

УДК 533.6.01

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФОЛКНЕР–СКЭН ДЛЯ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

© 2020 г. И. И. Липатов^{a,b,*}, К. Т. Нго^a

^a Московский физико-технический институт (государственный университет, Москва, Россия

^b Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,
Жуковский, Московская обл., Россия

*E-mail: igor_lipatov@mail.ru

Поступила в редакцию 10.12.2019 г.

После доработки 17.12.2019 г.

Принята к публикации 17.12.2019 г.

Впервые получены результаты решения уравнения Фолкнера–Скэн для сжимаемых течений $f''' + ff'' + \beta(g - f'^2) = 0$ в дополнение к тем, которые были найдены Хартри и Стюартсоном.

Определены зависимости напряжения трения f_w'' на стенке и градиента температуры g_w' от параметра β при различных значениях температурного фактора g_w .

Ключевые слова: пограничный слой, сверхзвуковое течение, уравнения Фолкнера–Скэн

DOI: 10.31857/S0568528120040076

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается обтекание пластины потоком под нулевым углом атаки в предположении о том, что число Маха набегающего потока велико и что реализуется режим слабого гиперзвукового взаимодействия, для которого характерны следующие соотношения:

$$M_\infty \rightarrow \infty \quad M_\infty \tau \ll 1$$

где M_∞ — число Маха набегающего потока, τ — безразмерная толщина ламинарного пограничного слоя. Для декартовых координат, отсчитываемых вдоль поверхности пластины и по нормали к поверхности, времени, компонентов вектора скорости, плотности, давления, полной энтальпии, динамического коэффициента вязкости, введены следующие обозначения: $lx, ly, lt/u_\infty, u_\infty u, u_\infty v, \rho_\infty \rho, \rho_\infty u_\infty^2 p, u_\infty^2 H/2, \mu_0 \mu$. Параметр l представляет собой характерную длину пластины; $\tau = (\rho_\infty u_\infty l / \mu_0)^{-1/2}$, где индексом “ ∞ ” отличены размерные величины в набегающем потоке, μ_0 — размерная величина динамического коэффициента вязкости, вычисленного при температуре торможения. Предполагается, что газ является термодинамически совершенным и характеризуется постоянной величиной отношения удельных теплоемкостей γ . Хотя в гиперзвуковых потоках эффекты реального газа существенны, в данной работе они не рассматриваются, поскольку их учет в принципе не меняет соотношений, полученных ниже. Число Рейнольдса велико, но не превышает критической величины, при которой происходит ламинарно-турбулентный переход. Известно, что для сверх- и гиперзвуковых течений число Рейнольдса перехода достаточно велико. Предполагается также, что динамическая вязкость линейно зависит от температуры, так что $\mu = \text{const}$.

2. УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Учитывая сделанные приближения, основные уравнения для ламинарного течения в двумерном пограничном слое имеют вид

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

Уравнение количества движения

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.2)$$

Уравнение энергии

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] \quad (2.3)$$

Здесь u и v — компоненты скорости соответственно вдоль осей x и y , x — расстояние вдоль поверхности тела, y — расстояние по нормали к поверхности тела, h — удельная энтальпия, полная энтальпии $H = h + u^2/2$, Pr — число Прандтля, p — давление в пограничном слое.

Здесь индекс w использован для условий на поверхности тела и индекс e для обозначения условий на внешней границе пограничного слоя.

Граничные условия для рассматриваемой здесь задачи обтекания

$$u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = v_w(x), \quad H(x, 0) = H_w(x) \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_e(x), \quad \lim_{y \rightarrow \infty} H(x, y) = H_e(x)$$

Используя преобразование Дородницына–Лиза, можно получить уравнения в новых переменных

$$\xi(x) = \int_0^x \rho_w \mu_w u_e dx, \quad \eta(x, y) = \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy \quad (2.4)$$

$$f = \int_0^\eta \frac{u}{u_e} d\eta, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{u}{u_e}, \quad g = \frac{H}{H_e} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(N \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + 2 \frac{d \ln u_e}{d \ln \xi} \left[\frac{\rho_e}{\rho} - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right] = 2\xi \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{N}{\text{Pr}} \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) + f \frac{\partial g}{\partial \eta} + \frac{u_e^2}{H_e} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[N \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] = 2\xi \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) \quad (2.7)$$

$N = \frac{\rho \mu}{\rho_w \mu_w} = \left(\frac{g - f'^2}{g_w} \right)^{\omega-1}$, ω — показатель степени в соответствующем законе зависимости вязкости от температуры.

Для случая $\text{Pr} = 1$ можно получить автомодельные дифференциальные уравнения пограничного слоя

$$(Nf''')' + ff''' + 2 \frac{d \ln u_e}{d \ln \xi} \left(\frac{\rho_e}{\rho} - f'^2 \right) = 0 \quad (2.8)$$

$$\left(\frac{N}{\text{Pr}} g' \right)' + fg' = 0 \quad (2.9)$$

Индекс “штрих” используется здесь для обозначения частной производной по η . Дальнейшие упрощения уравнения (2.8) вытекают из равенства $H_e = \text{const}$.

Тогда уравнение (2.8) приводится к виду

$$(Nf''')' + ff''' + 2 \frac{d \ln u_e}{d \ln \xi} \frac{H_e}{h_e} [g - (f')^2] = 0 \quad (2.10)$$

$$2 \frac{d \ln u_e}{d \ln \xi} \frac{H_e}{h_e} = - \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \int_0^x \frac{p dx}{p^2} \frac{dp}{dx}$$

Далее для левой части соотношения введено обозначение

$$\beta = 2 \frac{d \ln u_e}{d \ln \xi} \frac{H_e}{h_e}$$

Условие автомодельности может быть выполнено только в том случае, когда распределение давления описывается степенным законом, т.е. давление пропорционально x^n или $p = c_1 x^n$. В результате следует

$$\beta = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{n}{n+1}$$

Величина β эквивалентна классической константе Фолкнера–Скэн. Для давления пропорционального x^n можно переписать систему уравнений пограничного слоя в следующем виде:

$$(Nf''')' + ff''' + \beta(g - f'^2) = 0 \quad (2.11)$$

$$(Ng')' + fg' = 0 \quad (2.12)$$

с граничными условиями

$$f(0) = f'(0) = 0; \quad f'(\eta) \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

$$g(0) = g_w; \quad g(\eta) \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty \quad (2.14)$$

Предполагается, что $N = 1$.

3. ОПИСАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ

Для численного интегрирования систему (2.11) и (2.12) с граничными условиями (2.13), (2.14) можно преобразовать в систему уравнений первого порядка посредством следующих замен

$$\begin{aligned} f &\rightarrow f_0; & f' &\equiv f'_0 = f_1 \\ f'' &\equiv (f_1)' = f_2 \\ f''' &\rightarrow f_2' \\ g &\rightarrow f_3; & g' &\equiv f'_3 = f_4 \\ g'' &\rightarrow f_4' \end{aligned} \quad (3.1)$$

Уравнения (2.11) и (2.12) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$f'_0 = f_1 \quad (3.2)$$

$$f'_1 = f_2 \quad (3.3)$$

$$f'_2 = -f_0 f_2 - \beta[f_3 - (f_1)^2] \quad (3.4)$$

$$f'_3 = f_4 \quad (3.5)$$

$$f'_4 = -f_0 f_4 \quad (3.6)$$

В векторной записи система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \eta} f = D(\eta, f) \quad (3.7)$$

где зависимая переменная и правая часть определены как вектор-функции

$$f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}; \quad D(\eta, f) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ -f_0 f_2 - \beta[f_3 - (f_1)^2] \\ f_4 \\ -f_0 f_4 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Для решения использован следующий алгоритм:

1. Задаются некоторые значения $f_2(0)$ и $f_4(0)$.

2. Используется метод Рунге–Кутты для интегрирования системы уравнений (1.11), (1.12).

3. Проверяются условия

$$\xi_1^i = f_1^i(\eta_{\text{inf}}) - 1$$

$$\xi_3^i = f_3^i(\eta_{\text{inf}}) - 1$$

Если $|\xi_1^i| < \xi_1$ и $|\xi_3^i| < \xi_3$, решения получены. В противном случае используется модифицированный метод Ньютона.

Система уравнений решалась при различных значениях параметров. Для положительных значений $\beta > 0$ процесс итераций достаточно быстро сходится. Вычисления производились таким образом, чтобы обеспечить точность в определении поверхностного трения $f_2(0)$ и градиента температуры на поверхности $f_4(0)$, соответствующую трем правильным значащим цифрам. Сходимость процесса итераций при интегрировании системы уравнений контролировалась по значениям $f_2(0)$ и $f_4(0)$. Значение правого предела интегрирования η_{inf} в вариантных расчетах увеличивалось до тех пор, пока не переставали изменяться первые три значащие цифры отыскиваемых величин $f_2(0)$ и $f_4(0)$.

4. ОПИСАНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ОТ β И g_w

Температурный фактор задается соотношением

$$g_w = T_w/T_0$$

Здесь T_w – температура поверхности, T_0 – температура торможения внешнего потока.

Если $g_w = 1$, то это случай изолированной поверхности. Тогда температура торможения остается постоянной в поперечном сечении пограничного слоя, а температура поверхности равна температуре торможения внешнего потока. В том случае, когда нет теплопередачи на стенку, частным решением уравнения (2.9), которое удовлетворяет всем граничным условиям, будет $g(\eta) = 1$.

В настоящем исследовании получены решения для параметра β , начиная от $\beta = 1$, соответствующего отрицательному градиенту давления до значения градиента, вызывающего отрыв. Все решения определены для различных значений температурного фактора, начиная с $g_w = 1$ и заканчивая значением $g_w = 0.1$ с шагом 0.1. Ранее расчеты проводились для несжимаемых течений при $g_w = 1$ в [2] и [3]. Решение получено для нескольких значений температурного фактора g_w . Результаты показывают, что отрыв течения происходит при $\beta = -0.1988$. Для $\beta < 0$ решение уравнения неединственно, одно из них характеризуется отрицательным трением на поверхности.

На рис. 1 приведены профили скорости в зависимости от η для случаев $\beta = -0.1$; -0.05 с получением отрицательных значений поверхностного трения f_w'' . В обоих случаях область определения искомых функций разбивалась на две части. Одна из них соответствует скорости $f' < 0$ и другая $f' > 0$.

На рис. 2 приведены типичные профили скорости.

Полученная в результате расчетов зависимость поверхностного трения f_w'' представлена как функция параметра β . Для сравнения приведенного результата с данными статей [2, 3] значения f_w'' нанесены на один рис. 3.

Сравнение результатов, полученных в данной работе, на рис. 3 с данными в [2] и [3] показывает совпадение значений поверхностного трения f_w'' .

Система уравнений решалась для различных значений температурного фактора, g_w , изменявшегося от значения 0.9 до 0.1. Для каждого значения g_w получена зависимость значения поверхностного трения f_w'' от параметра β , характеризующего градиент давления (рис. 4).

Зависимость параметра теплопередачи $g_w'/(1 - g_w)$ от параметра β представлена на рис. 5.

Профили скорости и температуры, полученные при решении, представлены как функции от η на рис. 6 и 7 соответственно.

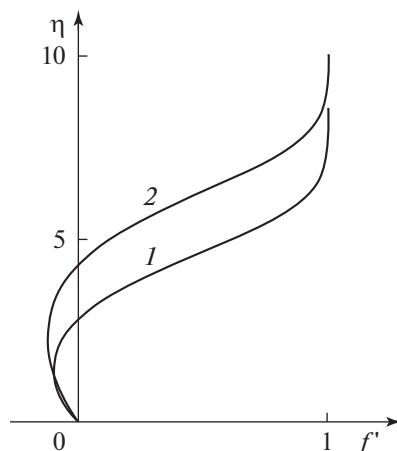


Рис. 1. График распределения скорости течения при $g_w = 1$: 1, 2 – $\beta = -0.1$; -0.05 .

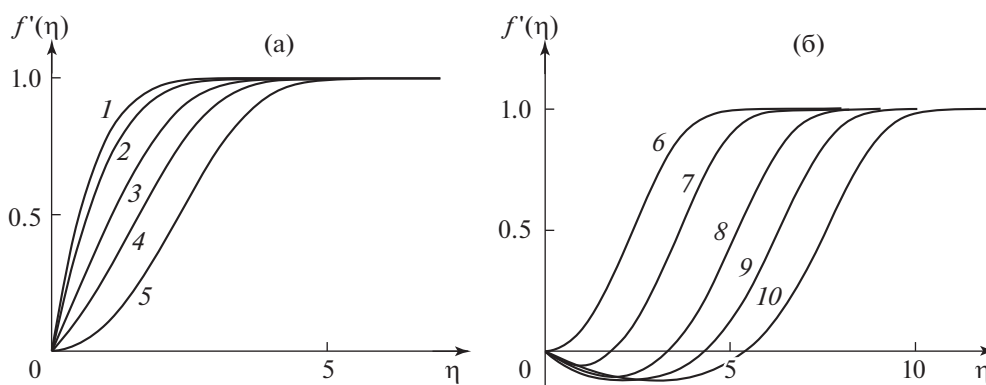


Рис. 2. График распределения скоростей для течений с постоянной β при $g_w = 1$: а – 1–5 – $\beta = 1, 0.5, 0, -0.15, -0.1988$; б – 6–10 – $\beta = -0.1988, -0.15, -0.08, -0.05, -0.03$.

На рис. 7 показано, что при $Pr = 1$ температура монотонно меняется по всему пограничному слою от значения на стенке до значения в свободном потоке. Для благоприятных градиентов давления β с холодной стенкой есть небольшое видоизменение этого распределения. Трансформация профиля температуры становится более выраженной с увеличением температуры стенки. Для неблагоприятных градиентов давления распределение более чувствительно к величине параметра β . Тепловой пограничный слой утолщается при приближении к отрыву и при уменьшении неблагоприятных градиентов давления после отрыва.

Для $\beta > 0$ максимальное f''' находится у стенки, тогда как для $\beta < 0$ точка максимального f''' все больше перемещается наружу.

Можно видеть, что снижение температурного фактора g_w уменьшает чувствительность поверхностного трения к градиенту давления, тогда как рост g_w имеет противоположный эффект. Предлагаемая физическая интерпретация этой тенденции связана с влиянием температуры стенки на среднюю плотность жидкости в пограничном слое. Когда происходит увеличение температурного фактора g_w , плотность пограничного слоя становится меньше плотности свободного потока, что делает жидкость пограничного слоя более восприимчивой к силам ускорения свободного потока, чем у холодной стенки.

Из анализа данных на рис. 8 также следует, что для $\beta > 0$ существует только одно решение, два вязких решения, которые возникают при неблагоприятных градиентах давления для заданных β и g_w , также нанесены на рисунок. Видно, что два решения существуют даже для изолированной

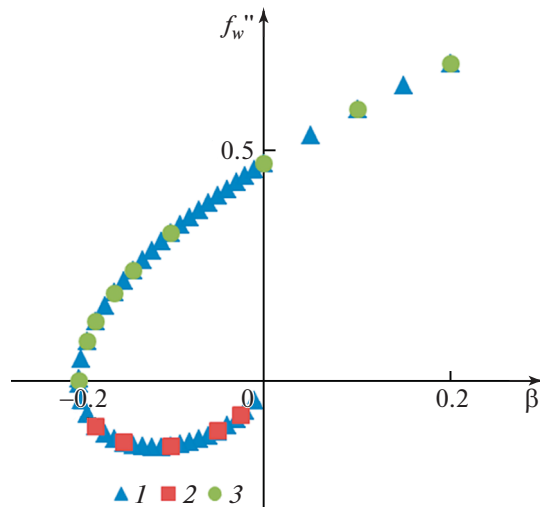


Рис. 3. Зависимость поверхностного трения от параметров β при $g_w = 1$: 1 – настоящие результаты, 2, 3 – данные [2, 3].

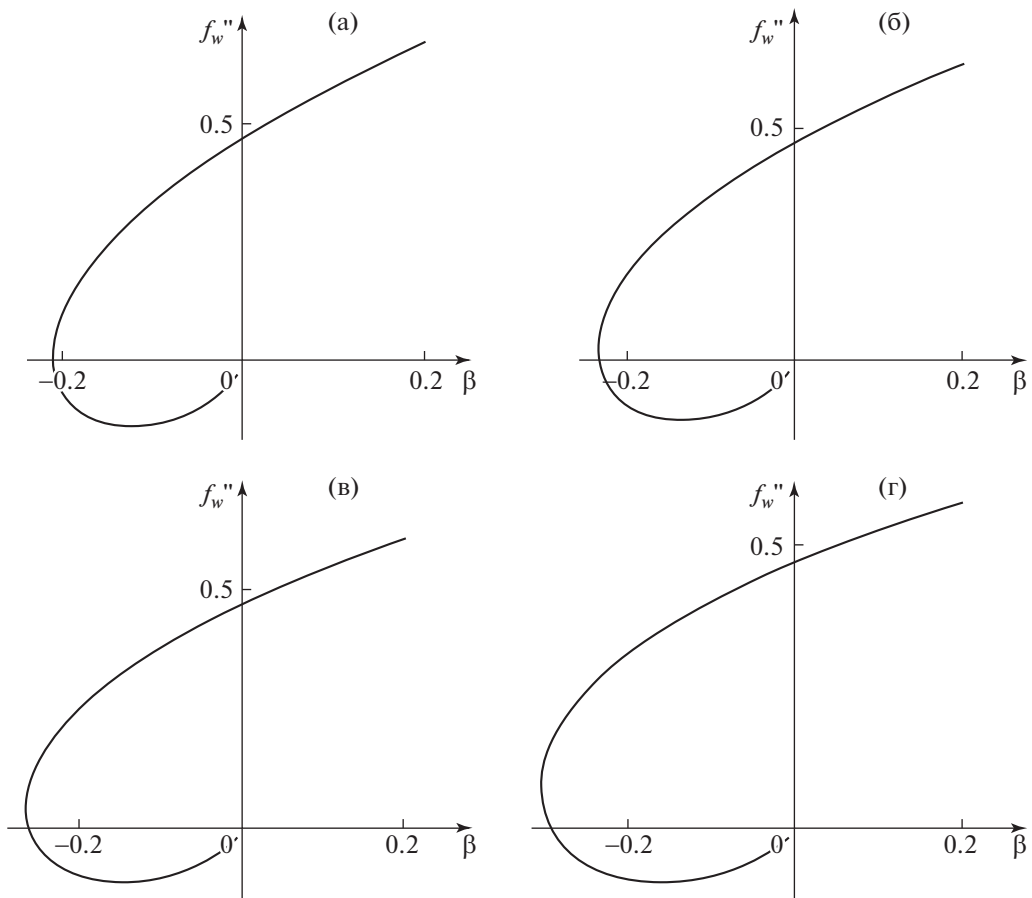


Рис. 4. Зависимость поверхностного трения от параметра β для каждого g_w : а–г – $g_w = 0.9, 0.7, 0.5, 0.3$.

поверхности ($g_w = 1$), хотя в статье [2] представлено только одно. В этом случае решение нижней ветви соответствует отрицательному значению поверхностного трения $f_w'' < 0$, которое не рассматривалось в [2].

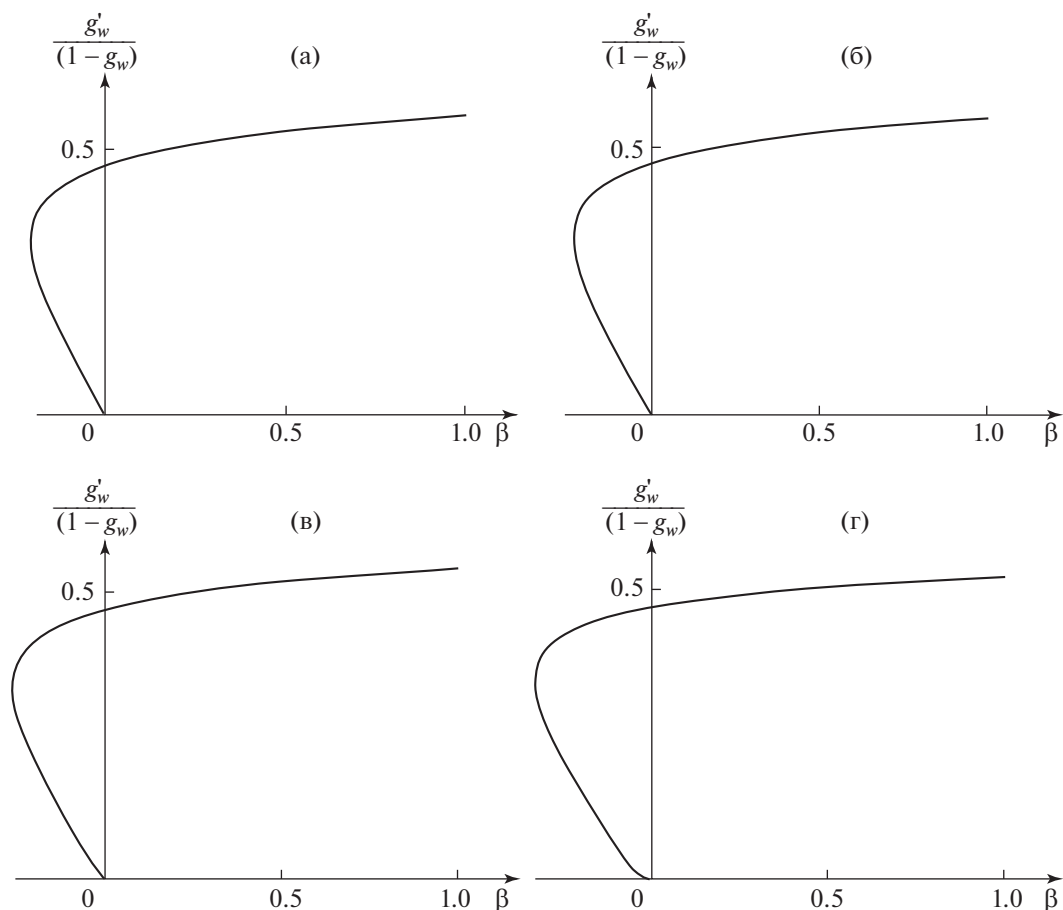


Рис. 5. Зависимость параметра теплопередачи от параметра β для каждого g_w : а–г – $g_w = 0.9, 0.7, 0.5, 0.2$.

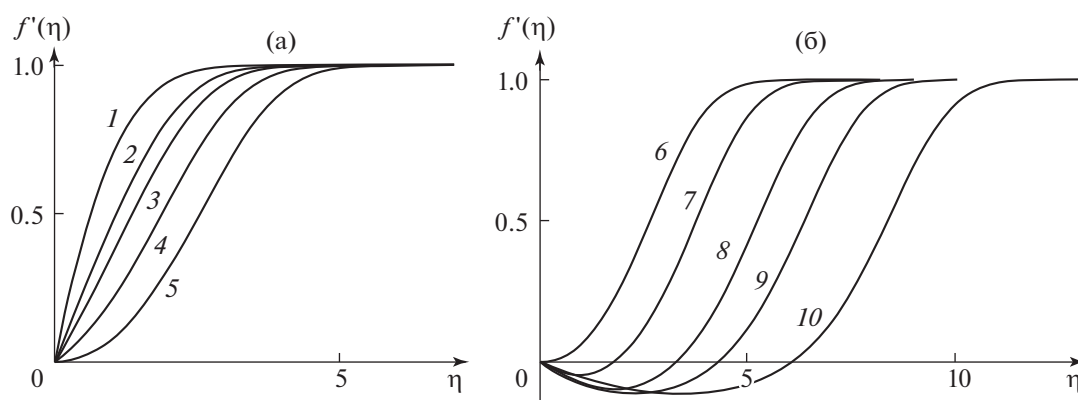


Рис. 6. Профили скорости как функции переменной подобия η с постоянной β при $g_w = 0.5$: а – 1–5 – $\beta = 1, 0, -0.15, -0.25, -0.26$; б – 6–10 – $\beta = -0.26, -0.2, -0.12, -0.08, -0.04$.

На рис. 8 видно, что наличие теплообмена затягивает появление отрыва ($f_w'' = 0$). При наличии сильного теплообмена существует сравнительно небольшой диапазон изменений β , характеризующего градиент давления, в котором каждому его значению соответствуют два решения с положительным значением f_w''' .

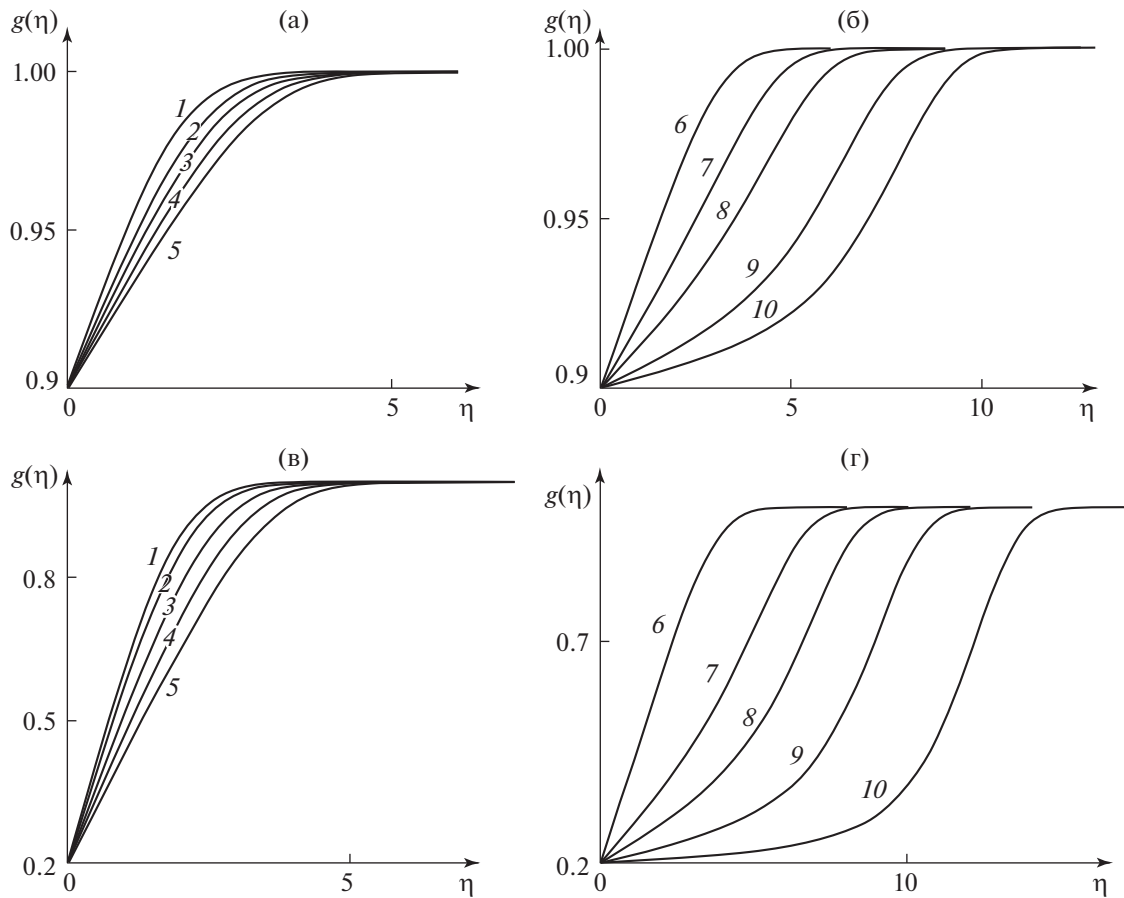


Рис. 7. Профили энтальпии как функции переменной подобия η с постоянной β при $g_w = 0.9$: а – $1-5-\beta = 1, 0, -0.15, -0.2, -0.21$; б – $6-10-\beta = -0.21, -0.15, -0.1, -0.05, -0.03$; при $g_w = 0.2$: в – $1-5-\beta = 1, 0, -0.3, -0.329, -0.31$; г – $6-10-\beta = -0.3, -0.15, -0.1, -0.06, -0.03$.

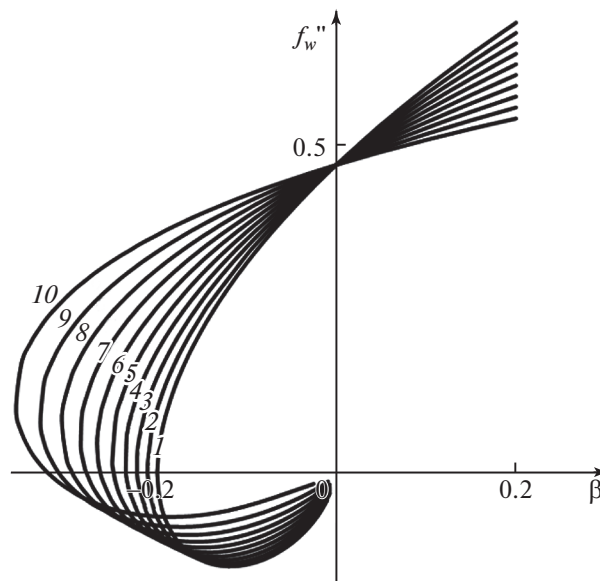


Рис. 8. Зависимость поверхностного трения от параметра β при различных значениях температурного фактора g_w : $1-10-g_w = 1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1$.

Полученные данные указывают на утолщение теплового слоя при приближении к отрыву. В этой зоне теплопередача происходит в основном за счет теплопроводности из-за близких к нулю скоростей в окрестности поверхности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдены решения уравнения Фолкнера—Скэн для сжимаемых течений, в дополнение к известным решениям для несжимаемых течений. Показано, что при отрицательных значениях параметра $\beta < 0$ решение задачи неединственно, причем одна из ветвей описывает течение с возвратными токами.

Наличие теплообмена затягивает появление профилей скорости f'' отрывного типа на непрерывной ветви решения, кроме того, уменьшение температурного фактора приводит к снижению критического значения параметра β , при котором трение на поверхности обращается в ноль.

При наличии сильного теплообмена существует сравнительно небольшой диапазон изменений β , характеризующего градиент давления, в котором каждому его значению соответствуют два решения с положительным значением f_w'' .

Найденные в результате численного решения задачи профили скорости и полной энтальпии могут быть использованы для определения скорости распространения возмущений вверх по потоку.

Статья поддержана грантом Министерства образования и науки РФ (договор № 14.G39.31.0001 от 13.02.2017 г.) и грантом РФФИ (проект № 17-01-00129 а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Falkner V.M., Skan S.W.* Solutions of the boundary-layer equations // *Phil. Mag.* 1931. V. 7. № 12. P. 865.
2. *Hartree D.R.* // *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1937. V. 33. P. 223.
3. *Stewartson K.* Further solution of the falkner-skan equation // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1954. V. 50. P. 454–465.
4. *Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И.* Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2003.
5. *Хэйз У.Д., Пробстин Р.Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд.-во иностр. лит., 1962.
6. *Шевелев Ю.Д.* Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М.: Наука, 1977. 222 с.
7. *Шалаев В.И.* Применение аналитических методов в современной аэромеханике. Часть 1. Теория пограничного слоя. М.: МФТИ, 2011. 300 с.
8. *Солодов А.П.* Электронный курс тепломассообмена // *Открытое образование.* 2013. Т. 1. № 96. С. 8–16.