УДК 533.6.011.5

АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СФЕРЫ И ЦИЛИНДРА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

 А. Б. Горшков*

Центральный научно-исследовательский институт машиностроения, Москва, Россия

**E-mail: ab_gorshkov@tsniimash.ru*

Поступила в редакцию 05.02.2020 г.
После доработки 12.03.2020 г.
Принята к публикации 12.03.2020 г.

Рассматривается ламинарное течение около сферы и цилиндра, расположенного перпендикулярно набегающему потоку, с фиксированной температурой поверхности, равной температуре восстановления при сверхзвуковом обтекании совершенным газом с постоянным отношением теплоемкостей на основе численного решения уравнений Навье–Стокса. Расчеты выполнены при числах Маха 3 (цилиндр) и 5 (сфера) в диапазоне чисел Рейнольдса 1–3000. Исследовано влияние граничных условий прилипания и скольжения на поверхности тела на параметры течения. Основное внимание уделено определению аэродинамических характеристик. Выполнено сравнение с имеющимися экспериментальными и расчетными данными.

Ключевые слова: сверхзвуковое обтекание, совершенный газ, аэродинамические характеристики, уравнения Навье–Стокса, численное моделирование

DOI: 10.31857/S0568528120050072

Имеется большое число экспериментальных и теоретических работ, посвященных обтеканию простых тел разреженным газом при сверхзвуковых скоростях. При теоретическом рассмотрении применяют в основном два подхода, основанные на решении уравнения Больцмана и уравнений Навье–Стокса (или их упрощенных аналогов) [1–3]. В последнем случае расчеты часто проводятся с использованием граничных условий прилипания на поверхности тела [2, 3]. Есть несколько работ, где расчеты выполнены с учетом эффекта скольжения [2, 4, 5], но систематического сопоставления результатов, полученных с учетом и без учета скольжения, в литературе практически не проводилось. Например, автору известна только одна работа [4], где на основе уравнений вязкого ударного слоя было исследовано, насколько сильно влияет использование условий скольжения вместо условий прилипания на коэффициент сопротивления при гиперзвуковом обтекании лобовой поверхности охлажденной сферы ($M_\infty = 20$, $t_w = T_w/T_{0\infty} = 0.02, 0.3$). Расчетные данные по коэффициенту сопротивления цилиндра при сверхзвуковом обтекании при малых числах Рейнольдса, полученные с использованием условий скольжения, в литературе, по-видимому, отсутствуют.

Данное исследование является продолжением работы [6], где были получены расчетные значения температуры восстановления T_r, при которой суммарный тепловой поток на тело равен нулю $Q_w = 0$, и коэффициента теплообмена (в виде числа Нуссельта) при температуре поверхности $T_w = T_r$ в зависимости от числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho_\infty V_\infty D/\mu(T_{0\infty})$. Здесь ρ – плотность, V – скорость газа, D – диаметр тела, T_0 – температура торможения, μ – коэффициент вязкости, индексом ∞ обозначены параметры набегающего потока. Расчет тепловых характеристик в [6] выполнен при $M_\infty = 3$, $T_{0\infty} = 381$ K (цилиндр) и $M_\infty = 5$, $T_{0\infty} = 293$ K (сфера) в диапазоне чисел Re = 1–1000. Выбранные условия в набегающем потоке соответствовали основному количеству экспериментальных данных, с которыми проводилось сравнение. В [6] рассмотрены прежде всего параметры теплообмена, поэтому здесь основное внимание уделено определению аэродинамических характеристик при $T_w = T_r$.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

При решении уравнений Навье–Стокса, записанных в консервативном виде в произвольной системе координат, использовалась неявная итерационная схема, представляющая собой вариант точечного метода Гаусса–Зейделя. Для аппроксимации уравнений применялись центральные разности второго порядка точности с добавлением искусственной диссипации. Подробнее численный метод решения уравнений Навье–Стокса описан в [7].

Внешняя граница расчетной области, фиксированная в процессе расчета, имела форму эллипса. Головная ударная волна рассчитывалась насквозь. Внешняя граница выбиралась достаточно далеко (до нескольких диаметров тела), так чтобы при больших числах Re течение в следе было сверхзвуковым, а при малых Re на входной части границы, где газ втекает, выполнялись условия набегающего потока. Газ предполагался совершенным с показателем адиабаты $\gamma = 1.4$ и числом Прандтля Pr = 0.71, вязкость вычислялась по формуле Сазерленда для воздуха. На поверхности тела использовались условия прилипания $V_w = 0$, $T_w = \text{const}$, а также условия скольжения в двух вариантах. Первый имеет вид [8]:

$$U_s = \frac{2-\alpha_i}{\alpha_i}\ell\left(\frac{\partial U}{\partial n} - \sigma U\right)_s; \quad \ell = \frac{\mu_s}{\rho_s}\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{1}{RT_s}}$$
$$T_s = T_w + \frac{2-0.83\alpha_e}{\alpha_e}\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{\ell}{\Pr}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_s \tag{1.1}$$

Второй взят из [9]:

$$U_s = \frac{2-\alpha_i}{\alpha_i}1.42\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ell\left(\frac{\partial U}{\partial n} - \sigma U\right)_s$$
$$T_s = T_w + \frac{2-0.83\alpha_e}{\alpha_e}\frac{\gamma/2}{\gamma-1}\frac{\ell}{\Pr}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_s \tag{1.2}$$

где индекс s обозначает параметры газа на внешней границе кнудсеновского слоя, U – величина скорости касательной к поверхности тела, α_i, α_e – коэффициенты аккомодации импульса и энергии, которые в расчетах полагались равными 1. Хотя условие для скачка температуры на стенке (1.2) получено для одноатомного газа, тем не менее, оно часто используется также и для расчета течений двухатомного газа. Следует заметить, что формулы (1.1) и (1.2) отличаются только множителем перед производными. Поэтому можно считать, что (1.2) соответствует (1.1) для двухатомного газа, но с другим коэффициентом аккомодации. Значениям $\alpha_i = \alpha_e = 1$ в (1.2) соответствуют $\alpha_i = 0.93$, $\alpha_e = 0.77$ в (1.1).

В расчетах температура поверхности тела полагалась равной температуре восстановления $T_w = T_r$, где T_r заранее неизвестна и определялась в ходе вычислений из условия $Q_w = 0$. Более подробно процедура нахождения T_r описана в [6], там же дано сравнение теоретических и экспериментальных данных. Температура T_r зависит от условий на поверхности тела и числа Re, согласно расчетам [6] в рассматриваемых условиях она изменяется в пределах $t_r = T_r/T_{0\infty} = 0.93$–$1.09$ для цилиндра и $t_r = 0.86$–1.32 для сферы (рис. 1). Согласно экспериментальным данным (см., например, [10]) для континуального обтекания при не очень больших числах Рейнольдса, когда течение еще ламинарное, температура восстановления не зависит от числа Маха при $M_\infty > 2$ и равна $t_{rc} \approx 0.95$ и 0.925 для цилиндра и сферы соответственно. Расчетные зависимости приведенной температуры восстановления $t_r(\text{Re})$ приближенно описываются соотношением ($1 \le \text{Re} \le 3000$, точность 1%):

$$t_r = \frac{a + b\text{Re}^{0.25} + t_{\text{rc}}\text{Re}}{c + \text{Re}} \tag{1.3}$$

Коэффициенты a, b и c для цилиндра и сферы при разных условиях на поверхности даны в табл. 1.

Полный коэффициент сопротивления тела C_x можно представить в виде суммы коэффициентов сопротивления за счет действия сил давления C_{xp} (волновое сопротивление) и трения $C_{x\tau}$, которые в расчетах определялись следующим образом:

$$C_x = \frac{2F}{\rho_\infty V_\infty^2 S} = C_{xp} + C_{x\tau} = \frac{2(1+\nu)}{\rho_\infty V_\infty^2}\int_0^\pi (P_w\cos\theta + \tau_w\sin\theta)\sin^\nu\theta d\theta$$

где $\nu = 0$ и 1 для цилиндра и сферы соответственно, F – сила сопротивления, S – площадь поперечного сечения, θ – угол, отсчитываемый от критической точки, P_w, τ_w – давление и напряже-

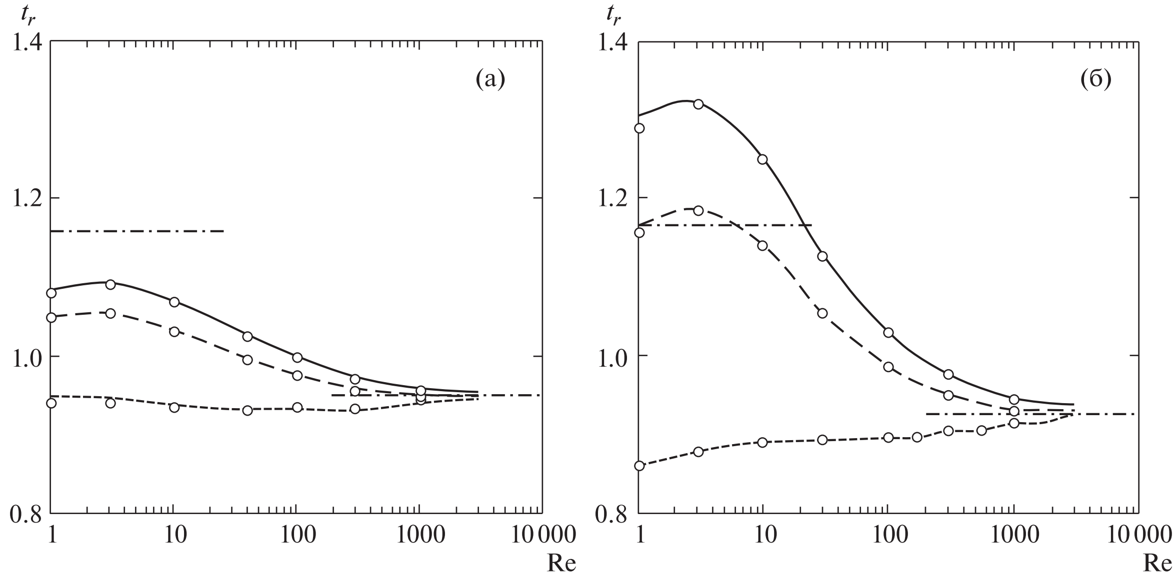

Рис. 1. Расчетная зависимость температуры восстановления цилиндра (а) и сферы (б) от числа Рейнольдса. Кривые и точки – расчеты на сетках 100 × 100 и 61 × 70. Штриховые и сплошные кривые – расчет с условиями скольжения (1.1) и (1.2) соответственно, пунктир – расчет с условиями прилипания, штрихпунктир – свободномолекулярный и континуальный пределы.

ние трения на поверхности тела. В предельном случае континуального течения в приближении Ньютона коэффициент сопротивления равен [10]

$$C_{xc} \equiv C_{xp} = a\frac{\gamma+1}{\gamma}\left[\frac{(\gamma+1)^2}{4\gamma}\right]^{1/(\gamma-1)}$$

где $a = 2/3$ и $1/2$ для цилиндра и сферы соответственно, что при $\gamma = 1.4$ дает значения $C_{xc} = 1.23$ и 0.920. Суммарный тепловой поток на тело, отнесенный к площади поверхности, вычислялся по формуле

$$Q_w = \frac{1}{a\rho_\infty V_\infty^3}\int_0^\pi \left(\kappa\frac{\partial T}{\partial n} + U\tau\right)_s \sin^\nu\theta d\theta \tag{1.4}$$

где $a = \pi$ и 2 для цилиндра и сферы соответственно.

2. ПРОВЕДЕНИЕ РАСЧЕТОВ

В [6] основное количество расчетов было выполнено на сетке 61 × 70, в данной работе для контроля точности все расчеты были повторены на сетке 100 × 100. Кроме того, был немного увеличен диапазон чисел Рейнольдса Re = 1–3000. Для интегральных величин, таких как температура восстановления, расчетные значения, полученные на разных сетках, хорошо совпадают между собой (см. рис. 1). Максимальное отличие для t_r составляет около 1.5% и наблюдается в

Таблица 1. Коэффициенты в формуле (1.3) для приведенной температуры восстановления

	a	b	c	
цилиндр:	207	–2.5	216	прилипание
	8.8	0.75	9	скольжение (1.1)
	25.1	1.1	24	скольжение (1.2)
сфера:	10500	97	12100	прилипание
	5.9	2.15	6.7	скольжение (1.1)
	10.7	3.1	10.3	скольжение (1.2)

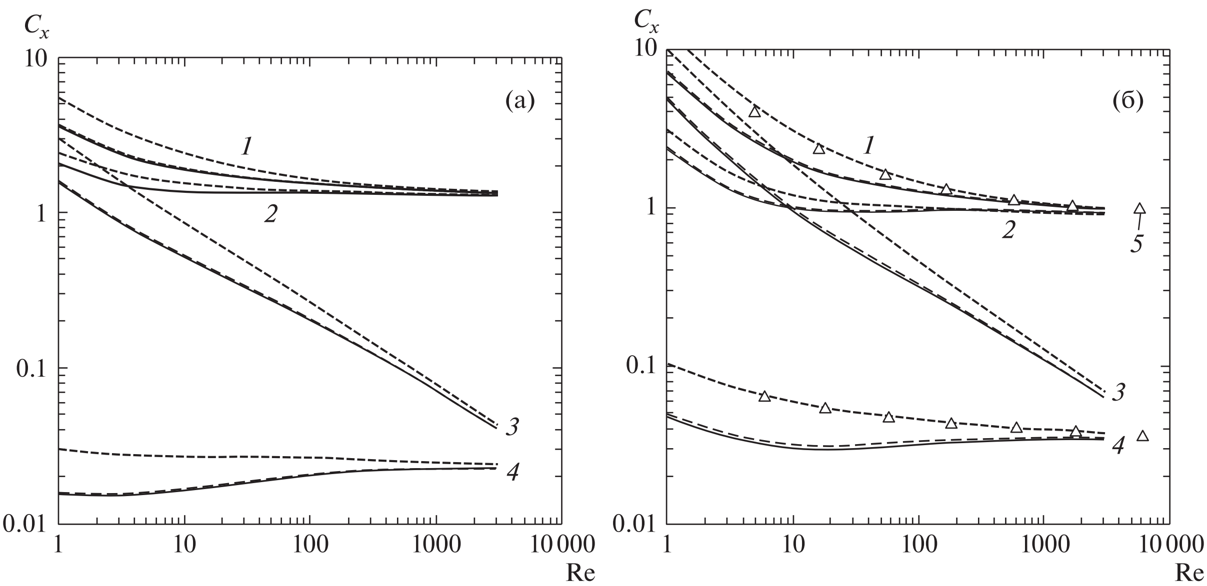

Рис. 2. Зависимость коэффициентов сопротивления C_x – *1*, C_{xp} – *2* и $C_{x\tau}$ – *3* от числа Рейнольдса для цилиндра (а) и сферы (б). *4* – $0.01C_{x\tau}\mathrm{Re}^{0.5}$, *5* – расчет [3]. Остальные обозначения – см. рис. 1.

случае обтекания сферы при Re = 1. При анализе представленных ниже данных следует иметь в виду, что благодаря различию в геометрии, а также поскольку число Маха в случае обтекания сферы выше, эффекты разреженности для сферы играют бóльшую роль и начинают проявляться при более высоких числах Рейнольдса (Kn ~ M/Re), чем для цилиндра.

3. СУММАРНЫЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Зависимости расчетных коэффициентов сопротивления C_x, C_{xp}, $C_{x\tau}$ от числа Re при различных граничных условиях на поверхности тела для цилиндра и сферы приведены на рис. 2. Следуя [11], C_x можно аппроксимировать ($1 \le \mathrm{Re} \le 3000$, точность 5%) в виде рядов по $z = \mathrm{Re}^{-0.5}$. Для цилиндра при граничных условиях прилипания или скольжения (1.2) получим соответственно

$$1.3 + 3.1z + 1.0z^2, \quad 1.3 + 2.1z + 0.17z^2$$

Аналогично для сферы

$$0.94 + 4.1z + 8.2z^2, \quad 0.94 + 2.0z + 4.2z^2$$

Здесь приведено выражение только для условия скольжения (1.2), поскольку зависимости коэффициентов сопротивления для обоих условий скольжения практически совпадают. Относительный рост коэффициентов сопротивления при уменьшении числа Re от 3000 до 1 приведен в табл. 2. Видно, что волновое сопротивление C_{xp} рассматриваемых тел остается практически постоянным при достаточно больших числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} \ge 50$ для условий прилипания, $\mathrm{Re} \ge 10$ для условий скольжения). Это связано с тем, что распределение давления вдоль поверхности на наветренной стороне тела, которое вносит основной вклад в C_{xp}, в данном диапазоне числа Re почти не зависит от него. При уменьшении числа Re давление на поверхности тела из-за вязких эффектов начинает расти, что приводит к росту волнового сопротивления. Отметим, что в силу указанных выше причин (различие в геометрии и числе Маха) рост C_{xp} для цилиндра значительно меньше, чем для сферы. Так, для условий прилипания при уменьшении числа Рейнольдса с 3000 до 1 волновое сопротивление цилиндра увеличивается с 1.30 до 2.43 (в 1.87 раза – см. табл. 2), а для сферы – с 0.916 до 3.07 (в 3.34 раза).

Вклад сопротивления трения $C_{x\tau}$ в полное сопротивление C_x при высоких числах Рейнольдса независимо от граничных условий на поверхности небольшой – около 3 и 7% при Re = 3000 для цилиндра и сферы соответственно. Но с уменьшением числа Рейнольдса $C_{x\tau}$ быстро растет (примерно пропорционально $1/\mathrm{Re}^{0.5}$) и в случае обтекания сферы сравнивается с волновым сопро-

Таблица 2. Относительный рост аэродинамических коэффициентов при уменьшении числа Re от 3000 до 1

Цилиндр/сфера	прилипание	скольжение (1.1)	скольжение (1.2)
C_x	4.06/13.4	2.74/7.49	2.71/7.28
C_{xp}	1.87/3.34	1.60/2.60	1.59/2.53
$C^*_{x\tau}$	1.25/2.71	0.698/1.42	0.688/1.39
P_f	1.61/2.69	1.50/2.16	1.49/2.10

тивлением C_{xp} при Re ≈ 30 для условий прилипания и Re ≈ 10 для условий скольжения. При обтекании цилиндра относительный вклад $C_{x\tau}$ в полное сопротивление значительно меньше и для условий прилипания сравнивается с C_{xp} только при Re ≈ 2, для условий скольжения всюду $C_{x\tau} < C_{xp}$ в рассмотренном диапазоне чисел Re. На рис. 2 показана также зависимость величины $C^*_{x\tau} = 0.01C_{x\tau}\mathrm{Re}^{0.5}$ от числа Рейнольдса, которая в приближении пограничного слоя постоянна. Можно видеть, что данная аппроксимация для обоих тел справедлива только при достаточно высоких числах Рейнольдса Re > 200, за исключением обтекания цилиндра с условием прилипания, когда приближение пограничного слоя для коэффициента сопротивления трения оказывается справедливым во всем диапазоне чисел Рейнольдса – $C_{x\tau} \approx 2.7/\mathrm{Re}^{0.5}$ с точностью ±12%.

Как видно из представленных на рис. 2 данных, использование в расчетах условий скольжения вместо условий прилипания приводит к некоторому уменьшению волнового сопротивления – на 14 и 22% для цилиндра и сферы при Re = 1. Сопротивление трения падает значительно больше – на 44 и 51% соответственно, т.е. примерно вдвое. В итоге полное сопротивление цилиндра и сферы при использовании условий скольжения вместо прилипания уменьшается на 30 и 45% при Re = 1. При этом следует отметить, что в отличие от рассмотренных ранее в [6] параметров теплообмена T_r (см. рис. 1) и Nu расхождение в значениях аэродинамических характеристик C_x, C_{xp}, $C_{x\tau}$, полученных с использованием условий скольжения (1.1) и (1.2), оказалось небольшим. Оно увеличивается с уменьшением числа Re, но нигде не превышает 4% и в логарифмическом масштабе мало заметно. По-видимому, относительно слабое влияние вида условий скольжения на АДХ по сравнению с параметрами теплообмена объясняется тем, что давление достаточно консервативная величина, а также тем, что различие между условиями (1.1) и (1.2) в коэффициентах аккомодации для импульса значительно меньше, чем для энергии.

Влияние условий скольжения на волновое и полное сопротивление становится заметным (превышает 5%) при Re ≤ 100 для цилиндра и Re ≤ 300 для сферы. Влияние условий скольжения на сопротивление трения обоих тел превышает 5% во всем рассмотренном диапазоне чисел Re.

4. ПАРАМЕТРЫ ТЕЧЕНИЯ

Расчетные зависимости безразмерного давления в передней критической точке сферы и цилиндра $P_f = p(0°)/p'_0$ от числа $\mathrm{Re}_p = \mathrm{Re}_{2D}(\rho_2/\rho_\infty)^{0.5}$, приведенные на рис. 3а, с точностью 2% можно представить в виде рядов по $z = \mathrm{Re}_p^{-0.5}$. Аналогично аппроксимациям из разд. 3, для цилиндра и сферы при граничных условиях прилипания и скольжения (1.2) получим

$$1 + 1.22z^2, \quad 1 - 0.41z + 1.18z^2$$

$$1 + 3.38z^2, \quad 1 - 0.677z + 3.54z^2$$

Зависимость P_f для условия скольжения (1.1) слабо отличается от аналогичной зависимости для условия скольжения (1.2). Здесь p'_0 – давление торможения в невязком течении за прямым скачком уплотнения, $\mathrm{Re}_{2D} = \rho_\infty V_\infty D/\mu(T_2)$, индекс 2 относится к условиям за прямой ударной волной. Видно, что $P_f = 1$ при $\mathrm{Re}_p > \mathrm{Re}_p^*$, где $\mathrm{Re}_p^* \approx 100$ и 200 для цилиндра и сферы соответственно. С уменьшением Рейнольдса давление P_f для обоих тел увеличивается, что вызвано возрастающим влиянием вязкости. При малых числах Рейнольдса Re ~ 1 ударная волна и пограничный слой сливаются, образуя сплошной вязкий ударный слой. За счет эффектов вязкости область возмущения течения вокруг тела как вдоль, так и поперек потока резко увеличивается (до 10–15 радиусов тела при Re = 1). В результате набегающий поток газа тормозится не только в области, равной поперечному сечению тела, как это имеет место в свободномолекулярном течении,

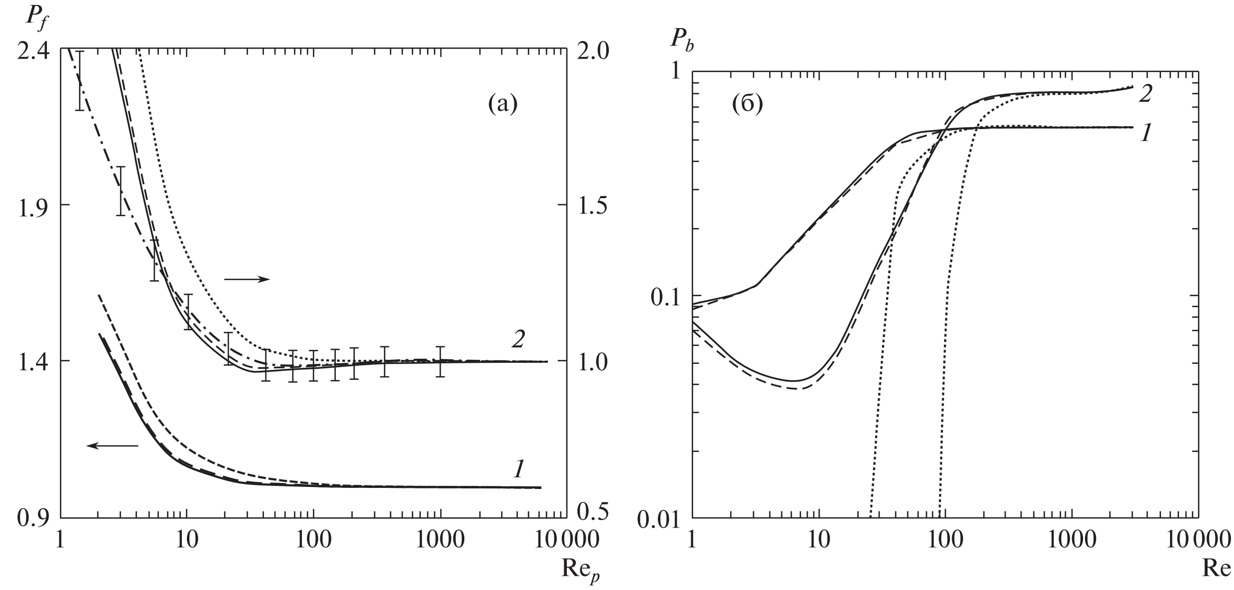

Рис. 3. Зависимость давления в передней P_f (а) и задней P_b (б) критических точках от числа Рейнольдса. *1* – цилиндр, *2* – сфера. Штрихпунктир – корреляция экспериментальных данных [15]. Остальные обозначения – см. рис. 1.

но и на значительно больших расстояниях. Можно сказать, что эффективное поперечное "сечение" тела при континуальном описании с использованием уравнений Навье–Стокса в разреженном течении превышает его геометрическое поперечное сечение, что и приводит к возрастанию давления выше свободномолекулярного предела.

Интересно отметить, что согласно расчетам (см. рис. 3а) в случае обтекания сферы при использовании условий скольжения давление P_f с уменьшением числа Рейнольдса сначала несколько падает (примерно на 2.5% для условий (1.2)) в диапазоне $\mathrm{Re} = 10 \div 100$, и только затем начинает резко расти. Для условий прилипания, а также в случае обтекания цилиндра давление в передней критической точке монотонно увеличивается с уменьшением числа Re.

На рис. 3б показаны зависимости отношения $P_b = p(180°)/p_\infty$ в задней критической точке от Re для условий прилипания и скольжения (1.1), (1.2). Можно видеть, что при достаточно больших числах Рейнольдса $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}^*$ ($\mathrm{Re}^* \approx 150$ для цилиндра и 700 для сферы) значения P_b не зависят от условий на поверхности. Различие в величинах P_b для условий скольжения (1.1) и (1.2) незначительно во всем рассмотренном диапазоне чисел Re и не превышает 10%. Для условий прилипания при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}^*$ значение P_b начинает резко уменьшаться, становится меньше, чем для условий скольжения, и достигает очень малых величин – $P_b \sim 10^{-10}$ и меньше. Причем уровень давления в окрестности задней критической точки при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}^*$ для условий прилипания начинает зависеть от расчетной сетки, уменьшаясь на более мелких сетках. При этом величины температуры и теплового потока остаются конечными. Данный эффект был отмечен в предыдущей работе [6], где он был исследован при гиперзвуковом числе Маха $M_\infty = 20$. Столь низкий уровень давления означает, что фактически перед задней критической точкой происходит отрыв потока. Однако причиной такого «вязкого» отрыва является не возрастание давления вниз по потоку, как в обычном случае при высоких числах Рейнольдса, а тормозящее действие сил вязкости. По-видимому, поток импульса к пристеночной струйке тока от внешних слоев газа оказывается недостаточным, чтобы компенсировать потери импульса в ней из-за трения о поверхность тела. Данное предположение подтверждается тем фактом, что при использовании условий скольжения эффект "вязкого" отрыва исчезает. Как видно из рис. 3б, в этом случае давление P_b с уменьшением числа Рейнольдса остается конечным, падая примерно на порядок, причем для сферы при $\mathrm{Re} < 10$ оно даже начинает возрастать, что вызвано увеличением давления на наветренной стороне в данном диапазоне чисел Re. Следует отметить, что при больших числах Рейнольдса значение P_b почти постоянно несмотря на то, что в донной области тела образуется и растет отрывная зона. Для условий скольжения этот эффект наблюдается при $\mathrm{Re} > 50$ (цилиндр) и 200 (сфера), для условия прилипания постоянство P_b достигается при примерно вдвое большем числе Рейнольдса.

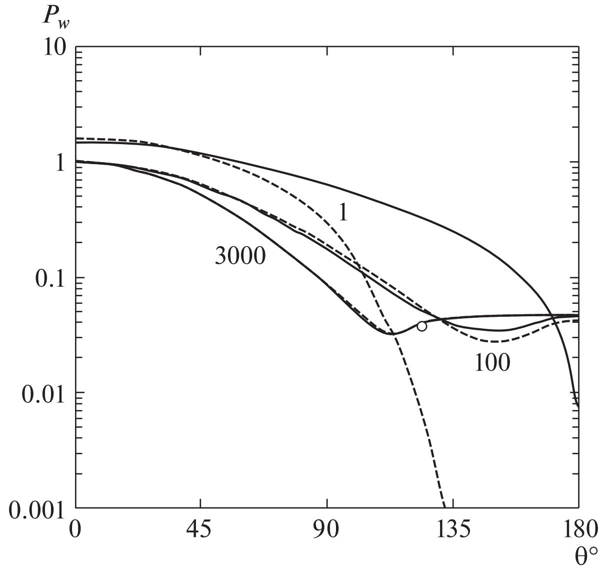

Рис. 4. Распределение давления P_w вдоль поверхности цилиндра. Re = 1, 100 и 3000. Пунктир и сплошные кривые – расчет с условиями прилипания и скольжения (1.1) соответственно. ○ – место отрыва потока.

Увеличение безразмерного давления P_f в критической точке при уменьшении числа Re сопровождается его ростом вдоль всей поверхности тела, что можно видеть на рис. 4, где приведены распределения отношения $P_w = p/p'_0$ по поверхности цилиндра для условий прилипания и скольжения (1.1) при Re = 1, 100 и 1000. Поэтому волновое сопротивление увеличивается примерно пропорционально P_f (см. табл. 2), в особенности это характерно для случая обтекания цилиндра. Например, для условий скольжения (1.1) при уменьшении числа Рейнольдса с 3000 до 1 значения C_x и P_f для цилиндра увеличиваются в 1.60 и 1.50 раза. Для сферы, поскольку эффекты разреженности для нее существеннее, увеличение несколько больше – в 2.60 и 2.16 раза. При использовании условий прилипания возрастание C_{xp} и P_f еще значительнее. Увеличение давления при малых числах Re на подветренной стороне тела не сказывается на величине C_{xp}, поскольку его значения здесь очень низкие.

При малых числах Рейнольдса давление монотонно уменьшается вдоль поверхности и отрывная зона отсутствует. Как видно из рис. 4, при Re = 1 в окрестности передней критической точки использование условий скольжения (1.1) вместо прилипания приводит к небольшому падению P_w на 8% в связи с уменьшением размеров возмущенной области, создаваемой телом. Ниже по течению, наоборот, учет скольжения приводит к увеличению давления. Так, при Re = 1 для условий прилипания наблюдается сильное падение давления (“вязкий” отрыв) на подветренной стороне тела – до $P_w \sim 10^{-12}$ в задней критической точке. Для условий скольжения давление вдоль поверхности также монотонно уменьшается, но не так резко – минимальное значение давления $P_w = 7 \times 10^{-3}$, что соответствует точке $\theta \approx 120°$ для условий прилипания.

С увеличением числа Рейнольдса распределение P_w становится немонотонным – в окрестности задней критической точки давление растет, что при дальнейшем возрастании Re приводит к возникновению отрыва в донной области тела. При высоких числах Re влияние типа граничных условий на давление P_w около передней (Re ≥ 10^2) и задней (Re ≥ 10^3) критических точек незначительно, и в логарифмическом масштабе рис. 4 неразличимо. Вниз по потоку от передней критической точки примерно до области повышения давления использование условий прилипания вместо скольжения приводит к некоторому возрастанию P_w (до 7% при Re = 10^2) из-за увеличения толщины пограничного слоя.

Влияние скольжения на параметры течения у поверхности тела значительно во всем рассмотренном диапазоне чисел Рейнольдса. На рис. 5 показаны распределения относительной температуры T_s/T_r и числа Маха M_s на внешней границе кнудсеновского слоя вдоль поверхности сферы при Re = 1, 10, 100, 3000, полученные с использованием условий скольжения (1.2). Видно, что даже при Re = 3000 число Маха вдоль поверхности сильно меняется и достигает максимума $M_s = 0.314$ при $\theta \approx 120°$ – в области наибольшего разрежения газового потока. При использовании

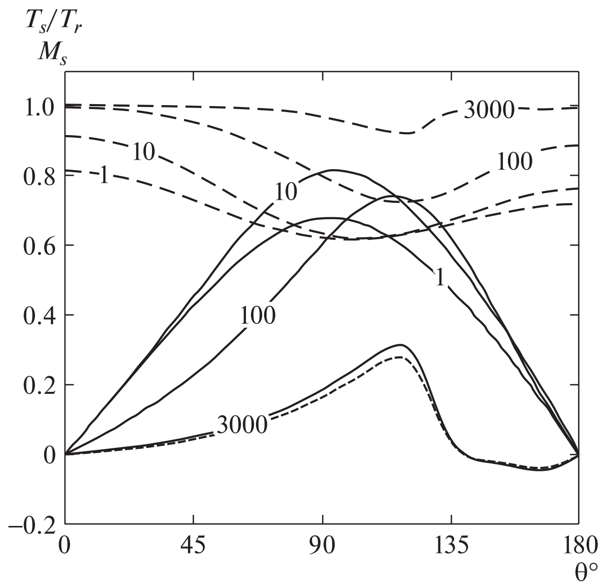

Рис. 5. Распределение температуры и числа Маха вдоль поверхности сферы для условий скольжения (1.2) и (1.1), пунктир. Re = 1, 10, 100 и 3000.

условий (1.1) скорость скольжения на 12% меньше (M_s = 0.279) – пунктирная кривая на рис. 5. Примерно такое же относительное различие в значениях M_s для условий (1.1) и (1.2) наблюдается и при меньших числах Рейнольдса.

Как видно из рис. 5, при обтекании сферы отношение T_s/T_r монотонно увеличивается с ростом числа Рейнольдса, но остается почти всегда меньше 1. Только при Re > 200 в окрестности передней критической точки немного превышает единицу $T_s/T_r \sim 1.004$. Поскольку при $T_w = T_r$ суммарный тепловой поток на тело равен нулю, то интегральный вклад составляющей теплового потока за счет теплопроводности (первое слагаемое в (1.4)) меньше нуля и равен по величине интегральному вкладу в тепловой поток за счет работы сил вязкости (второе слагаемое в (1.4)), который всегда положителен. Поэтому при малых числах Рейнольдса температура тела оказывается выше температуры окружающего газа $T_r > T_s$, причем если Re < 200, то не только интегральная величина теплового потока за счет теплопроводности отрицательна, но и локальные значения $q_{wT} = \kappa\partial T/\partial n$ также меньше нуля вдоль всей поверхности. С увеличением числа Рейнольдса роль вязкости уменьшается, интегральный вклад в тепловой поток за счет теплопроводности стремится к нулю (снизу) и значения q_{wT} вдоль поверхности меняют знак. В результате около передней критической точки, где температура газа у поверхности наибольшая, возникают области с $q_{wT} > 0$ и $T_s > T_r$.

Распределение температуры T_s вдоль поверхности имеет характерный минимум на подветренной стороне, что связано с расширением и охлаждением газового потока при обтекании тела. Минимуму температуры соответствует максимум числа Маха M_s, который находится немного выше по потоку. Расстояние по углу между ними составляет около 5° при Re = 1, уменьшаясь почти до нуля при Re = 3000. Область наибольшего разрежения на поверхности с увеличением числа Рейнольдса немного сдвигается в подветренную сторону – с θ = 95–100° до 120–125°. Отметим, что скорость скольжения газа при уменьшении числа Re с 10 до 1 несколько уменьшается, а не увеличивается, как можно было бы ожидать. Это вызвано, по-видимому, резким возрастанием давления (и плотности) при столь малых числах Re, о котором говорилось выше.

В случае обтекания цилиндра распределение величин T_s/T_r и M_s вдоль поверхности имеет похожий характер. Однако для цилиндра эффекты разрежения не столь значительны, как в случае сферы. Поэтому отношение температур T_s/T_r выше, а скорость скольжения меньше. Например, при Re = 3000 число Маха равно M_s = 0.213 для условий скольжения (1.1).

Как и в случае давления, при уменьшении числа Рейнольдса расчет дает завышенные значения коэффициента $C_f = \tau_w/\rho_\infty V_\infty^2$, что видно из рис. 6, где приведены распределения коэффициента C_f вдоль поверхности цилиндра при нескольких числах Re, а также в случае свободномоле-

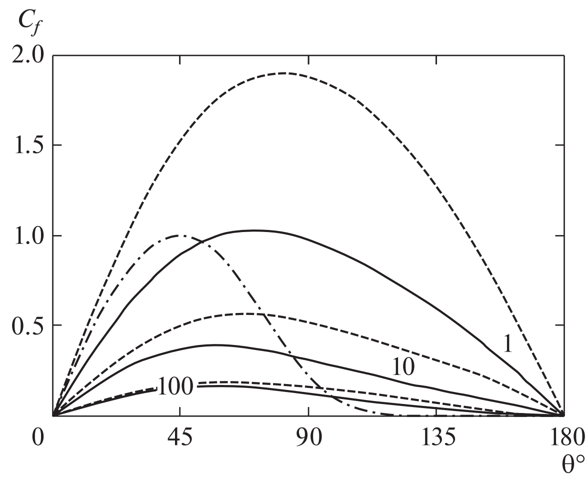

Рис. 6. Распределение коэффициента трения вдоль поверхности цилиндра. Пунктирные и сплошные кривые – условия прилипания и скольжения (1.1). Штрихпунктир – свободномолекулярный предел [10]. Re = 1, 10 и 100.

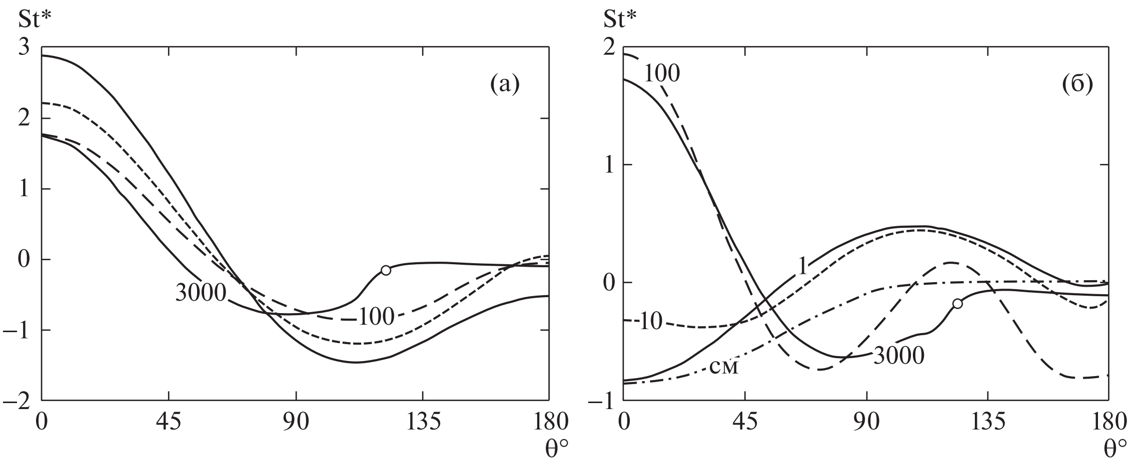

Рис. 7. Распределение числа St* вдоль поверхности цилиндра, (а) условия прилипания, (б) скольжения (1.1). Re = 1, 10, 100 и 3000 см – свободномолекулярное течение [10], ○ – место отрыва потока.

кулярного течения. Для сферы распределения $C_f(\theta)$ имеют похожий характер. При Re = 1 для условий прилипания максимум коэффициента трения для цилиндра почти в 2 раза, а для сферы в 4 раза больше соответствующего свободномолекулярного значения. Учет скольжения при Re = 1 приводит к уменьшению C_f примерно вдвое для обоих тел. Характер расчетной зависимости коэффициента $C_f(\theta)$ в разреженном течении сильно отличается от зависимости $C_f(\theta)$ в свободномолекулярном пределе. Согласно расчетам значения коэффициента трения на подветренной и наветренной сторонах сравнимы по величине. Максимум C_f всегда находится ниже по течению соответствующего максимума для свободномолекулярного течения при $\theta_{\max} = 45°$, сдвигаясь вверх по потоку с ростом числа Рейнольдса.

Для условий прилипания и скольжения (1.1) при числах Рейнольдса Re = 1, 10, 100, 3000 на рис. 7 показаны распределения величины

$$\mathrm{St}^* = \mathrm{St}\sqrt{\mathrm{Re}}, \quad \mathrm{St} = \frac{(\varkappa \partial T/\partial n + U\tau)_s}{\rho_\infty V_\infty C_p |T_{0\infty} - T_r|} \tag{4.1}$$

вдоль поверхности цилиндра. Для представления выбраны данные для цилиндра как более наглядные, поскольку для него в силу геометрии из условия $Q_w = 0$ следует, что “положительные” и “отрицательные” площади, описываемые кривыми St*(θ) на графиках, равны между собой. В случае обтекания сферы зависимости St*(θ) имеют похожий вид. Разность температур в (4.1) взята по абсолютной величине, так как для условий скольжения она меняет знак при изменении числа Re (см. рис. 1).

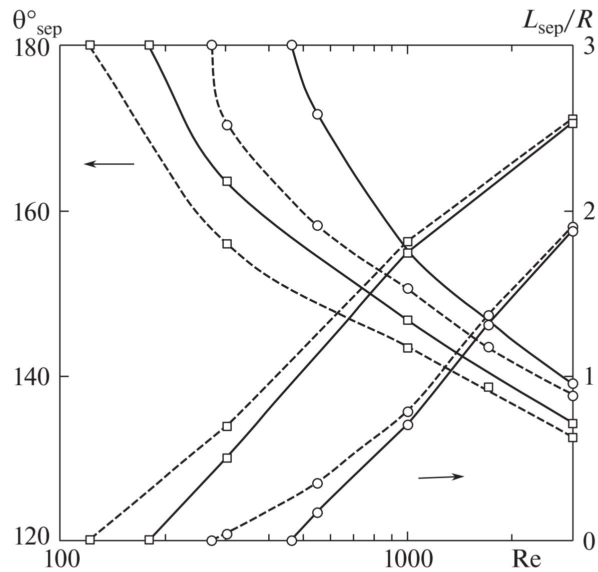

Рис. 8. Зависимости от числа Рейнольдса угла точки отрыва на поверхности и длины зоны отрыва на плоскости (оси) симметрии. □ – цилиндр, ○ – сфера. Пунктирные и сплошные линии – условия прилипания и скольжения (1.1).

Для условий прилипания общий вид кривых St*(θ) не зависит от Рейнольдса – максимумы в передней и задней критических точках и минимум в области разрежения на подветренной стороне. С ростом числа Re величина St* монотонно уменьшается при $\theta < 70°$ и увеличивается при $\theta > 90°$. Поскольку в случае прилипания потока $\mathrm{St} \sim \partial T/\partial n \sim \partial(T_0 - T_r)/\partial n$, то по кривой St*(θ) можно судить о распределении у поверхности тела местной температуры торможения потока T_0 относительно температуры восстановления T_r, которая равна температуре поверхности. Из рис. 7а видно, что около передней и задней критических точек, где поток газа тормозится, температура T_0 достаточно высока, в частности, в окрестности передней критической точки ($\theta < 50°$) превышает T_r. Напротив, в области расширения потока ($\theta \approx 60°$–$120°$), где газ ускоряется, местная температура торможения уменьшается и становится меньше T_r.

Как можно видеть из сравнения рис. 7а (прилипание) и рис. 7б (скольжение), для чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} \geq 100$ в окрестности передней критической точки для теплового потока справедливо приближение пограничного слоя $\mathrm{St}^* \approx \mathrm{const}$. При малых числах Рейнольдса $\mathrm{Re} \leq 10$, характер зависимостей St*(θ), полученных с использованием условий прилипания и скольжения, становится совершенно различным вдоль всей поверхности. Можно сказать, что при переходе от прилипания к скольжению минимумы и максимумы в распределении St*(θ) при $\mathrm{Re} \leq 10$ меняются местами: при учете скольжения число St* максимально в области ускорения потока ($\theta \approx 60°$–$120°$), а в областях торможения ($\theta = 0°$ и $180°$) – минимально. Такое поведение определяется попеременным преобладанием процесса теплопроводности и работы сил вязкости (первое и второе слагаемые в (5)) вдоль поверхности тела. Величина $U\tau \geq 0$, существенная при малых числах Re, максимальна в области ускорения потока, приводя здесь к максимуму St*. Чтобы обеспечить равенство $Q_w = 0$, тепловой поток за счет теплопроводности, который преобладает вблизи передней и задней критических точек, где $U\tau$ близка к нулю, должен быть отрицательным. Только при $\mathrm{Re} = 3000$ характер кривых St*(θ) при разных граничных условиях на поверхности становится похожим, хотя в окрестности точки отрыва все еще сохраняется небольшое различие. Сравнение расчетных распределений St*(θ) при $\mathrm{Re} = 1$ со свободномолекулярным случаем [10] показывает, что независимо от граничных условий решение не выходит на свободномолекулярный предел. Тем не менее на лобовой поверхности расчет с условием скольжения лучше согласуется со свободномолекулярным случаем, чем расчет с условием прилипания.

При увеличении числа Рейнольдса в донной области тела образуется отрывная зона. На рис. 8 показаны зависимости от числа Re угла точки отрыва θ_{sep} на поверхности и длины зоны отрыва L_{sep} на плоскости (оси) симметрии при обтекании цилиндра и сферы для условий прилипания и скольжения (1.1). Для сферы отрывная зона возникает примерно при вдвое большем числе Рейнольдса и имеет меньший размер, чем для цилиндра. Использование условий скольжения вме-

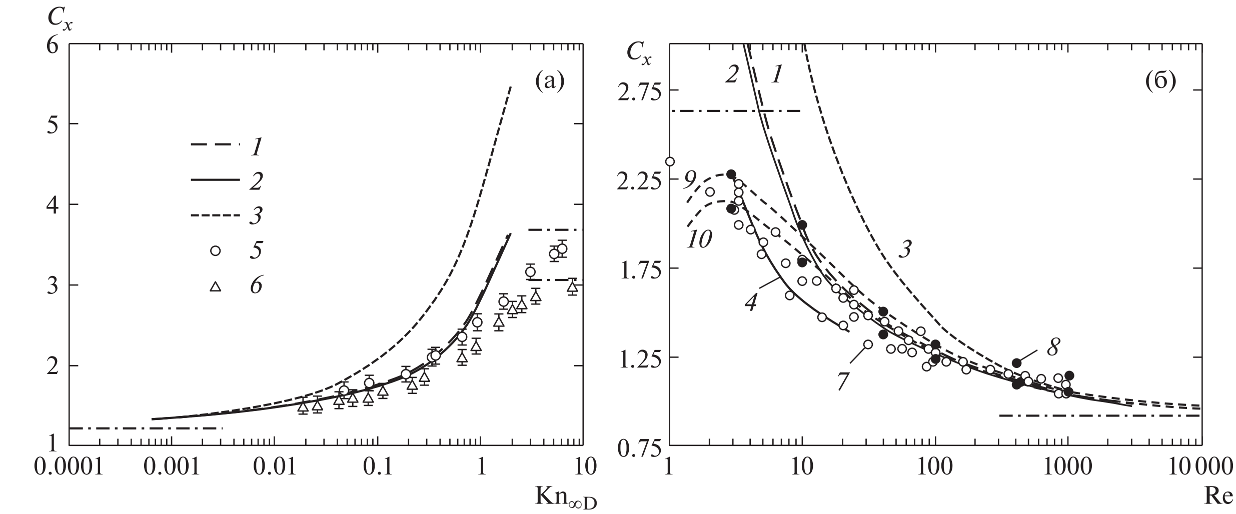

Рис. 9. Зависимость коэффициентов сопротивления цилиндра от числа Кнудсена (а) и сферы от числа Рейнольдса (б). Расчет: *1–3* – условия скольжения (1.1), (1.2) и прилипания, *4* – [5]. Эксперимент: *5*, *6* – M = 2 и 4 [12], *7* и *8* – [13, 14], *9* и *10* – M = 3.9–4.3 и 5.5–6 [11]. Штрихпунктир – континуальный и свободномолекулярный пределы [10].

сто прилипания приводит к задержке образования отрыва и меньшим размерам отрывной зоны при возрастании Re. Условия скольжения (1.2) дают значения θ_{sep} и L_{sep}, очень близкие к значениям для условий (1.1).

5. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ И РАСЧЕТНЫМИ ДАННЫМИ

На рис. 2б показаны расчетные данные [3] по коэффициентам C_x и $C^*_{x\tau}$, полученные на основе численного решения уравнений Навье–Стокса для теплоизолированной сферы и условий прилипания при M = 5. Можно отметить хорошее совпадение с результатами настоящего расчета особенно для $C^*_{x\tau}$ (<1%), максимальное различие (8%) наблюдается для C_x при наименьшем в [3] числе Рейнольдса Re = 5, с ростом Re оно быстро уменьшается и не превышает 2%, что сопоставимо с точностью снятия данных на графиках в [3].

На рис. 3а приведена эмпирическая зависимость P_f от величины Re_p, которая получена в [12] в результате корреляции экспериментальных данных разных авторов по показаниям датчика полного давления, передняя часть которого имела форму полусферы или плоского торца, в сверхзвуковых течениях разреженных газов (воздуха и азота) при $\mathrm{M}_\infty = 1–13$, $t_w \approx 1$. Как и результаты данных расчетов для сферы, корреляционная зависимость [12] имеет небольшой минимум и с учетом ошибки измерений неплохо согласуется с расчетом для условий скольжения при $\mathrm{Re_p} > 5$ (Re ≈ 2.5).

Расчетные и экспериментальные [13] зависимости коэффициента сопротивления цилиндра от числа Кнудсена $\mathrm{Kn}_{\infty D} = (\pi\gamma/2)^{0.5}\mathrm{M}_\infty/\mathrm{Re}_{\infty D}$ показаны на рис. 9а. В [13] исследовалось сопротивление цилиндра в аэродинамической трубе в потоке воздуха при $T_{0\infty} \approx 293$ K, $t_w \approx 1$, $\mathrm{M}_\infty \approx 2$ и 4, погрешность измерений составляла ±0.1. Расчет с условием прилипания начинает “касаться” данных [13] лишь при самых низких числах Кнудсена $\mathrm{Kn}_{\infty D} = 0.02–0.05$ (Re ≈ 40–100), полученных в эксперименте. Использование условий скольжения (1.1) и (1.2) улучшает совпадение с экспериментом до $\mathrm{Kn}_{\infty D} \approx 0.7$ (Re ≈ 3), при этом свободномолекулярный предел в расчете достигается при $\mathrm{Kn}_{\infty D} = 1–2$.

На рис. 9б приведено сравнение результатов настоящих расчетов с тремя группами экспериментальных данных по коэффициенту сопротивления сферы C_x при $t_\mathrm{w} \approx 1$. Первая (светлые точки) включает измерения разных авторов при $\mathrm{M}_\infty = 5–11$, взятые из [14]. Вторая (темные точки) – результаты экспериментов [15], выполненных при $\mathrm{M}_\infty = 3.5–6.2$, третья – экспериментальные данные нескольких авторов, которые для не слишком малых чисел Рейнольдса были аппроксимированы в [11] в виде рядов по $z = \mathrm{Re}^{-0.5}$ для двух диапазонов чисел Маха:

$$C_x = 0.92 + 3.8z - 3.0z^2 \; (M_\infty = 3.2–4.3)$$

$$C_x = 0.93 + 4.2z - 3.3z^2 \ (M_\infty = 5.5–6.0)$$

Видно, что при использовании условий прилипания расчетные значения расходятся с данными эксперимента при Re < 300. Учет скольжения на поверхности тела улучшает согласование с экспериментом до Re ≈ 10, хотя надо отметить довольно большой разброс в результатах измерений. Отметим, что согласно [6] расчетная зависимость числа Нуссельта Nu(Re) для сферы при тех же условиях обтекания начинает отклоняться от данных эксперимента при Re < 3. Возможно, причина такого отличия состоит в том, что эксперименты по теплообмену (и вычисления) были выполнены при температуре восстановления T_r, т.е. при температурном факторе $t_w > 1$. Тогда как измерения коэффициента сопротивления проводились при $t_w \approx 1$. На рис. 9 показаны также расчетные данные [5], полученные в результате численного решения уравнений Навье–Стокса с учетом скольжения (1.1) для случая обтекания сферы с теплоизолированной поверхностью при $M_\infty = 10$, $\gamma = 1.4$ в предположении линейной зависимости вязкости от температуры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диапазоне чисел Рейнольдса Re = 1–3000 с использованием численного решения уравнений Навье–Стокса для совершенного газа исследовано влияние условий прилипания и скольжения на поверхности тела на параметры течения при сверхзвуковом обтекании сферы и цилиндра с фиксированной температурой поверхности, равной температуре восстановления. Выполнено сравнение с имеющимися экспериментальными и расчетными данными по коэффициенту сопротивления C_x сферы и цилиндра, а также давлению в передней критической точке сферы P_f. Учет скольжения уменьшает нижнюю границу по числу Re, для которой имеется согласование расчета с экспериментом, больше чем на порядок – с Re ≈ 50 до 3 для P_f, с 300 до 10 и с 100 до 3 для C_x сферы и цилиндра соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bird G.A.* Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows. Oxford: Clarendon Press, 1994. 458 p.
2. *Головачев Ю.П.* Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. М.: Наука: Физматлит, 1996. 374 с.
3. *Башкин В.А., Егоров И.В.* Численное моделирование динамики вязкого совершенного газа. М.: Физматлит, 2012. 372 с.
4. *Lee K.-P., Gupta R.N., Zoby E.V., Moss J.N.* Hypersonic Viscous Shock-Layer Solutions over Long Slender Bodies – Part II: Low Reynolds Number Flows // J. Spacecraft and Rockets. 1990. V. 27. № 2. P. 185–192.
5. *Молодцов В.К.* Численный расчет гиперзвукового обтекания сферы с учетом граничных условий скольжения // Уч. зап. ЦАГИ. 1979. Т. X. № 1. С. 122–126.
6. *Горшков А.Б.* Теплообмен при сверхзвуковом обтекании сферы и цилиндра при малых числах Рейнольдса // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 1. С. 156–164.
7. *Горшков А.Б.* Расчет ламинарного донного теплообмена за телами в виде тонких конусов // Космонавтика и ракетостроение. 1997. № 11. С. 13–20.
8. *Schaaf S.A., Chambre P.L.* Flow of rarefied gases // Fundamentals of Gas Dynamics / Ed. H.W. Emmons. N.J.: Princeton Univ. Press, 1958. Рус. пер.: Шаф С.А., Шамбре П.А. Течение разреженных газов // Основы газовой динамики / Под ред. Г. Эммонса. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. С. 637–688.
9. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
10. *Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А.* Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977. 184 с.
11. *Kinslow M., Potter J.L.* Drag of Spheres in Rarefied Hypervelocity Flow // AIAA J. 1963. V. 1. № 11. P. 2467–2473.
12. *Fisher S.S.* The Effect of Rarefaction on Impact Pressure Measurements in Supersonic Flows // Proc. 13-th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. July 1982. Novosibirsk / Ed. O.M. Belotserkovskii et al. N. Y.: Plenum Press, V. 1. 1985. P. 461–467.
13. *Maslach G.J., Schaaf S.A.* Cylinder Drag in the Transition from Continuum to Free-Molecule Flow // Physics of Fluids. 1963. V. 6. № 3. P. 315–321.
14. *Гусев В.Н., Коган М.Н., Перепухов В.А.* О подобии и изменении аэродинамических характеристик в переходной области при гиперзвуковых скоростях потока // Уч. зап. ЦАГИ. 1970. Т. I. № 1. С. 24–33.
15. *Крылов А.А.* Вклад давления и трения в сопротивление сферы в сверхзвуковом потоке разреженного газа // Аэродинамика разреженных газов/ Под ред. Р.Г. Баранцева. Л.: Изд-во Ленинградского университета, Вып. 9. 1978. С. 215–223.