

УДК 551.5: 532.5

## ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО ПЕРИОДИЧЕСКИМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

© 2020 г. М. В. Калашник<sup>a,b,\*</sup>, М. В. Курганский<sup>a,\*\*</sup>

<sup>a</sup> Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Москва, Россия

<sup>b</sup> Научно-производственное объединение “Тайфун”, Обнинск, Россия

\*E-mail: kalashnik-obn@mail.ru

\*\*E-mail: kurgansk@ifaran.ru

Поступила в редакцию 07.10.2019 г.

После доработки 07.12.2019 г.

Принята к публикации 07.12.2019 г.

Исследована гидродинамическая неустойчивость системы вертикальных движений, инициируемых пространственно периодическими распределениями источников тепла. Для описания динамики возмущений использован метод Галеркина с тремя базисными тригонометрическими функциями. Сформулирована нелинейная система уравнений для нахождения коэффициентов разложения. Установлено, что в отсутствие диссипации вертикальные движения неустойчивы, если число Ричардсона меньше одной восьмой. Развита слабо нелинейная модель невязкой неустойчивости. Показано, что потеря устойчивости в присутствии диссипации может приводить к формированию либо стационарного, либо осциллирующего во времени вторичного течения с нетривиальной топологией линий тока.

*Ключевые слова:* гидродинамическая неустойчивость, периодические течения, облачные улицы, нелинейная модель, вторичные течения, бифуркация Хопфа

DOI: 10.31857/S0568528120040064

В исследованиях гидродинамической устойчивости пространственно периодических течений основное внимание уделяется течению Колмогорова [1–4] и его аналогу в стратифицированной жидкости [5, 6]. В настоящей работе исследуется устойчивость вертикальных движений, инициируемых пространственно периодическими распределениями источников тепла. Такие источники служат грубой моделью конденсационных источников тепла в атмосфере, а сами движения моделируют упорядоченные ряды конвективных облаков (облачные улицы), наблюдаемые над океанами. Конвективные механизмы формирования облачных ряд исследовались в работах [7, 8], однако вопрос об их гидродинамической устойчивости практически не рассматривался в литературе. Линейная теория устойчивости периодической системы вертикальных движений в присутствии эффекта радиационного выхолаживания развита в недавней работе [9]. Основное внимание в настоящей работе уделено описанию нелинейной динамики возмущений в классической ситуации (с отсутствием радиационного эффекта). Также представлен новый асимптотический подход к описанию линейной динамики возмущений при больших значениях числа Рейнольдса.

### 1. ПОСТАНОВКА ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Рассматриваются двумерные, в вертикальной плоскости  $(x, z)$ , движения устойчиво стратифицированной атмосферы в присутствии источников тепла, зависящих только от горизонтальной координаты  $x$ . В приближении Буссинеска система уравнений динамики и притока тепла имеет вид

$$(\Delta\psi)_t + [\psi, \Delta\psi] - \sigma_x = \nu\Delta^2\psi \quad (1.1)$$

$$\sigma_t + [\psi, \sigma] + N^2\psi_x = \chi\Delta\sigma + q(x) \quad (1.2)$$

Здесь  $u = -\psi_z$ ,  $w = \psi_x$  – компоненты скорости,  $\psi$  – функция тока,  $\sigma = g\theta/\theta_0$  – плавучесть,  $\theta$  – отклонение температуры от фонового значения  $\theta_0$ ,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\nu$ ,  $\chi$  – коэффициенты вязкости и температуропроводности,  $N > 0$  – частота плавучести,  $q(x)$  – источник тепла (плавучести). Квадратными скобками обозначен якобиан по переменным  $x, z$ ;  $\Delta$  – оператор Лапласа. Система рассматривается на всей плоскости с условиями ограниченности на бесконечности или периодичности решений. Обусловленная внешними крупномасштабными процессами частота плавучести  $N$  далее предполагается постоянной.

Система уравнений (1.1), (1.2) имеет точное стационарное решение  $w = W(x)$ ,  $\sigma = Q(x)$ , которое находится из системы  $Q_x = -\nu W_{xxx}$ ,  $N^2 W = \chi Q_{xx} + q(x)$ , сводящейся к одному уравнению

$$\left(\frac{\chi\nu}{N^2}\right)\frac{d^4 W}{dx^4} + W = \frac{q(x)}{N^2} \tag{1.3}$$

С учетом (1.3), для гармонического источника  $q(x) = q_0 \cos(x/d)$ ,

$$W(x) = W_0 \cos(x/d), \quad \bar{\sigma} = \nu d^{-2} W_0 \cos(x/d) \tag{1.4}$$

Решение (1.4) описывает пространственно-периодическое течение, которое можно считать грубой моделью облачного ансамбля (системы восходящих и нисходящих потоков). Входящий в (1.4) масштаб скорости  $W_0 = q_0/(N^2 + \nu\chi d^{-4})$  можно представить в виде  $W_0 = q_0/N^2(1 + (Ra)^{-1})$ , где  $Ra = N^2 d^4/\nu\chi$  – аналог числа Рэлея. В отсутствие диссипации, когда  $\nu = \chi = 0$ ,  $W(x) = (q_0/N^2)\cos(x/d)$  и  $Q(x) \equiv 0$  (весь нагрев идет на генерацию движений).

Рассматривается задача об устойчивости периодического течения (1.4). Линейная динамика возмущений этого течения описывается системой

$$(\Delta\psi)_t + W(x)(\Delta\psi)_z - W''(x)\psi_z - \sigma_x = \nu\Delta^2\psi \tag{1.5}$$

$$\sigma_t + W(x)\sigma_z + N^2\psi_x + \nu W'''(x)\psi_z = \chi\Delta\sigma \tag{1.6}$$

Здесь  $\psi$ ,  $\sigma$  – соответствующие отклонения от средних распределений и штрихи означают дифференцирование по  $x$ .

В анализе удобно использовать безразмерные переменные. С использованием в качестве пространственного масштаба  $d$ , масштаба времени  $d/W_0$ , масштабов функции тока и плавучести соответственно  $W_0 d$  и  $W_0^2 d^{-1}$ , безразмерная форма системы (1.5), (1.6) принимает вид

$$(\Delta\psi)_t + (\Delta\psi + \psi)_z \cos x - \sigma_x = \text{Re}^{-1} \Delta^2\psi \tag{1.7}$$

$$\sigma_t + \sigma_z \cos x + \text{Ri}\psi_x + \text{Re}^{-1} \psi_z \sin x = \text{Pe}^{-1} \Delta\sigma \tag{1.8}$$

В эту систему входят три безразмерных параметра: число Рейнольдса  $\text{Re} = W_0 d/\nu$ , число Пекле  $\text{Pe} = W_0 d/\chi$  и параметр  $\text{Ri} = N^2 d^2/W_0^2$ , который является аналогом числа Ричардсона. Число Пекле связано с числом Рейнольдса  $\text{Re}$  и Прандтля  $\text{Pr}$  соотношением  $\text{Pe} = \text{RePr}$ .

## 2. МЕТОД ГАЛЕРКИНА И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ОТСУТСТВИЕ ДИССИПАЦИИ

Из теории уравнений с периодическими коэффициентами следует, что система (1.7), (1.8) имеет  $2\pi$ -периодические по координате  $x$  решения. Для отыскания таких решений традиционно используется аппарат теории цепных дробей, приводящий к громоздким вычислениям [1, 10]. Очень хорошую аппроксимацию периодических решений дает классический метод Галеркина с тремя базисными функциями  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = \cos x$ ,  $f_3(x) = \sin x$ . В соответствии с этим методом приближенное решение (1.7), (1.8) ищется в форме

$$\psi = a(z, t) \cos x + b(z, t) \sin x + c(z, t) \tag{2.1}$$

$$\sigma = \alpha(z, t) \cos x + \beta(z, t) \sin x + \gamma(z, t) \tag{2.2}$$

представляющей собой первые три члена разложения решения в тригонометрический ряд. Вводится операция осреднения по периоду  $\langle \phi \rangle = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \phi dx$ , и уравнения (1.7), (1.8) записываются

в абстрактной форме  $L_1(\psi, \sigma) = 0$ ,  $L_2(\psi, \sigma) = 0$ . Путем подстановки (2.1), (2.2) в эти уравнения и использования условий ортогональности  $\langle f_i(x)L_{1,2}(\psi, \sigma) \rangle = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , получается система из шести уравнений для нахождения коэффициентов разложения. Эта система распадается на две замкнутые подсистемы, соответственно относительно  $a$ ,  $\beta$ ,  $c$  и  $\alpha$ ,  $b$ ,  $\gamma$ . Первая подсистема имеет вид

$$\begin{aligned} (a_{zz} - a)_t + (c_{zz} + c)_z - \beta &= \text{Re}^{-1}(a_{zzzz} - 2a_{zz} + a) \\ c_t + (1/2)a_z &= \text{Re}^{-1}c_{zz}, \quad \beta_t - \text{Ri}a + \text{Re}^{-1}c_z = \text{Pe}^{-1}(\beta_{zz} - \beta) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Как показано ниже, именно эта подсистема имеет экспоненциально нарастающие со временем решения, описывающие развитие неустойчивости.

Вторая, устойчивая подсистема, записывается в виде

$$\begin{aligned} \alpha_t + \gamma_z + \text{Ri}b &= \text{Pe}^{-1}(\alpha_{zz} - \alpha), \quad (b_{zz} - b)_t + \alpha = \text{Re}^{-1}(b_{zzzz} - 2b_{zz} + b) \\ \gamma_t + (1/2)\alpha_z + (1/2)\text{Re}^{-1}b_z &= \text{Pe}^{-1}\gamma_{zz} \end{aligned} \quad (2.4)$$

В отличие от (2.3), все решения (2.4) ограничены во времени [9].

С использованием (2.3) легко находятся критерии развития неустойчивости в отсутствие диссипации ( $\text{Re} = \text{Pe} = \infty$ ). В этом случае подсистема (2.3) сводится к одному уравнению

$$(a - a_{zz})_{tt} + (1/2)(a_{zz} + a)_{zz} + \text{Ri}a = 0 \quad (2.5)$$

которое имеет периодические по вертикальной координате решения  $a = a_0 \exp(\lambda t) \cos(kz)$  (нормальные моды) с волновым числом  $k$  и квадратом инкремента нарастания

$$\lambda^2 = \frac{k^2(1 - k^2) - 2\text{Ri}}{2(1 + k^2)} \quad (2.6)$$

Из (2.6) следует существование кривой нейтральной устойчивости

$$\text{Ri} = \text{Ri}_1(k) = (1/2)k^2(1 - k^2) \quad (2.7)$$

на плоскости  $(k, \text{Ri})$ . Кривая (2.7) выходит из нуля при  $k = 0$  и возвращается в ноль при  $k = 1$ . Значение  $\text{Ri}_1(k)$  достигает максимума при  $k^2 = 1/2$ , причем это максимальное значение равно  $(\text{Ri}_1)_{\max} = 1/8$ . Таким образом, при  $\text{Ri} < 1/8$  течение заведомо устойчиво; при  $\text{Ri} > 1/8$  — неустойчиво для волновых чисел в диапазоне  $k_1 < k < k_2$ , где  $k_{1,2}^2 = (1/2) \pm \sqrt{(1/4) - 2\text{Ri}}$ .

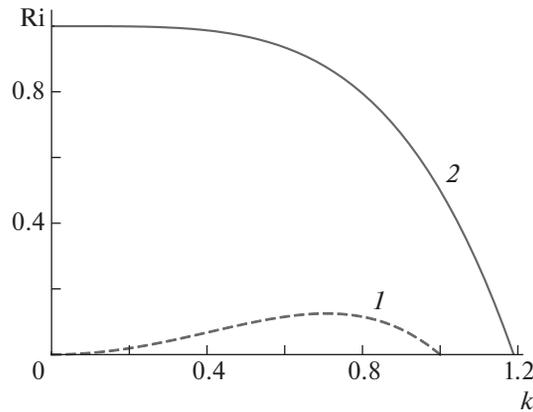
Следует отметить, что для горизонтальных течений в устойчиво стратифицированной жидкости необходимое условие неустойчивости имеет вид  $\text{Ri} < 1/4$  (критерий Майлса—Говарда). В частности, это справедливо для так называемого стратифицированного течения Колмогорова [5, 6], в котором профиль скорости синусоидален по высоте. В данной задаче пороговое значение числа Ричардсона в два раза ниже и соответственно в  $\sqrt{2}$  раз выше необходимое для неустойчивости максимальное значение скорости в струе.

### 3. ДИССИПАТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ЕЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

В данном разделе исследуется линейная задача устойчивости с учетом диссипативных факторов. Неожиданный результат состоит в том, что учет диссипации приводит к появлению еще одной экспоненциально нарастающей со временем нормальной моды. Существование этой моды значительно расширяет область устойчивых параметров.

Для простоты рассматривается случай  $\text{Pr} = 1$ , когда  $\text{Re} = \text{Pe}$  и имеется только два определяющих безразмерных параметра. Отыскание решений подсистемы (2.3) в форме  $(a, \beta) = (a_0, \beta_0) \exp(\lambda t) \cos(kz)$ ,  $c = c_0 \exp(\lambda t) \sin(kz)$ , приводит к кубическому уравнению для инкремента нарастания  $\lambda$ . После введения обозначений  $\mu = \lambda \text{Re}$  и  $\text{Ri}_2(k) = 1 - (1/2)k^4$ , это уравнение записывается в виде

$$\text{Re}^{-2}(1 + k^2)(\mu + 1 + k^2)^2(\mu + k^2) + \mu(\text{Ri} - \text{Ri}_1(k)) - k^2(\text{Ri}_2(k) - \text{Ri}) = 0 \quad (3.1)$$



**Рис. 1.** Кривые нейтральной устойчивости  $Ri = Ri_1(k)$  (1) и  $Ri = Ri_2(k)$  (2). Области ниже кривых отвечают невязкой и диссипативной неустойчивости соответственно при больших значениях числа Рейнольдса.

где  $Ri_1(k)$  определено выражением (2.7). С привлечением принципа смены устойчивости [11], когда в (3.1) полагается  $\mu = 0$ , получается уравнение

$$Ri = Ri_{cr}(k, Re^{-1}) = 1 - (1/2)k^4 - Re^{-2}(1 + k^2)^3 \tag{3.2}$$

которое определяет кривую нейтральной устойчивости на плоскости параметров  $(k, Ri)$  при фиксированном значении числа Рейнольдса. Правая часть (3.2) достигает максимума  $1 - Re^{-2}$  при  $k = 0$ . Отсюда сразу следуют необходимые и достаточные условия неустойчивости

$$Re > 1, \quad Ri < 1 - Re^{-2} \tag{3.3}$$

При выполнении (3.3) существует интервал неустойчивых волновых чисел  $0 < k < k_b$ , где  $k_b < \sqrt[4]{2}$ .

Важно подчеркнуть, что нейтральная кривая невязкой неустойчивости  $Ri = Ri_1(k)$  не является пределом нейтральной кривой (3.2) при  $Re^{-1} \rightarrow 0$ . Соответствующим пределом является кривая  $Ri = Ri_2(k)$ , которая на плоскости параметров  $(k, Ri)$  лежит выше кривой  $Ri = Ri_1(k)$  (рис. 1). Наглядную интерпретацию этому факту дают асимптотики корней уравнения (3.1). Непосредственно из (3.1) видно, что при  $Re^{-1} \rightarrow 0$  имеет место случай сингулярно возмущенного кубического уравнения с корнями  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  и малым параметром  $\epsilon = Re^{-2}$ . Нахождение регулярной асимптотики  $\mu = \mu^{(0)} + \epsilon\mu^{(1)} + \dots$ , для нулевого приближения к первому корню дает уравнение  $\mu(Ri - Ri_1(k)) - k^2(Ri_2(k) - Ri) = 0$ . Для нахождения сингулярных асимптотик двух других корней следует положить  $\mu = y/\epsilon^{1/2}$ . При этом получается уравнение, аналогичное (2.6). Таким образом, с учетом  $\mu = \lambda Re$ , при  $Re^{-1} \rightarrow 0$  имеют место следующие асимптотики для корней

$$\lambda_1 = Re^{-1} k^2 \frac{Ri_2(k) - Ri}{Ri - Ri_1(k)}, \quad \lambda_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{Ri_1(k) - Ri}{1 + k^2}} \tag{3.4}$$

По сравнению с невязким случаем появился новый малый корень  $\lambda_1$ , который не может быть получен предельным переходом из невязкого случая. С учетом явных выражений (3.4) можно сделать определенные выводы о неустойчивости. В области  $Ri < Ri_1(k)$ ,  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  и неустойчивость невязкая. В области  $Ri_1(k) < Ri < Ri_2(k)$ , корни  $\lambda_{2,3}$  чисто мнимые, а корень  $\lambda_1$  становится положительным. Здесь имеет место случай неустойчивости, целиком обусловленной диссипативными факторами. Следует отметить, что эта неустойчивость, возможно, имеет некоторую аналогию с диффузионной дестабилизацией вихрей, рассмотренной в работе [12].

Непосредственно из первой асимптотики (3.4) следует, что при больших значениях числа Рейнольдса характерное (безразмерное) время развития диссипативной неустойчивости пропорционально  $Re^{-1}$ . Это факт позволяет дать простое асимптотическое описание неустойчиво-

сти, не требующее анализа корней кубического уравнения. В системе (2.3) при  $\text{Re}^{-1} = \varepsilon \ll 1$  совершается переход к медленному времени  $T = \varepsilon t$  и ищется решение в форме асимптотического разложения

$$c = c^{(0)} + \varepsilon c^{(1)} + \varepsilon^2 c^{(2)} + \dots \quad (3.5)$$

(аналогично для остальных переменных). Для нулевого приближения из (2.3) получается  $a^{(0)} = 0$  и соотношение

$$c_{zzz}^{(0)} + c_z^{(0)} - \beta^{(0)} = 0 \quad (3.6)$$

связывающее две неизвестные функции  $c^{(0)}$ ,  $\beta^{(0)}$ .

Из системы уравнений для первого приближения следуют уравнения

$$(1/2)a_z^{(1)} = -c_T^{(0)} + c_{zz}^{(0)}, \quad -\text{Ri}a^{(1)} = -\beta_T^{(0)} - c_z^{(0)} + \beta_{zz}^{(0)} - \beta^{(0)} \quad (3.7)$$

Путем исключения из (3.7) переменной  $a^{(1)}$  и учета (3.6) получается уравнение, описывающее медленную динамику переменной  $c^{(0)}$ . Соответствующее уравнение имеет вид (для краткости верхний индекс опущен и использованы стандартные обозначения частных производных)

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial^4 c}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + 2\text{Ric} \right) - \frac{\partial^6 c}{\partial z^6} + 2(1 - \text{Ri}) \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = 0 \quad (3.8)$$

Легко проверяется, что для решений (3.8) вида  $c = c_0 \exp(\lambda t) \sin(kz)$ , инкремент нарастания дается формулой  $\lambda = \varepsilon^{-1} \lambda_1$ , где  $\lambda_1$  определено выражением (3.4). Таким образом, при  $\text{Ri}_1(k) < \text{Ri} < \text{Ri}_2(k)$  развивается медленная диссипативная неустойчивость.

Аналогичным образом, из подсистемы (2.4) получается уравнение, описывающее медленную динамику переменной  $\gamma = \gamma^{(0)}$

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial^4 \gamma}{\partial z^4} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} + 2\text{Ri}\gamma \right) - \frac{\partial^6 \gamma}{\partial z^6} + 2 \frac{\partial^4 \gamma}{\partial z^4} - 2(1 + \text{Ri}) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} = 0 \quad (3.9)$$

Для вида решений (3.9) вида  $\gamma = \gamma_0 \exp(\lambda t) \sin(kz)$ , параметр  $\lambda$  всегда отрицателен,

$$\lambda = -k^2 \frac{(k^2 + 1)^2 + 2\text{Ri} + 1}{k^2(k^2 + 1) + 2\text{Ri}}$$

т.е. решения затухают со временем.

Следует подчеркнуть, что в уравнениях (3.8), (3.9) отфильтрованы быстрые переменные, развивающиеся на временном масштабе  $t$  и ответственные за развитие неустойчивости в отсутствие диссипации.

#### 4. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ВОЗМУЩЕНИЙ И СЛАБО НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ НЕВЯЗКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Всюду выше рассматривались линейные задачи теории устойчивости. Для описания нелинейной динамики возмущений в левые части уравнений (1.7), (1.8) следует добавить соответственно слагаемые  $[\psi, \Delta\psi]$  и  $[\psi, \sigma]$ . Путем отыскания решений соответствующих уравнений в форме (2.1), (2.2) и использования метода Галеркина получается нелинейная система из шести уравнений в частных производных для нахождения коэффициентов разложения. Для начала ниже приведен вариант системы в отсутствие диссипативных факторов. Соответствующую систему при этом удобно разбить на две подсистемы, отвечающие соответственно линейным подсистемам (2.3), (2.4). Первая подсистема имеет вид

$$\begin{aligned} (a_{zz} - a)_t + c_z + c_{zzz} - \beta - (b_{zz} - b)c_z + bc_{zzz} &= 0 \\ c_t + (1/2)a_z + (1/2)(ba_z - ab_z) &= 0, \quad \beta_t - \text{Ri}a + (\alpha c_z - \alpha\gamma_z) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Вторая подсистема, отвечающая (2.4),

$$\begin{aligned} (b_{zz} - b)_t + (a_{zz} - a)c_z - ac_{zzz} + \alpha &= 0 \\ \alpha_t + \text{Ri}b + \gamma_z + (b\gamma_z - \beta c_z) &= 0, \quad \gamma_t + (1/2)\alpha_z + (1/2)(b\alpha - \beta a)_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Следует отметить, что в нелинейном случае происходит зацепление подсистем, т.е. их нельзя рассматривать изолированно.

Путем отыскания пространственно периодических по координате  $z$  решений системы (4.1), (4.2) ее можно свести к системе из пяти нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (пентаде уравнений). Наиболее простой вывод уравнений пентады состоит в следующем. Ищутся приближенные решения неустойчивой подсистемы (4.1) вида

$$c = c(t) \sin kz, \quad a = a(t) \cos kz, \quad \beta = \beta(t) \cos kz \quad (4.3)$$

а устойчивой подсистемы (4.2) вида

$$b = b(t), \quad \alpha = \alpha(t), \quad \gamma = \gamma(t) \quad (4.4)$$

Для указанной формы решений уравнения (4.1) сводятся к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям без всяких аппроксимаций. Путем подстановки (4.3), (4.4) в (4.2) и на основе требования ортогональности полученных уравнений системе функций  $1, \sin kz, \cos kz$  на периоде  $L = 2\pi/k$ , получаются еще три уравнения, одно из которых оказывается тривиальным ( $\gamma_t = 0$ ). Таким образом, окончательно получается пентада уравнений с квадратичной нелинейностью. Удобно обозначить  $Y = b(t)$ ,  $U = \alpha(t)$ ,  $X = a(t)$ ,  $V = \beta(t)$ ,  $Z = k^{-1}c(t)$ , а также  $m = 1 + k^2$ . В этих обозначениях пентада уравнений записывается в виде

$$\begin{aligned} mX_t - 2\text{Ri}_1(1 + Y)Z + V &= 0 \\ Z_t - (1/2)(1 + Y)X &= 0, \quad V_t - \text{Ri}X + k^2UZ = 0 \\ U_t + \text{Ri}Y - (1/2)k^2VZ &= 0, \quad Y_t - U + (1/2)k^2XZ = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $\text{Ri}_1 = \text{Ri}_1(k)$  определено согласно (2.7). Следует подчеркнуть, что система (4.5) записана для отклонений от стационарного решения (2.4), которому отвечает нулевое стационарное решение системы (4.5).

Замена переменной  $Y_1 = Y + 1$  сводит систему (4.5) к неавтономной системе – в правой части четвертого уравнения (4.5) появится вынуждающее слагаемое  $\text{Ri}$ , описывающее внешний источник тепла. Периодической системе вертикальных движений отвечает точное решение  $Y_1 = 1$  и ноль для остальных переменных. В отсутствие источника тепла система (4.5) моделирует нелинейную динамику свободных возмущений и сохраняет полную энергию

$$E_t = 0, \quad E = (1/2)[mX^2 + 2Y_1^2 + 2k^4Z^2 + (\text{Ri})^{-1}(2U^2 + V^2)]$$

Выражение для  $E$  упрощается в длинноволновом приближении  $k^2 \ll 1$ , когда в системе (4.5) асимптотически  $m = 1$ ,  $\text{Ri}_1 = (1/2)k^2$ . Соответствующая система сохраняет при этом два интеграла

$$E_t = 0, \quad J_t = 0, \quad E = (1/2)[X^2 + 2Y_1^2 + (\text{Ri})^{-1}(2U^2 + V^2)], \quad J = XU + Y_1V$$

В общем случае нелинейная динамика возмущений исследуется путем численного интегрирования системы (4.5). Некоторые аналитические результаты можно получить, используя методы слабо нелинейной теории, описывающей динамику возмущений вблизи порога неустойчивости. Отправная точка этой теории состоит в анализе линейной задачи устойчивости. Легко проверяется, что линеаризованная форма системы (4.5) распадается на неустойчивую и устойчивую подсистемы. Причем первая подсистема сводится к одному уравнению:  $mX_{tt} - (\text{Ri}_1(k) - \text{Ri})X = 0$ . Отсюда сразу следует, что нулевое решение (для отклонений) неустойчиво, если  $\text{Ri} < \text{Ri}_1(k)$ . Устойчиво же это решение, когда  $\text{Ri} > \text{Ri}_1(k)$ . Для небольших отклонений числа Ричардсона от критического значения ( $\text{Ri}_1 - \text{Ri} = \varepsilon^2 r$ ) приведенное уравнение сводится (в терминах медленного времени  $T = \varepsilon t$ ) к уравнению  $mX_{TT} - rX = 0$ . Параметр  $r$  характеризует отклонение числа Ричардсона от критического значения: докритический случай  $r < 0$ , закритический случай  $r > 0$ .

В общей слабо нелинейной теории неустойчивости, восходящей к Ландау и развитой в [13, 14], линейное уравнение второго порядка модифицируется следующим образом

$$mX_{TT} - rX = \delta X^3 \quad (4.6)$$

Принципиальную роль в теории играет постоянная  $\delta$ , точнее ее знак. Если  $\delta < 0$ , то в докритическом случае имеет место устойчивость, а в закритическом случае возникают два новых по-

ложения равновесия и происходят колебания вокруг одного из них. Ситуация принципиально меняется при положительном значении  $\delta$ . При этом в докритическом случае также имеет место неустойчивость, но уже по отношению к возмущениям конечной амплитуды. Нужно подчеркнуть, что уравнение (4.6) имеет второй порядок по времени, в отличие от уравнения Ландау первого порядка, которое описывает неустойчивости в присутствии диссипации. По терминологии [13, 14], уравнение (4.6) описывает дисперсионные неустойчивости.

Для построения слабо нелинейной теории в системе (4.5) полагается  $\text{Ri} = \text{Ri}_1 - \varepsilon^2 r$  и осуществляется переход к медленному времени  $T = \varepsilon t$ . Решение соответствующей преобразованной системы ищется в форме асимптотического разложения  $X = \varepsilon X^{(1)} + \varepsilon^2 X^{(2)} + \varepsilon^3 X^{(3)} + \dots$  (аналогично для других переменных). Легко проверяется, что для функций первого приближения получаются соотношения

$$V^{(1)} = 2\text{Ri}_1 Z^{(1)}, \quad X^{(1)} = U^{(1)} = V^{(1)} = 0 \quad (4.7)$$

Из уравнений для функций второго приближения следует

$$V^{(2)} = 2\text{Ri}_1 Z^{(2)}, \quad X^{(2)} = 2Z_T^{(1)}, \quad Y^{(2)} = q^2 (Z^{(1)})^2, \quad U^{(2)} = 0 \quad (4.8)$$

Ключевую роль играет система уравнений для функций третьего приближения. С учетом (4.7), (4.8), ее можно записать в виде

$$\begin{aligned} V^{(3)} - 2\text{Ri}_1 Z^{(3)} &= -mX_T^{(2)} + 2\text{Ri}_1 Y^{(2)} Z^{(1)} \\ (V^{(3)} - 2\text{Ri}_1 Z^{(3)})_T &= -rX^{(2)} - \text{Ri}_1 X^{(2)} Y^{(2)} - k^2 Z^{(1)} U^{(3)} \\ X^{(3)} = 2Z_T^2, \quad U^{(3)} &= Y_T^{(2)} + (1/2)X^{(2)} Z^{(1)}, \quad \text{Ri}_1 Y^{(3)} = (1/2)k^2 (Z^{(1)} V^{(2)} + Z^{(2)} V^{(1)}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Дифференцирование первого уравнения системы (4.9) по времени и вычитание из него второго, приводит к неоднородному уравнению

$$mX_{TT}^{(2)} - rX^{(2)} = \text{Ri}_1 X^{(2)} Y^{(2)} + k^2 Z^{(1)} U^{(3)} + 2\text{Ri}_1 (Y^{(2)} Z^{(1)})_T \quad (4.10)$$

С использованием (4.7), (4.8), правая часть (4.10) выражается через производную по времени от куба  $Z^{(1)}$ . Если учесть, что  $X^{(2)} = 2Z_T^{(1)}$  и обозначить  $Z^{(1)} = A$ , после понижения порядка из (4.10) окончательно получается уравнение с кубической нелинейностью и положительной постоянной Ландау  $\delta$

$$mA_{TT} - rA = \delta A^3, \quad \delta = (4/3)k^2 \text{Ri}_1(k) + (1/2)k^4 \quad (4.11)$$

В частности для наиболее опасного возмущения  $k_m^2 = 1/2$ ,  $\text{Ri}_1 = 1/8$ , эта постоянная  $\delta = 131.24$ . Рассмотрение уравнения (4.11) с начальными условиями  $A(0) = A_0$ ,  $A_T(0) = 0$  и использование его первого интеграла  $mA_T^2 - rA^2 - (\lambda/2)A^4 = E = \text{const}$ , показывает, что наряду с закритической неустойчивостью, в докритическом случае  $r < 0$  также имеет место неустойчивость по отношению к возмущениям конечной амплитуды. Для  $r = -1$  это происходит, если  $A_0^2 > 1/\delta$ . Следует отметить, что уравнение (4.11) интегрируется в терминах эллиптических функций.

В качестве иллюстрации слабо нелинейной теории ниже приведены примеры численного интегрирования пентады уравнений (4.5) для значения  $k = 0.5$ , которому отвечает невязкое критическое значение числа Ричардсона  $\text{Ri}_1 = 0.09375$ . На рис. 2 представлены зависимости от времени компонента  $X(t)$  для данного  $k$  и значения  $\text{Ri} = 0.095$ , слегка превышающего критическое значение. При начальной амплитуде  $Z(0) = 0.0004$  (остальные амплитуды – нули) имеют место незатухающие колебания. Небольшое увеличение амплитуды ( $Z(0) = 0.004$ ) приводит к взрывному экспоненциальному росту.

Как показывают расчеты, быстрый рост амплитуд возмущений имеет место и для всех закритических значений  $\text{Ri} < \text{Ri}_1(k)$ . Таким образом, как и предсказывает слабо нелинейная теория, в отсутствие диссипации нелинейные слагаемые не в состоянии стабилизировать развитие неустойчивости.

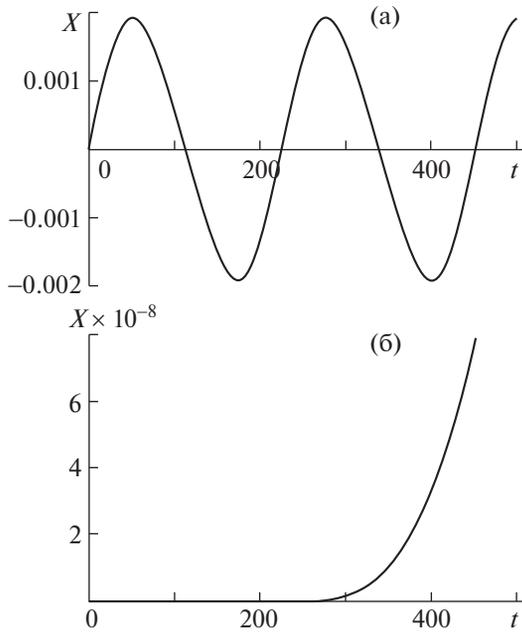


Рис. 2. Зависимость от времени  $X(t)$ :  $Z(0) = 0.0004$  (а) и  $0.004$  (б).

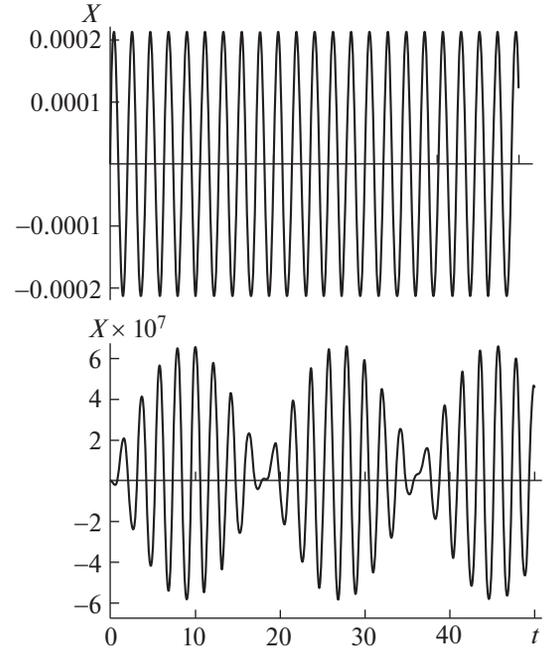


Рис. 3. Зависимости от времени  $X(t)$  и  $Y(t)$  при  $Z(0) = 0.004$  и  $Ri = 10$ .

Результаты численного интегрирования системы (4.5) в докритическом случае  $Ri = 10$  представлены на рис. 3 (показаны два компонента). В этом случае имеют место устойчивые нелинейные колебания.

### 5. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРИСУТСТВИИ ДИССИПАЦИИ

При учете диссипативных факторов в систему (4.5) добавляются линейные слагаемые, пропорциональные  $Re^{-1}$

$$\begin{aligned}
 mX_t - 2Ri_1(1+Y)Z + V + m^2 Re^{-1} X &= 0 \\
 Z_t - (1/2)(1+Y)X + k^2 Re^{-1} Z = 0, \quad V_t - RiX + k^2UZ + Re^{-1}(k^2Z + mV) &= 0 \\
 U_t + RiY - (1/2)k^2VZ + Re^{-1}U = 0, \quad Y_t - U + (1/2)k^2XZ + Re^{-1}Y &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Важная особенность системы (5.1) состоит в том, что наряду с нулевым стационарным решением, отвечающим основному течению, она имеет еще одно ненулевое стационарное решение. Проще всего это решение находится в случае малой диссипации  $Re^{-1} \ll 1$ . Стационарный вариант (5.1) сводится к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 (k^2 - 1)(1+Y)Z_1 + V + m^2GX &= 0 \\
 -(1/2)(1+Y)X + GZ_1 = 0, \quad -RiX + UZ_1 + G(Z_1 + mV) &= 0 \\
 RiY - (1/2)VZ_1 + GU = 0, \quad -U + (1/2)XZ_1 + GY &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

где для краткости обозначено  $Z_1 = k^2Z$ ,  $G = Re^{-1}$ . Когда  $G \ll 1$ , из второго уравнения системы (5.2) асимптотически следует, что  $Y = -1$ . Подстановка данного значения в остальные уравнения после элементарных преобразований дает стационарное решение

$$Y = -1, \quad Z_1 = \sqrt{2(Ri + m^3G^2)}, \quad X = 2 \frac{Ri + G^2}{(m^2 + 1)GZ_1}$$

$$V = -Gm^2 X = -2m^2 \frac{Ri + G^2}{(m^2 + 1)Z_1}, \quad U = (1/2)XZ_1 - G = \frac{Ri - m^2 G}{(m^2 + 1)G} \quad (5.3)$$

Выражения (5.3) упрощаются в случае длинноволновых возмущений  $k^2 \ll 1$ , когда  $m^2 \sim 1$  и стационарное решение асимптотически не зависит от волнового числа

$$Z_1 = \sqrt{2(Ri + G^2)}, \quad X = Z_1/2G, \quad V = -Z_1/2, \quad U = (Ri - G^2)/2G \quad (5.4)$$

Следует подчеркнуть, что выражения (5.3), (5.4) справедливы в случае слабой диссипации и в определенном смысле имеют сингулярный характер ( $X \rightarrow \infty$  при  $G \rightarrow 0$ ).

Стационарному решению (5.3) отвечает периодическое течение с нетривиальной топологией линий тока. Действительно, в новых обозначениях функция тока возмущения (2.1) записывается в виде

$$\psi = X(t) \cos(kz) \cos x + Y(t) \sin x + kZ(t) \sin(kz)$$

В безразмерных переменных функция тока основного течения  $\psi = \Psi(x) = \sin x$ . При этом полная функция тока (основное течение плюс возмущение)  $\psi_* = \Psi + \psi$ . С использованием асимптотических выражений (5.4), для полной функции тока стационарного вторичного течения получается выражение

$$\psi_* = Z_1((1/2G)\cos(kz)\cos x + k^{-1}\sin(kz)) \quad (5.5)$$

Теневая картина изолиний полной функции тока (5.5) для значений  $k = 0.3$ ,  $G = 0.1$  приведена на рис. 4. Эта картина отвечает периодической системе замкнутых вихрей (вихревой решетке) и принципиально отличается от простой периодической системы вертикальных движений основного фонового течения. Следует отметить, что для получения картины в реальном масштабе, ее следует растянуть по вертикали.

В ситуации с наличием двух стационарных решений возникает вопрос об их нелинейной устойчивости. Для получения ответа на этот вопрос проводилось численное интегрирование полной системы (5.1). В расчетах полагалось  $Re^{-1} = 0.1$  и варьировалось значение числа Ричардсона  $Ri$ . Волновое число  $k$  выбиралось из интервала  $0 < k < 1$ . В соответствии с предсказаниями линейной теории, расчеты показали, что для всех значений  $Ri > Ri_2(k)$  нулевое стационарное решение устойчиво – все компоненты с течением времени стремятся к нулю. Для значений  $Ri < Ri_2(k)$  отдельно рассматривался случай  $Ri < 1/8 = 0.125$  (максимальное значение невязкого критического числа Ричардсона) и случай  $Ri > 1/8$ . Согласно линейной теории, в первом случае для значений волнового числа из интервала  $k_1 < k < k_2$ ,  $k_{1,2}^2 = (1/2) \pm \sqrt{(1/4) - 2Ri}$ , имеет место невязкая неустойчивость нулевого решения, вне этого интервала – диссипативная неустойчивость. Численное интегрирование нелинейной системы с начальной амплитудой  $Z(0) = 0.004$  (остальные амплитуды нули) показало следующее. При  $Ri < 1/8$  и небольших значениях  $k$  неустойчивость основного решения приводит к установлению вторичного стационарного решения. Процесс установления носит монотонный или осциллирующий характер (рис. 5, 6). Таким образом, в случае длинноволновых возмущений периодическая система вертикальных движений трансформируется в вихревую решетку.

Важный результат состоит в том, что с ростом волнового числа вторичное стационарное решение также теряет устойчивость и сменяется режимом устойчивых незатухающих колебаний (рис. 7). Смена устойчивости происходит при некотором значении  $k = k_*$ , которое находится численно и близко к значению  $k_1$ . С большой степенью вероятности можно предположить, что при переходе через значение  $k = k_*$  происходит бифуркация рождения предельного цикла (бифуркация Хопфа). Об этом свидетельствует выполненный численный расчет спектра матрицы системы (5.1), линеаризованной на стационарном решении (5.3). Этот расчет показал наличие у матрицы пары комплексно сопряженных собственных чисел  $\lambda_{1,2}(k) = \xi(k) \pm i\omega(k)$ , таких что выполнены условия бифуркации Хопфа:  $\xi(k_*) = 0$ ,  $\omega(k_*) \neq 0$  и  $\xi'(k_*) > 0$ . Кроме того, выполненные расчеты решений нелинейной системы (5.1) показали независимость периода колебаний от выбора начальных условий (значений начальной амплитуды  $Z(0)$ ).

Расчеты для значений  $Ri > 1/8$  продемонстрировали возникновение колебаний с нерегулярной структурой (рис. 8). Такие колебания, вероятно, могут быть не стохастическими, а двоякопериодическими. Ответ на этот вопрос требует детального спектрального анализа временных зависимостей, который выходит за рамки данной статьи.

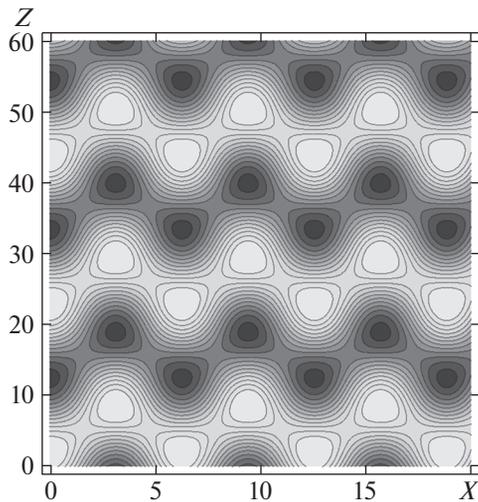


Рис. 4. Теневая картина изолиний функции тока вторичного стационарного течения.

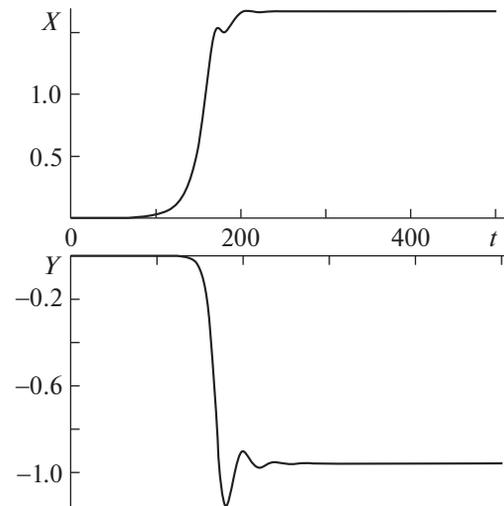


Рис. 5. Установление вторичного стационарного решения:  $Ri = 0.05$ ,  $G = Re^{-1} = 0.1$ ,  $k = 0.2$ .

В завершение данного раздела следует отметить, что представленный выше анализ не исчерпывает всех особенностей гидродинамической неустойчивости периодической системы вертикальных движений. Интересные особенности связаны с задачей, дополнительно учитывающей радиационное выхолаживание (теплообмен по Ньютону). Это осуществляется добавлением в правую часть уравнения (2.2) линейного слагаемого, пропорционального плавучести. Как показывает анализ, радиационное выхолаживание оказывается сильным дестабилизирующим фактором: в его присутствии неустойчивость существует при всех значениях числа Ричардсона (нет порогового значения). Этот новый эффект рассмотрен в [9]. Кроме того, наряду с основным периодическим течением, в нелинейной задаче с учетом радиационного выхолаживания также появляется вторичное стационарное течение.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована гидродинамическая устойчивость системы вертикальных движений, инициируемых пространственно-периодическими распределениями источников тепла. С использованием метода Галеркина уравнения конвекции в приближении Буссинеска сведены к системе из пя-

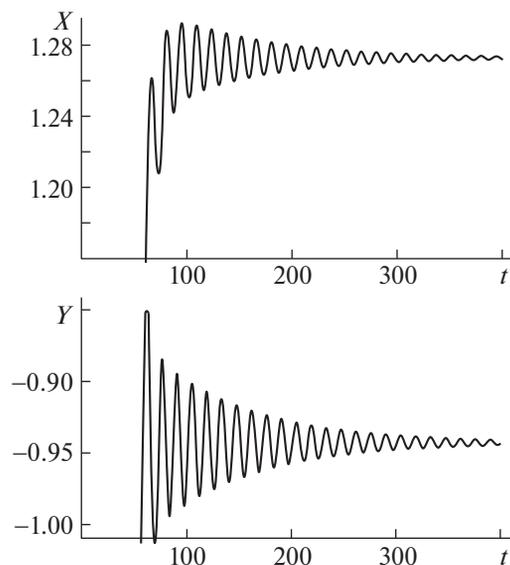


Рис. 6. То же, что и на рис. 5, но для волнового числа  $k = 0.5$ .

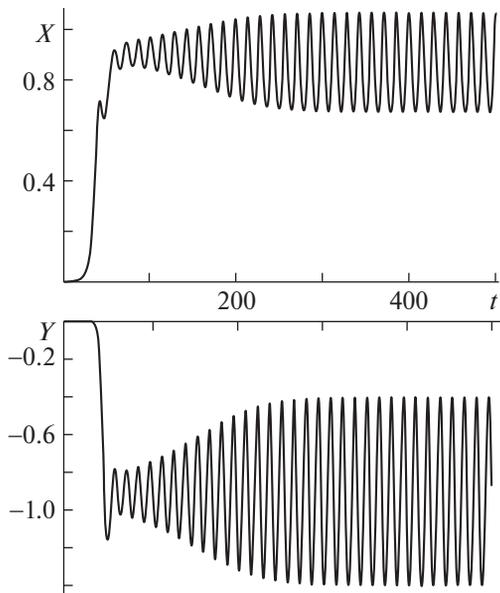


Рис. 7. То же, что и на рис. 5, но для волнового числа  $k = 1/\sqrt{2} = 0.7071$  (наиболее опасная невязкая мода). Режим предельного цикла.

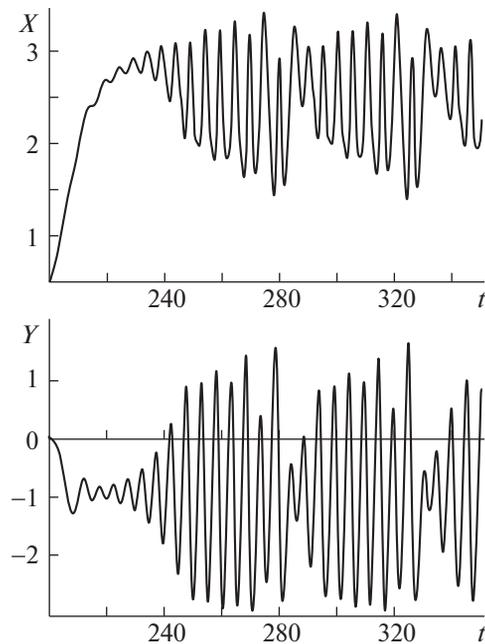


Рис. 8. Зависимости от времени  $X(t)$  и  $Y(t)$  при  $Ri = 0.5$ ,  $G = 0.1$ ,  $k = 0.7071$ . Нерегулярное поведение.

ти уравнений для коэффициентов разложения возмущений в тригонометрический ряд Фурье. В рамках этой системы развита линейная и слабо нелинейная теория невязкой неустойчивости. Установлено, что учет вязкости и теплопроводности приводит к появлению дополнительной неустойчивой моды и значительному расширению области неустойчивости на плоскости определяющих параметров (чисел Ричардсона и Рейнольдса). Показано, что развитие неустойчивости в присутствии диссипации сопровождается формированием либо стационарного, либо осциллирующего во времени вторичного течения с нетривиальной топологией линий тока.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 18-05-00414-а и 18-05-00831-а).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мешалкин Л.Д., Синай Я.Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // ПММ. 1961. Т. 25. № 6. С. 1700–1705.
2. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 366 с.
3. Libin A., Sivashinsky G., Levich E. Long-wave instability of periodic flows at large Reynolds numbers // Phys. Fluids. 1987. V. 30. P. 2984–2986.
4. Kalashnik M., Kurgansky M. Nonlinear dynamics of long-wave perturbations of the Kolmogorov flow // Ocean Dynamics. 2018. V. 68. P. 1001–1012.
5. Батчаев А.М., Курганский М.В. О неустойчивости периодического сдвигового течения слабостратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22. № 1. С. 3–9.
6. Balmforth N., Young Y. Stratified Kolmogorov flow // J. Fluid Mech. 2002. V. 450. P. 131–167.
7. Калашник М.В., Шмерлин Б.Я. О конвективной неустойчивости влажного насыщенного слоя // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26. № 10. С. 1034–1044.
8. Шмерлин Б.Я., Калашник М.В. Конвективная неустойчивость Релея в присутствии фазовых переходов влаги. Формирование крупномасштабных вихрей и облачных структур // Успехи физических наук. 2013. Т. 183. № 5. С. 497–510.
9. Калашник М.В., Курганский М.В. Гидродинамическая неустойчивость периодической системы восходящих и нисходящих движений в атмосфере // Метеорология и гидрология. 2018. № 11. С. 31–40.
10. Должанский Ф.В. Основы геофизической гидродинамики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 264 с.
11. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. New York: Dover Publ., Inc. 1981. 654 p.
12. McIntyre M.E. Diffusive destabilization of the baroclinic circular vortex // Geophys. Fluid Dyn. 1970. V. 1. P. 19–57.
13. Gibbon J.D., McGuinness M.J. Amplitude equations at the critical points of unstable dispersive physical system // Proc. Roy. Soc. Lond. 1981. V. A377. P. 165–219.
14. Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. Solitons and nonlinear wave equations. London: Academic Press, 1984. 694 p.