при использовании алгебраических моделей турбулентности на основе гипотезы Прандтля путем модернизации демпфирующих множителей, входящих в длину пути смешения, включением в них зависимости от параметра динамической плотности интенсивности проницаемости поверхности. В результате такого подхода удалось получить удовлетворительное согласование расчетных результатов с данными экспериментов для диапазона малых и умеренных их значений данного параметра во всей расчетной области. Причем введенная зависимость учитывала влияние этого параметра на структуру пристеночной области пограничного слоя, в частности на масштаб ламинарного подслоя, что в итоге послужило основным фактором соответствия расчетных результатов данным экспериментов.

В настоящем исследовании воздействие вдува и отсоса на поверхности на характеристики турбулентности в пограничном слое заложено в применяемой модели через определение величин интенсивности турбулентности K и скорости ее диссипации ϵ путем решения задачи с соответствующими для них уравнениями переноса, и затем по ним установление значений турбулентной вязкости во всем поле течения. Детали изменения этих величин в различных вариантах воздействия вдува и отсоса рассматриваются ниже в приводимых результатах и дается детальный анализ изменения основных характеристик турбулентности в различных областях пограничного слоя.

При моделировании области развитого турбулентного течения пограничного слоя в численном исследовании [10] основное внимание уделено влиянию возмущающих факторов воздействия нестационарного массо- и теплообмена для малого вдува и отсоса через проницаемый участок поверхности с постоянной и зависящей от времени относительной плотностью расхода на изменение динамических и тепловых характеристик. Продольный градиент давления в рассматриваемых течениях принимался нулевым в соответствии с экспериментальными данными [11, 12].

Модифицированный вариант K – ϵ -модели для низких чисел Рейнольдса для моделирования нестационарных характеристик течения и теплопереноса при гармонических колебаниях внеш-

ней скорости во времени, апробированный в [13, 14], позволяет непрерывно рассчитывать всю область течения от ламинарного до турбулентного режима. При решении общей нестационарной задачи для определения начальных условий по времени численно решается стационарная задача о течении и теплообмене на поверхности с проницаемым участком при нулевом значении продольного градиента давления. На начальном участке обтекаемой поверхности режим в расчетах предполагается ламинарным с переходом вниз по течению к области развитого турбулентного режима с локальными числами Рейнольдса $Re_{\xi_0} \propto 10^6$ в соответствии с экспериментальными данными для слабосжимаемого дозвукового потока [12].

В настоящем исследовании на основе получаемых численных решений нестационарного двумерного турбулентного пограничного слоя проводится анализ взаимодействия вдува и отсоса однородного по составу газа с набегающим потоком на поверхность с двумя проницаемыми участками. При этом определяются характеристики течения и теплообмена в нестационарном турбулентном пограничном слое при различных интенсивностях расхода массы и расстояниях между этими участками.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Осредненные уравнения нестационарного пограничного слоя при развитом турбулентном режиме течения могут замыкаться с использованием дифференциальных моделей для характеристик турбулентности, основанных на применении различных гипотез и предположений. Представленные модели можно разделить на два основных направления: в одних вводится гипотеза Буссинеска о турбулентной вязкости, и, во-вторых, задаются уравнения непосредственно для турбулентных напряжений и потоков. Такие модели обычно различаются выбранными характеристиками турбулентности, для которых задаются дифференциальные уравнения, и их числом [15–19]. Применяемый здесь подход основывается на введении турбулентной вязкости и применении гипотез Колмогорова–Прандтля [16]. Влияние вязкости на турбулентные пульсации в пристеночной области развитого турбулентного пограничного слоя при малых локальных числах Рейнольдса и переходе в низкорейнольдсовых вариантах таких моделей учитывается введением соответствующих демпфирующих функций в коэффициенты уравнений переноса. Возможность применимости такого подхода для численных исследований течений на проницаемых участках поверхности с вдувом и отсосом в рамках модели пограничного слоя обычно ограничивается умеренными значениями параметра интенсивности массового расхода.

Введение турбулентных коэффициентов вязкости μ_t и теплопроводности λ_t и применение гипотезы Буссинеска о градиентном механизме переноса для турбулентного напряжения Рейнольдса ($-\rho \langle u'v' \rangle$) и закона Фурье для турбулентного теплового потока ($-\rho \langle h'v' \rangle$)

$$\tau_t = -\rho \langle u'v' \rangle = \mu_t \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad q_t = -\rho \langle h'v' \rangle = \frac{\lambda_t}{c_p} \frac{\partial h}{\partial \zeta}$$

дает возможность представить полные (эффективные) напряжение трения τ и тепловой поток q как в [15]

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \rho \langle u'v' \rangle = \mu_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad q = \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial \zeta} - \rho \langle h'v' \rangle = \frac{\lambda_\Sigma}{c_p} \frac{\partial h}{\partial \zeta} \quad (1.1)$$

Здесь введены полные коэффициенты μ_Σ , λ_Σ

$$\mu_\Sigma = \mu + \mu_t, \quad \lambda_\Sigma = \lambda + \lambda_t$$

Следует заметить, что рассматривается двумерное течение с нулевой поперечной компонентой скорости $w = 0$, и не учитывается зависимость функций от поперечной координаты η , проницаемый участок расположен на поверхности вдоль продольной координаты ξ , где ζ – координата по нормали к поверхности.

Введение в (1.1) ламинарного $Pr = \mu c_p / \lambda$ и турбулентного $Pr_t = \mu_t c_p / \lambda_t$ чисел Прандтля, позволяет выразить λ/c_p и λ_t/c_p через отношения μ/Pr и μ_t/Pr_t . В дальнейших расчетах числа Прандтля Pr и Pr_t могут приниматься либо постоянными, либо определяться по дополнительным выражениям или из уравнений в соответствии с принятыми гипотезами [14].

Система уравнений для осредненных характеристик нестационарного двумерного пограничного слоя в сжимаемом однородном потоке совершенного газа относительно системы координат ξ , ζ , связанной с поверхностью обтекаемого тела, представляется в виде [13, 14]

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(\rho v) = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\mu_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right]$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial \xi} + v \frac{\partial h}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\lambda_{\Sigma}}{c_p} \frac{\partial h}{\partial \zeta} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\mu_{\Sigma}}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0, \quad p = \rho RT$$

Коэффициенты вязкости и теплопроводности в пограничном слое определяются через профиль энтальпия и их значения на внешней границе: $\mu = \mu_e(h/h_e)^\omega$, $\lambda = \lambda_e(h/h_e)^\omega$, $\omega = 0.75$.

Система (1.2) записана с учетом обычных предположений теории пограничного слоя и в пренебрежении членами с нормальными напряжениями Рейнольдса, в ней использовано предположение о малости членов, содержащими флуктуации плотности, вязкости и теплопроводности по сравнению с членами, в которые входят их средние значения. Статическое давление p считается функцией t, ξ .

В уравнениях (1.2) введены следующие обозначения: u, v – продольная и нормальная компоненты скорости в системе координат ξ, ζ , направленные вдоль поверхности и по нормали к ней, p – статическое давление, ρ – плотность, T – температура, h – энтальпия, μ, λ – коэффициенты вязкости и теплопроводности, c_p – теплоемкость при постоянном давлении, R – газовая постоянная, нижние индексы e и w относятся к значениям на внешней границе пограничного слоя и стенке, t – к турбулентному режиму, штрих – к пульсационным величинам.

Граничные условия задаются на поверхности и внешней границе пограничного слоя

$$\zeta = 0: u = 0, \quad \rho v = (\rho v)_w = F(t, \xi), \quad h_w H_0^{-1} = i_w(t, \xi) \quad \text{или} \quad q_w = q_w^0(t, \xi) \tag{1.3}$$

$$\zeta \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow u_e, \quad h \rightarrow h_e \tag{1.4}$$

На поверхности задается безразмерный удельный массовый расход вдува (отсоса) по нормальной координате $F_w(t, \xi) = F/(\rho_e u_e) = (\rho v)_w/(\rho_e u_e)$ и тепловой поток $q_w = q_w^0(t, \xi)$.

Распределения продольной составляющей скорости $u_e(t, \xi)$ и энтальпии $h_e(t, \xi)$ предполагаются известными из решения уравнений газовой динамики или из экспериментальных данных. Рассматривается нестационарный пограничный слой, в котором в начальный момент времени $t = 0$ поля течения и теплообмена определяются из стационарных условий; при $t > 0$ внешняя скорость $u_e(t, \xi)$ начинает изменяться относительно стационарной скорости $u_0(\xi)$ по гармоническому закону

$$u_e(t, \xi) = u_0(\xi)(1 + A_0 \cos \omega t) \tag{1.5}$$

Кроме условия с постоянными значениями $q_w = q_{w0}$ или $q_w = 2q_{w0}$, тепловой поток может задаваться по зависимости $q_w = q_w^0(t, \xi)$ аналогично гармонической (1.5).

В случае, если на проницаемом участке поверхности задано постоянное значение параметра проницаемости $F_w = \text{const}$, то нормальная составляющая скорости v_w при переменной по t скорости u_e может также быть зависимой от t .

В случаях переменного расхода F_w от t его распределения могут задаваться по гармоническому закону как зависимости (1.5)

$$F_{wt}(t, \xi) = F_{w0}(1 + B_0 \cos \omega t) \tag{1.6}$$

В начальный момент времени $t = 0$ определяется решение стационарной задачи, которое служит в качестве начальных условий при решении нестационарной задачи по t .

Начальные условия по продольной координате для профилей скорости u и энтальпии h задаются в некоторой области, например, при $\xi = \xi_0$.

Для их определения в этой плоскости $\xi = \xi_0$ решается нестационарная задача с распределениями (1.3), (1.4).

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Для замыкания системы уравнений (1.2) используются двухпараметрические K - ϵ -модели, для которых параметры турбулентности в набегающем потоке определяются интенсивностью $Tu_\infty = 10^4 \times 2K_\infty / (3V_\infty^2)$ (в %) и масштабом L_∞ или скоростью диссипации энергии ϵ_∞ турбулентности, где кинетическая энергия турбулентности K_∞ ($K = 0.5\langle u_i' u_i' \rangle$) обезразмеривается на V_∞^2 , L_∞ – на масштаб длины L_D , ϵ_∞ – на L_D / V_∞^3 (где $\epsilon_k = v \langle (\partial u_i' / \partial x_j)^2 \rangle = \epsilon + D$, скобки – знак осреднения по Рейнольдсу).

Уравнения для кинетической энергии турбулентности K и изотропной части скорости ее диссипации $\epsilon = \epsilon_k - D$ нестационарного двумерного пограничного слоя в системе координат ξ, ζ имеют вид [20]

$$\frac{\partial K}{\partial t} + u \frac{\partial K}{\partial \xi} + v \frac{\partial K}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\mu_{\Sigma, k} \frac{\partial K}{\partial \zeta} \right] + \frac{P_k}{\rho} - \epsilon_k \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} + v \frac{\partial \epsilon}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\mu_{\Sigma, \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \zeta} \right] + \frac{P_\epsilon}{\rho} - (D_\epsilon + E) \quad (2.2)$$

Здесь в уравнениях (2.1), (2.2) введены коэффициенты полных вязкостей $\mu_{\Sigma, k}$, $\mu_{\Sigma, \epsilon}$; числа Прандтля σ_k , σ_ϵ для K и ϵ

$$\mu_{\Sigma, k} = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}, \quad \mu_{\Sigma, \epsilon} = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \quad (2.3)$$

Для расчетов течений, в том числе на проницаемых участках поверхности, в уравнения переноса в применяемом варианте модели [20] введены члены P_k , P_ϵ , которые описывают процессы генерации в уравнениях для K и составляющей скорости диссипации ϵ в явной форме. Кроме того, в уравнения для K и ϵ входят члены со скоростью диссипации ϵ и слагаемое D_ϵ ; члены D , E выражают влияние вязкости на диссипативные эффекты вблизи стенки и в областях с малыми локальными числами Рейнольдса

$$P_k = \tau_t \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad D = \frac{2\nu K}{\zeta^2}, \quad P_\epsilon = \frac{\epsilon}{K} \mu_t \left[\frac{\partial u}{\partial \zeta} \right]^2$$

$$D_\epsilon = c_2 f_2 \frac{\epsilon^2}{K}, \quad E = \frac{2\nu f_4 \epsilon}{\zeta^2}$$

Коэффициент турбулентной вязкости ν_t определяется по второй формуле Прандтля–Колмогорова с демпфирующей функцией f_μ .

$$\nu_t = c_\mu f_\mu \frac{K^2}{\epsilon} \quad (2.4)$$

В варианте модели [21] f_μ – функция координаты ζ^+ и $c_3^*(\zeta^+)$ [13, 14]

$$f_\mu = 1 - \exp(-c_3^* \zeta^+), \quad \zeta^+ = \frac{u_* \zeta}{\nu}, \quad u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2.5)$$

Модификация этой модели (2.1)–(2.4) предполагает замену постоянной c_3 в (2.5) функцией c_3^* толщины вязкого подслоя ζ^+ , заданной в форме зависимости от локального числа Re_θ и двух параметров A'_0 , B'_0 , определяемых в общем случае параметрами набегающего потока и его турбулентности [13, 14]. Функции f_2, f_4 применяются в виде

$$f_2 = 1 - 0.2222 \exp \left\{ - \left(\frac{R_t}{6} \right)^2 \right\}, \quad f_4 = \exp(-c_4 \zeta^+), \quad R_t = \frac{K^2}{\epsilon \nu}$$

Константы модели, определяемой (2.2)–(2.5), имеют значения в соответствии с [21]

$$(c_\mu, c_1, c_2, c_3, c_4, \sigma_k, \sigma_\epsilon) = (0.09; 1.44; 2.0; 0.0115; 0.5; 1.0; 1.3)$$

На всей поверхности задаются граничные условия: $\zeta = 0: K = 0, \varepsilon = 0$. Условие для $K_w = 0$ на проницаемых участках предполагается приближенным для малых расходов вдува, что следует из сохранения структуры пристеночной области пограничного слоя согласно данным [1].

Функции $K_e(t, \xi), \varepsilon_e(t, \xi)$ на внешней границе пограничного слоя определяются при заданном распределении $u_e(t, \xi)$ вне окрестности передней критической точки из уравнений

$$\frac{\partial K_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial K_e}{\partial \xi} = -\varepsilon_e, \quad \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial \xi} = -c_2 \frac{\varepsilon_e^2}{K_e} \quad (2.6)$$

Для уравнений (2.6) начальные условия по t и ξ для функций K_e и ε_e устанавливаются соотношениями при $t = 0$ и $\xi = \xi_0$ в правые части которых входят решения (2.6) с учетом $\partial/\partial t = 0$ и $\partial/\partial \xi = 0$.

На внешней границе должны выполняться условия

$$\zeta \rightarrow \infty, \quad K \rightarrow K_e(t, \xi), \quad \varepsilon \rightarrow \varepsilon_e(t, \xi)$$

Для функций K и ε начальные условия по времени t в общем случае вводятся как

$$t = 0, \quad K(0, \xi, \zeta) = K_0(\xi, \zeta), \quad \varepsilon(0, \xi, \zeta) = \varepsilon_0(\xi, \zeta)$$

Здесь K_0, ε_0 – заданные начальные распределения кинетической энергии и скорости ее диссипации при $t = 0$, получаемые из решения уравнений (2.2), (2.3) при $t = 0$ и $\partial/\partial t = 0$.

Характеристики течения и теплообмена в нестационарном пограничном слое определяются численным методом расчета, основанным на неявной конечно-разностной схеме четвертого порядка точности по нормальной к поверхности координате. Метод был распространен на решения ряда двумерных нестационарных задач пограничного слоя с гармоническими распределениями во времени параметров набегающего потока для широкого диапазона амплитуд колебаний [13, 14]. Он позволяет получить численные решения исходной системы нелинейных уравнений и на их основе изучить свойства турбулентного течения и тепловое состояние обтекаемой поверхности, в том числе для условий вдува и отсоса на проницаемой поверхности.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Предварительно численно решается стационарная задача о течении и теплообмене от ламинарного и переходного до турбулентного режима пограничного слоя на поверхности с нулевым градиентом давления в соответствии с экспериментальными данными [12] при постоянном и переменном массовом расходе.

В численных расчетах для числа $Re_\infty = 0.2835 \times 10^6$ ($Re_\infty = V_\infty L_D / \nu_\infty$, L_D – длина плоской пластины) значения Tu_∞ изменяются в диапазоне (1–9)%, а безразмерная скорость диссипации $\varepsilon'_\infty = \varepsilon_\infty L_D / V_\infty^3$ задана как $\varepsilon'_\infty = 0.184 \times 10^{-2}$. Здесь после обезразмеривания задача определяется параметрами набегающего потока: $M_\infty, Re_\infty, Tu_\infty, L_\infty$.

Для дозвукового низкоскоростного слабосжимаемого потока с умеренным значением скорости $u_\infty = 5.6$ м/с ($M_\infty = 0.0164$) и с турбулентностью высокой интенсивности ($Tu_\infty \geq 1\%$) задается граничное условие на стенке для уравнения притока тепла $q_{w0} = \text{const}$. При этом температурный фактор i_w варьируется в пределах от 0.9 до 1.2 (где $i_w = T_w/T_0$, T_w, T_0 – температуры стенки и торможения), что отвечает условиям слабо холодной и нагретой стенки. На внешней границе пограничного слоя значения энтальпии h_e соответствуют данным [13].

Влияние параметра интенсивности турбулентности набегающего потока Tu_∞ на положение перехода (конца) определяется через критическое число Рейнольдса $Re_{0,*}$, которое в численных расчетах принимается в соответствии с экспериментальными данными.

Распределение расчетных значений локального коэффициента трения $C_{f0}/2 = \tau_w / (\rho_e u_{e0}^2)$, зависящего от продольной координаты в виде числа Рейнольдса $Re_{\xi_0} = u_{e0} \xi / \nu_{e0}$, при высокой интенсивности $Tu_\infty = 4.86\%$ и скорости диссипации ε'_∞ , равной 0.184×10^{-2} , сопоставляются на рисунках с зависимостью $C_{f0}/2$ для турбулентного режима $0.0592 / (Re_{\xi_0})^{0.2}$ для плоской пластины. Тепловое состояние обтекаемой поверхности характеризуется распределениями локального коэффициента теплопередачи $St_0 = q_w / [\rho_{e0} u_{e0} (h_w - H_0)]$ и температурного фактора $i_w = T_w/T_0$ от Re_{ξ_0} . Для течения на плоской пластине численные решения числа St_0 сравниваются с эмпирическим соотношением для числа $St_0(Re_{\xi_0}) = 0.0367 Re_{\xi_0}^{-0.2}$ турбулентного режима.

Для параметров турбулентности с высокой интенсивностью набегающего потока $Tu_\infty \geq 1$ (так в расчетах приняты значения для параметров турбулентности: $Tu_\infty = 4.86\%$ и скорости диссипации энергии турбулентности $\epsilon'_\infty = 0.184 \times 10^{-2}$) расчетные значения коэффициента трения $C_{f0}(Re_{\xi_0})/2$, числа Стантона $St_0(Re_{\xi_0})$ и температурного фактора $i_w(Re_{\xi_0})$ получены для условий постоянного теплового потока $q_w = 2q_{w0}$, где $q_{w0} = \text{const}$, на стенке и заданного нестационарного распределения $q_w^0(t)$ в [22]. Переменность числа $St_0(Re_{\xi_0})$ вдоль поверхности при постоянном $q_w = 2q_{w0}$ с возрастанием Re_{ξ_0} достигается за счет изменения температурного фактора i_w . На поверхности вместо граничного условия для нормальной составляющей скорости v_w задается безразмерная плотность массового расхода $F_w = (\rho v)_w / (\rho_e u_e)$: на проницаемом участке F_w не равна нулю, в отличие от остальной части поверхности, где $F_w = 0$.

Расчетные результаты, полученные в [10] на основе дифференциальной двухпараметрической модели турбулентности, демонстрируют аналогичное поведение динамических характеристик пограничного слоя. При этом значительные качественные изменения отмечаются не только у интегральных распределений вдоль поверхности при переходе границ проницаемого участка, но и у соответствующих расчетных профилей поперек пограничного слоя локальных динамических и тепловых характеристик потока.

В представленном численном исследовании рассматриваются режимы только для малого и умеренного вдува. Для таких режимов предполагается, что турбулентный пограничный слой остается полностью присоединенным к обтекаемой поверхности.

В начале участка последействия, где $F_w = 0$, наоборот, происходит стремительное возрастание распределения $C_{f0}(Re_{\xi_0})/2$ с дальнейшим снижением этого темпа, при этом кривая с вдувом асимптотически стремится к кривой без вдува, где $F_w = 0$.

Приведенные свойства распределений коэффициентов трения $C_{f0}(Re_{\xi_0})/2$ и теплопередачи $St_0(Re_{\xi_0})$ вдоль поверхности в зависимости от локального Re_{ξ_0} для начального режима при $t = 0$ влияют как любые начальные условия на дальнейшее развитие этих распределений с ростом времени t , которые устанавливаются далее при численном решении нестационарной задачи.

Для умеренных значений амплитуды колебаний A_0 ($0.147 \leq A_0 \leq 0.352$) и значений частоты $f = \omega/2\pi = 0.33$ и 1 Гц при ламинарном режиме на плоской пластине в [13] установлено соответствие распределений расчетного значения фазового угла φ от приведенной частоты $\omega' = \omega\xi/u_0$ с аналитическими результатами и численными данными. Для турбулентного режима течения численные результаты получены в соответствии с экспериментальными данными для параметров колебаний и числа Рейнольдса $Re_\infty = 1.25 \times 10^6$ ($Re_\infty = V_\infty D/v_\infty$, $D = V_\infty/f$). Параметры турбулентности набегающего потока изменялись в диапазонах параметров $Tu_\infty = 3-6\%$ и $\epsilon'_\infty = 0.184 \times 10^{-2} - 0.184 \times 10^{-1}$.

Для расчетов теплообмена в нестационарном пограничном слое распределение энтальпии в общем случае переменное вдоль внешней границы и от времени. Так как течение предполагается низкоскоростным с малым M_∞ , изменением энтальпии по t пренебрегается и далее считается $h_e \approx h_\infty$.

В условиях высокой интенсивности турбулентности и для умеренных значений амплитуды A_0 и частоты f колебаний распределения коэффициента теплопередачи и температурного фактора быстро перестраиваются во всех областях течения, сохраняя при этом гармонический характер изменения. В результате при наличии гармонических колебаний скорости набегающего потока во времени уровень интенсивности турбулентности оказывает определяющее влияние на развитие теплообмена в нестационарном пограничном слое.

Распределения коэффициента трения $C_{f0}(\tau, Re_{\xi_0})/2$, представленные далее на рисунках, близки к гармоническим (при $Re_{\xi_0} = \text{const}$), но с некоторым сдвигом фазы относительно внешней скорости u_e , и зависят в основном от параметров колебаний $u_e - A_0$ и ω , и плотности расхода F_w на проницаемом участке. Здесь в расчетах было принято $f = 1$ Гц и введена переменная $\tau = 2\pi ft = \omega t$.

На приводимых ниже рисунках показывается влияние на коэффициент трения $C_{f0}/2$, число Стантона St_0 переменного во времени массового расхода $F_{wt}(\tau)$ в диапазоне от 0.002 до 0.004 по распределению (1.6) в сравнении с результатами при постоянном значении нормального расхода $F_w = 0.004$ при заданной амплитуде колебаний внешней скорости $A_0 = 0.147$.

Для переменного расхода $F_{wt}(\tau)$ распределение (1.6) применяется с коэффициентами $F_{wc} = 0.003$; $B_0 = 1/3$ как

$$F_{wt}(\tau, \xi) = 0.003(1 + \cos(\tau)/3)$$

Необходимо отметить, что при принятом распределении для переменного расхода $F_w(\tau)$ рассматривается вариант со средним расходом $F_w = 0.003$, несколько меньшим, чем при постоянном $F_w = 0.004$. Таким образом, общее воздействие двух потока на проницаемом участке поверхности на турбулентный пограничный слой для заданной амплитуды колебаний внешнего потока в последнем случае в целом более значительно, чем при переменном расходе. Это различие в итоге отражается на приводимых результатах для коэффициентов трения и теплообмена на поверхности при их сравнении. При постоянном $F_w = 0.004$ установлено в результате большее снижение коэффициентов $C_{f0}/2$, St_0 , чем при F_w .

Для параметров турбулентности с высокой интенсивностью $Tu_\infty = 4.86\%$ и скорости ее диссипации $\epsilon'_\infty = 0.184 \times 10^{-2}$ расчетные значения коэффициента трения C_{f0} (Re_{ξ_0})/2 получены для условия постоянного теплового потока $q_w = 2q_{w0}$ на стенке ($C_{f0}/2 = \tau_w/(\rho_e u_e^2)$).

На поверхности задается граничное условие для параметра расхода $F_w = (\rho v)_w/(\rho_e u_e)$: на проницаемом участке $F_w \neq 0$ и на остальной части поверхности $F_w = 0$. Для турбулентного пограничного слоя рассматривается диапазон относительного расхода F_w , соответствующий только малым и умеренным значениям вдува для безотрывного течения на проницаемой поверхности.

Первый участок располагается от $Re_{\xi_{01}} = 1.8 \times 10^5$ до $Re_{\xi_{02}} = 3 \times 10^5$, а второй – от $Re_{\xi_{01}} = 8 \times 10^5$ до $Re_{\xi_{02}} = 1.2 \times 10^6$. В случае отсоса второй проницаемый участок начинается раньше от $Re_{\xi_{01}} = 5 \times 10^5$ до $Re_{\xi_{02}} = 8 \times 10^5$.

Распределения коэффициента трения $C_{f0}/2$ от локального числа Re_{ξ_0} представлены на рис. 1а, 1б, причем на сюжете а представлены расчетные результаты только для одного второго проницаемого участка с малыми значениями интенсивности массового расхода вдува $F_w = 0.001$ и 0.002 . Из приведенного сопоставления расчетных результатов 4, 5 с экспериментальными данными [1] 8, 9 на сюжете а можно заключить, что для малых значений расхода $F_w = 0.002, 0.001$ согласование этих данных вполне хорошее – их значения лежат достаточно близко. С ростом массового расхода до $F_w = 0.004$ расчетная кривая 5 на сюжете б опустилась несколько ниже данных экспериментов 9, но это допустимое отклонение.

Массообмен на одном проницаемом участке даже при однородном вдуве газа с набегающим потоком значительно снижает трение на поверхности. В начале участка отмечается рост толщины внутреннего подслоя, образующегося за счет массы вдуваемого газа. С начала участка образование и дальнейшее возрастание этого слоя вызывают нарастание возмущений в основном течении пограничного слоя, распространяющихся вверх от стенки к внешней его границе. Эти возмущения, постепенно взаимодействуя с основным течением, сначала в вязком подслое и турбулентном ядре, распространяются далее во всю пристеночную область и во внешний слой, при этом изменяют профили как продольной компоненты скорости, так и характеристик турбулентности, что приводит к падению значений трения и теплового потока как на стенке, так и в пристеночной области.

На участке вдува выделяется постепенное уменьшение с ростом продольной координаты Re_{ξ_0} угла наклона логарифмического профиля продольной компоненты u/u_e скорости, которое также отражается на падении значений коэффициента трения $C_{f0}(Re_{\xi_0})/2$, что согласуется с имеющимися экспериментальными данными [1]. Важное значение при этом для конечных результатов отводится изменениям характеристик турбулентности в ядре пристеночной области пограничного слоя.

В результате взаимодействия этих двух потоков от начала участка далее с ростом Re_{ξ_0} внутри турбулентного пограничного слоя усиливаются образование вихрей и их движение к стенке, которое поддерживает достаточный уровень интенсивности энергии турбулентности K , чтобы замедлить в итоге еще более резкое падение трения на стенке.

Результаты исследования взаимодействия массообмена при условии вдува на первом участке с вдувом или отсосом на втором участке с течением в пограничном слое приводятся на рис. 2–4 для заданных расстояний между проницаемыми участками согласно экспериментальными данными [1].

Распределения коэффициента трения $C_{f0}/2$ от Re_{ξ_0} даются на рис. 2 для двух проницаемых участков с вдувом расхода $F_w = 0.002$ и 0.004 на первом и $F_w = 0.002$ на втором (3, 4) и сопоставляются с экспериментальными данными (8) для второго участка с $F_w = 0.002$. Для сравнения с этими данными представлена расчетная кривая 5 для вдува только для одного второго участка с $F_w = 0.002$.

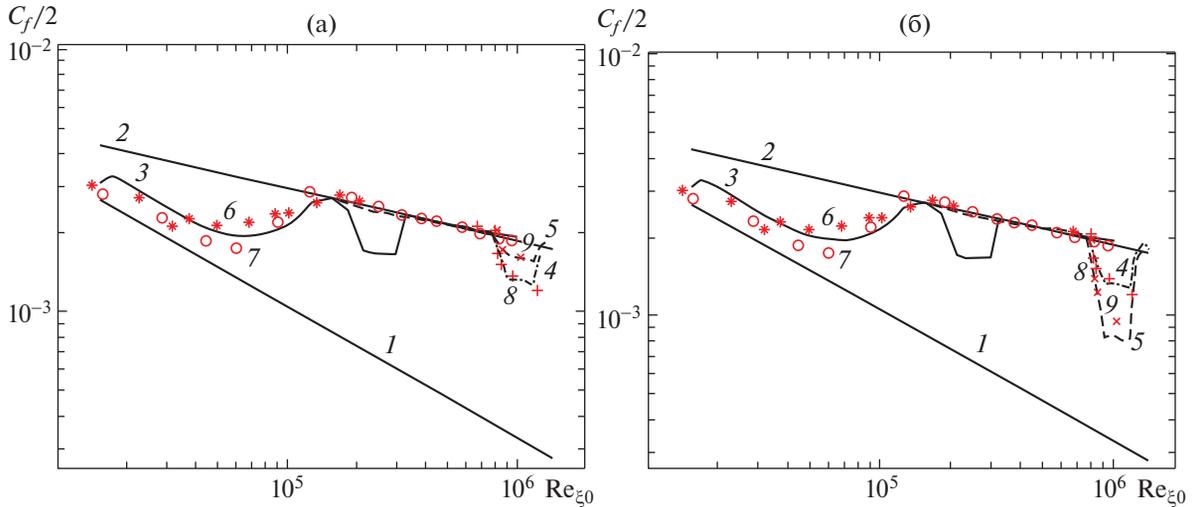


Рис. 1. Распределения коэффициента $C_{f0}/2$ от числа Re_{ξ_0} : а) 1, 2 – ламинарная и турбулентная эмпирические зависимости; 3 – расчетная кривая только на первом участке с вдувом $F_w = 0.002$; 4, 5 – только с $F_w = 0.002, 0.001$ на втором; 6, 7 – экспериментальные данные для перехода и 8, 9 – экспериментальные данные с вдувом для второго участка с $F_w = 0.002, 0.001$; б) – те же обозначения для 1–4, 6–8 как на а, кроме 5, 9 для $F_w = 0.004$ для расчетных и экспериментальных данных.

В случае вдува на двух участках при задании разных значений параметра расхода $F_w = 0.002$ и 0.004 на первом согласно рис. 2 установлено, что возрастание интенсивности вдува на первом больше понижает значение коэффициента $C_{f0}/2$ на втором. Таким образом, возрастает эффективность вдува как на втором проницаемом участке, так и вниз по потоку от него. Причем вдув только на втором участке 5 приводит к меньшему снижению значений $C_{f0}/2$, чем предварительное воздействие вдува еще и на первом 3, 4, что в результате менее эффективно, чем вдув на двух последовательных участках.

Зависимость коэффициента трения $C_{f0}/2$ от Re_{ξ_0} (3) представлена на рис. 3 для двух проницаемых участков вдува одинаковой интенсивностью расхода $F_w = 0.004$ на первом и втором, которая сопоставляется с экспериментальными данными (9), а также с расчетной кривой (5) для расхода с $F_w = 0.004$ только на втором; кроме того, кривые (4, 5) сравниваются с данными (8, 9) для второго участка с $F_w = 0.002$ и 0.004 . В результате отмечается, что возрастание вдува до расхода $F_w = 0.004$ приводит к еще большему снижению значений $C_{f0}/2$ как на втором проницаемом участке, так и вниз по потоку. При этом вдув только на одном участке также менее эффективен, чем на двух последовательных.

Из расчетных результатов на рис. 4 для вдува и отсоса на двух последовательных участках при задании параметра массового расхода $F_w = 0.004$ или 0.002 на первом и отсосе на втором $F_w = -0.0024$ следует, что вдув большей интенсивности на первом приводит к несколько более интенсивному снижению значений $C_{f0}/2$ на втором. В результате отсос на втором участке ослабляет воздействие вдува на первом, т.е. компенсирует его воздействие. Для большего значения вдува (3) на первом участке такого воздействия отсоса на втором не достаточно – кривая лежит чуть ниже турбулентной зависимости (2). Таким образом, для компенсации вдува необходим отсос с большим расходом на втором участке, сравнимый по модулю с вдувом на первом. Для кривых (4, 5) с меньшей интенсивностью вдува $F_w = 0.002$ отмечаются большие значения $C_{f0}/2$, для этого значения F_w компенсации отсоса достаточно – кривые лежат даже несколько выше зависимости (2). Из проведенных расчетов лучшее согласование с экспериментальными данными (8) отмечается для расчетных результатов (5), для которых заданы близкие входные условия.

Во второй части исследования представлены результаты расчетов нестационарного взаимодействия массо- и теплообмена на двух проницаемых участках поверхности, зависящим от времени, с набегающим потоком высокой интенсивности турбулентности и гармоническими колебаниями во времени внешней скорости.

При принятом в расчетах распределении для переменного расхода $F_w(\tau)$ применяется вариант со средним расходом $F_{w0} = 0.003$, несколько меньшим, чем при постоянном $F_w = 0.004$. При этом

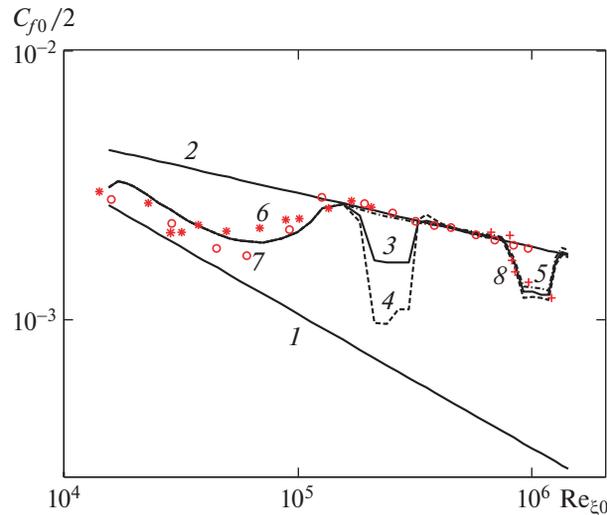


Рис. 2. Распределения коэффициента $C_{f0}/2$ от числа Re_{ξ_0} : 1, 2 как на рис. 1; 3, 4 – расчетные кривые для двух участков с вдувом расхода $F_w = 0.002$ и 0.004 на первом и $F_w = 0.002$ на втором; 5 – только для одного второго с $F_w = 0.002$; 6, 7 – экспериментальные данные для перехода; 8 – экспериментальные данные для второго участка с $F_w = 0.002$.

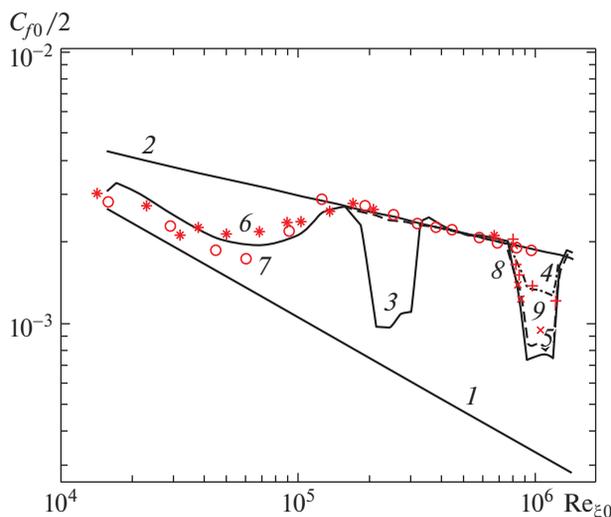


Рис. 3. Распределения коэффициента трения от числа Re_{ξ_0} : 1, 2 как на рис. 1; 3 – для двух участков с вдувом $F_w = 0.004$; 4, 5 – для одного второго с $F_w = 0.002$ и 0.004 ; 6, 7 – экспериментальные данные для перехода; 8, 9 – экспериментальные данные с вдувом для второго участка $F_w = 0.002$ и 0.004 .

рассматриваются варианты с различными комбинациями вводимых параметров интенсивности вдува и отсоса для двух проницаемых участках.

Распределение коэффициента трения $C_{f0}(\tau, Re_{\xi_0})/2$ в виде поверхности (4) дается на рис. 5 для двух участков с одинаковой интенсивностью вдува по приведенной зависимости $F_w(\tau)$. Влияние вдува на проницаемых участках выделяется двумя заметными извилистыми углублениями на поверхности 4. Отметим резкое падение расчетных значений $C_{f0}/2$ на их начальных границах. На начале второго участка приведены экспериментальные данные (3). Первый участок располагается от значения $Re_{\xi_{01}} = 1.8 \times 10^5$ до $Re_{\xi_{02}} = 3 \times 10^5$, а второй – $Re_{\xi_{01}} = 8 \times 10^5$ до $Re_{\xi_{02}} = 1.2 \times 10^6$. Здесь экспериментальные данные (1) и зависимость для турбулентного режима (2) построены в плоскости $\tau = 0$, как и на остальных рисунках. В этой же плоскости приводится сопоставление расчетных значений и данных эксперимента [1] для второго участка при постоянном расходе $F_w = 0.004$.

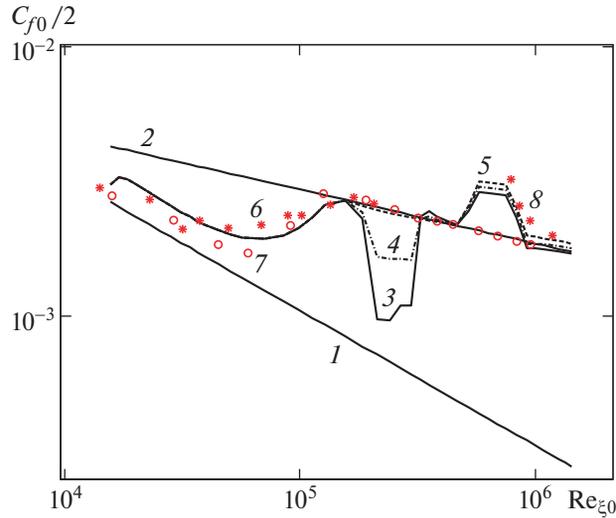


Рис. 4. Распределения коэффициента трения от числа Re_{ξ_0} : 1, 2 и 6–8 как на рис. 2; 3, 4 – расчетные кривые для двух участков с вдувом $F_w = 0.004$ и 0.002 на первом и с отсосом $F_w = -0.0024$ на втором; 5 – только для одного второго с $F_w = -0.0024$; 8 – экспериментальные с отсосом для второго участка с $F_w = -0.0024$.

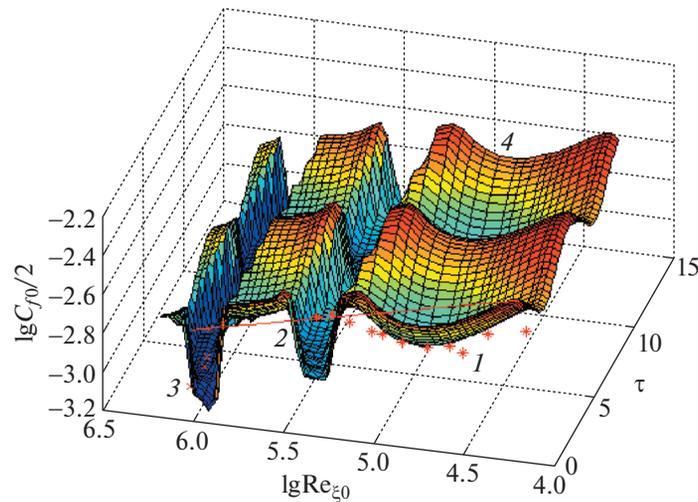


Рис. 5. Расчетная поверхность коэффициента трения $C_{f0}/2$: 1 – экспериментальные данные в плоскости $\tau = 0$; 2 – зависимость для турбулентного режима ($\tau = 0$); 3 – эксперимент для второго участка при $F_w = 0.004$ ($\tau = 0$); 4 – расчетная поверхность по $F_{w\tau}(\tau)$ при постоянном расходе $F_w = 0.004$ для $\tau = 0$ на двух участках.

Распределения коэффициента трения $C_{f0}(\tau, Re_{\xi_0})/2$ в виде поверхности с последовательными заданными условиями вдува и отсоса на двух участках представлены на рис. 6 и 7. Причем в этих случаях на первых участках установлен вдув с одинаковой интенсивностью расхода $F_w = 0.004$ для $\tau = 0$, как и $F_{w\tau}(\tau)$, но с разными интенсивностями отсоса на вторых участках с $F_w = -0.004$ и $F_w = -0.0024$ ($\tau = 0$) с различающимися расстояниями между ними, причем во втором варианте участок отсоса располагается ближе к первому и со значениями от $Re_{\xi_{01}} = 5 \times 10^5$ до $Re_{\xi_{02}} = 8 \times 10^5$. За ним располагается участок последействия отсоса с заданными экспериментальными данными (3).

На рис. 8а дается расчетная поверхность $St_0(\tau, Re_{\xi_0})$ для первого участка с вдувом $F_w = 0.004$ и второго с отсосом $F_w = -0.004$ с теми же обозначениями. Первый участок, располагающийся в числах Рейнольдса от значения $Re_{\xi_{01}} = 1.8 \times 10^5$ до $Re_{\xi_{02}} = 3 \times 10^5$, находится на достаточном расстоянии от второго для значений $Re_{\xi_{01}} = 8 \times 10^5$ до $Re_{\xi_{02}} = 1.2 \times 10^6$. Возмущения, развивающиеся

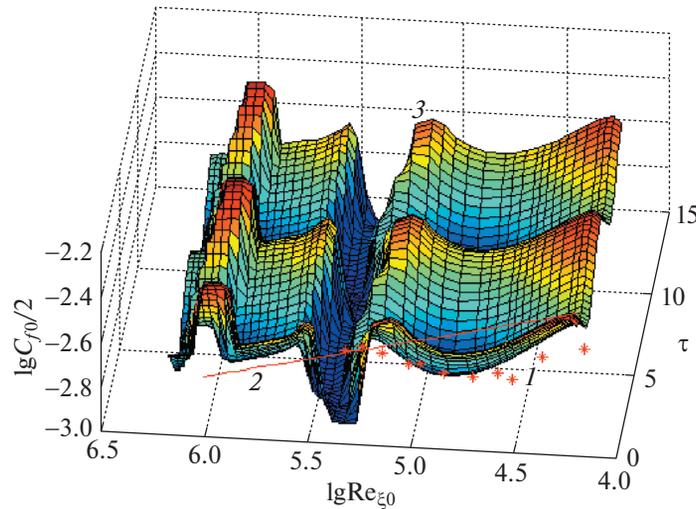


Рис. 6. Расчетная поверхность коэффициента трения $C_{f0}/2$: 1, 2 как на рис. 5; 3 – расчетная поверхность по $F_{wr}(\tau)$ при вдуве $F_w = 0.004$ и отсосе $F_w = -0.004$ для $\tau = 0$.

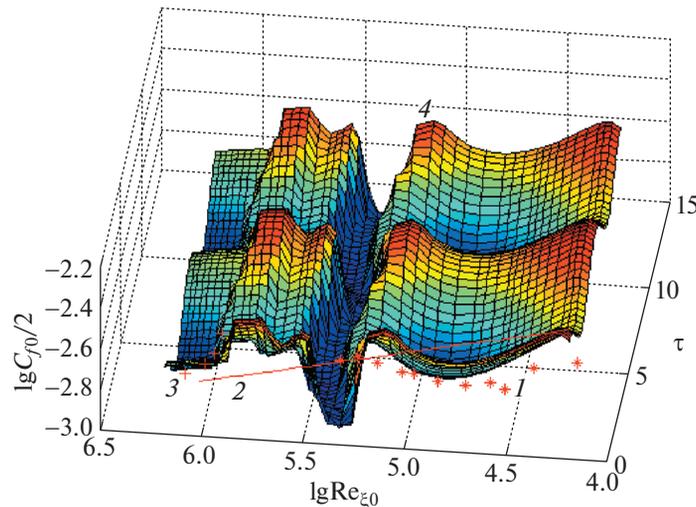


Рис. 7. Расчетная поверхность коэффициента трения $C_{f0}/2$: 1, 2 как на рис. 5; 3 – эксперимент для второго участка при отсосе $F_w = -0.0024$; 4 – расчетная поверхность при вдуве $F_w = 0.004$ и отсосе $F_w = -0.0024$ для $\tau = 0$.

в пограничном слое, вызванные вдуваемым газом в пристеночную его область, успевают в основном ослабнуть к началу воздействия отсоса на втором участке. Кроме того, на эти возмущения еще накладывается гармоническое колебание во времени внешнего течения в пограничном слое. Если на расчетной поверхности участок вдува (3) выделяется протяженной впадиной с локальными минимумами, то на втором участке отсоса (4) реализуются локальные максимумы в виде возвышенностей.

Расчетная поверхность $St_0(\tau, Re_{x0})$ на сюжете б рис. 8 соответствует положению первого участка (3) как на сюжете а. Второй участок с интенсивностью отсоса $F_w = -0.0024$ для $\tau = 0$ начинается раньше со значениями координат от $Re_{x01} = 5 \times 10^5$ до $Re_{x02} = 8 \times 10^5$. Ввиду этого возмущения, вызванные вдувом, не успевают ослабнуть в пограничном слое и почти сразу попадают под воздействие отсоса на втором участке, несмотря на то, что его интенсивность слабее, чем в первом варианте.

За локальными максимумами в виде возвышенностей (4) следует участок последействия отсоса. Так как величина максимумов меньше, чем на рис. 8а, то падение значений за ними вниз

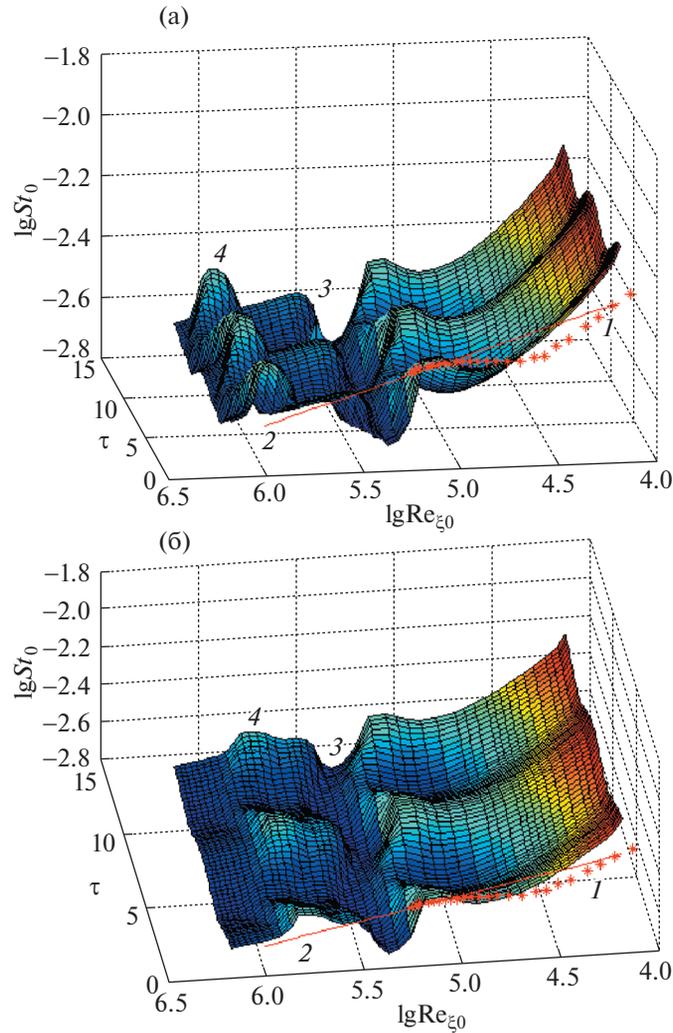


Рис. 8. Расчетная поверхность коэффициента теплообмена (число Стантона) St_0 : а – 1 – экспериментальные данные; 2 – зависимость для турбулентного режима; 3, 4 – положения первого при вдуве $F_w = 0.004$ и второго при отсосе $F_w = -0.004$ проницаемых участков для $\tau = 0$ на расчетной поверхности по $F_{wf}(\tau)$; б – 1, 2 как на а; 3, 4 – положения первого при вдуве $F_w = 0.004$ и второго при отсосе $F_w = -0.0024$ для $\tau = 0$ проницаемых участков на расчетной поверхности.

по потоку становится менее быстрое. На участках отсоса расчетная поверхность состоит из кривых для $Re_{\xi_0} = \text{const}$, близких к гармоническим, как, впрочем, и на участках вдува.

Проведенный анализ применимости двухпараметрической K – ϵ -модели для исследования взаимодействия массообмена на проницаемом участке поверхности в условиях вдува и отсоса показал удовлетворительное согласование расчетных результатов с экспериментальными данными по коэффициенту трения на стенке для малых значений интенсивности расхода массы. Причем с ростом расхода это соответствие несколько нарушается. Следует заметить, что при численной реализации метода в применяемую модель турбулентности не вносились дополнительные корректирующие изменения, т.е. в исходные константы и функции, которые оставались неизменными, как и в [21].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе численного исследования механизмов взаимодействия вдува и отсоса на двух проницаемых участках с набегающим потоком высокой интенсивности турбулентности при задании одинаковых и разных значений массового расхода на них определен ряд основных свойств и особенностей течения и теплообмена как на самих участках, так и вниз по потоку. Для проведенных расчетов задачи в стационарной постановке с применением K – ϵ -модели турбулентности

установлено удовлетворительное соответствие результатов по коэффициенту трения с данными экспериментов для всех представленных вариантов. Из проведенных расчетов лучшее согласование результатов с экспериментальными данными получено для одного участка, когда входные условия заданы наиболее близкими экспериментальным.

Для нестационарного режима обтекания поверхности на основе численного исследования взаимодействия вдува на двух проницаемых участках с набегающим потоком высокой интенсивности турбулентности при задании разных значений массового расхода определен ряд основных свойств теплообмена на самих участках и вниз по потоку. При исследовании совместного воздействия гармонических колебаний во времени внешней скорости и заданного распределения плотности расхода на характеристики теплопереноса в нестационарных пограничных слоях установлено определяющее влияние их амплитуд колебаний и плотности расхода массы. Их увеличение приводит к интенсификации теплообмена и количественному росту амплитуд колебаний характеристик пограничного слоя.

Исследование выполнено по теме госзадания № АААА-А20-120011690135-5 и при частичной поддержке грантом РФФИ № 20-01-00162.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Simpson R.L.* The effect of a discontinuity in wall blowing on the turbulent incompressible boundary layer // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* 1971. V. 14. № 12. P. 2083–2097.
2. *Simpson R.L.* Characteristics of turbulent boundary layers at low Reynolds numbers with and without transpiration // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 42. Pt 4. P. 783–799.
3. *Kays W.M.* Heat transfer to the transpired turbulent boundary layer // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1972. V. 15. № 5. P. 1023–1044.
4. *Andersen P.S., Kays W.M., Moffat R.J.* Experimental results for the transpired the turbulent boundary layer in an adverse pressure gradient // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 69. Pt. 2. P. 353–375.
5. *Алексин В.А., Совершенный В.Д.* Численный расчет турбулентного пограничного слоя с резким изменением граничных условий / Сб. Турбулентные течения. М.: Наука, 1977. С. 55–63.
6. *Алексин В.А., Совершенный В.Д., Чикова С.П.* Расчет турбулентного пограничного слоя на поверхностях с проницаемыми участками // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1978. № 1. С. 71–77.
7. *Лалин Ю.В.* Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М.: Наука, 1970. 344 с.
8. *Леонтьев А.И., Лущик В.Г., Якубенко А.Е.* Сжимаемый турбулентный пограничный слой на проницаемой пластине при вдуве инородного газа // *ТВТ.* 2007. Т. 45. № 4. С. 543–551.
9. *Динь К.Х., Егоров И.В., Федоров А.В.* Влияние волн Маха на ламинарно-турбулентный переход при сверхзвуковом обтекании плоской пластины // *Изв. РАН. МЖГ.* 2018. № 5. С. 113–124.
10. *Алексин В.А.* Численное моделирование взаимодействия нестационарного вдува (отсоса) на поверхности с турбулентным пристенным течением // *Изв. РАН. МЖГ.* № 6. 2019. С. 6074.
11. *Transition Modelling for Turbomachinery II: An Updated Summ. of ERCOFTAC Trans. SIG Progr. 2nd WORKSHOP / Ed. A.M. Savill. Cambridge: Univ. Press. 1994. 226 p.*
12. *Epik E.Ya.* Heat transfer effects in transitions // *Proc. On Turbulent Heat Transfer, Engineering Foundation Conf. N. Y.: San Diego California. 1996. P. 1–47.*
13. *Алексин В.А., Казейкин С.Н.* Моделирование влияния параметров турбулентности набегающего потока на течение в нестационарном пограничном слое // *Изв. РАН. МЖГ.* 2000. № 6. С. 64–77.
14. *Алексин В.А.* Моделирование влияния параметров турбулентности набегающего потока на теплообмен нестационарного пограничного слоя // *Изв. РАН. МЖГ.* 2003. № 2. С. 82–96.
15. *Гиневский А.С., Иоселевич В.А., Колесников А.В., Лалин Ю.В., Пилипенко В.А., Секундов А.Н.* Методы расчета турбулентного пограничного слоя // *Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ. 1978. Т. 11. С. 155–304.*
16. *Hanjalic K., Launder B.E.* Contribution towards a Reynolds-stress closure for low-Reynolds-number turbulence // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 74. № 4. P. 593–610.
17. *Bradshaw P., Ferris D.H., Atwell N.P.* Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation // *J. Fluid Mech.* 1967. № 3. P. 593–616.
18. *Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.* Трехпараметрическая модель турбулентности: расчет теплообмена // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1986. № 2. С. 40–52.
19. *Леонтьев А.И., Лущик В.Г., Макарова М.С.* Коэффициент восстановления температуры в пограничном слое на проницаемой пластине // *ТВТ.* 2017. Т. 55. № 2. С. 255–261.
20. *Jones W.P., Launder B.E.* The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* 1973. V. 16. № 6. P. 1119–1130.
21. *Chien K.-Y.* Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model // *AIAA Journal.* 1982. V. 20. № 1. P. 33–38.
22. *Алексин В.А.* Моделирование взаимодействия нестационарного потока высокой интенсивности турбулентности с теплообменом в пограничном слое на поверхности // *Изв. РАН МЖГ.* 2018. № 6. С. 55–66.