ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2020, № 4, с. 69–81

УДК 532.59

ВОЛНЫ НА ВОДЕ: ТЕОРИИ И ЭКСПЕРИМЕНТЫ

© 2020 г. И. М. Миндлин*

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород, Россия

**E-mail: ilia.mindlin@gmail.com*

Поступила в редакцию 12.07.2019 г.
После доработки 03.10.2019 г.
Принята к публикации 17.12.2019 г.

Аналитические результаты нелинейной теории волновых пакетов тестируются результатами экспериментов в лабораторном лотке и сопоставляются с аналитическими результатами линейной теории волн малой амплитуды и теории слабонелинейных волн на неограниченной свободной поверхности тяжелой жидкости. Для тестирования используются известные в литературе результаты экспериментов и наблюдений.

Ключевые слова: нелинейные волны, волновые пакеты, уравнение Шредингера

DOI: 10.31857/S0568528120030093

1. О ТРЕХ ТЕОРИЯХ ВОЛН

Для трех сопоставляемых теорий волн исходными являются классические уравнения задачи.

Они включают: уравнение Лапласа для потенциала скоростей; нелинейное кинематическое условие на свободной поверхности, означающее, что жидкая частица на свободной поверхности движется в нормальном к поверхности направлении вместе с поверхностью; нелинейное условие непрерывности давления в окрестности свободной поверхности; условия на бесконечности и начальные условия.

Отличаются теории методами редукции исходных уравнений к более простым.

В линейной теории речь идет о волнах, амплитуда которых мала по сравнению с длиной волны [1].

Согласно линейной теории любые группы волн диспергируют. Особое внимание уделено двум предельным случаям, когда длины волн много меньше глубины водного бассейна (глубокая вода) и когда длины волн много больше глубины (мелкая вода). Для волновых пакетов на глубокой воде вводятся понятия фазовой и групповой скорости. Волны на мелкой воде не подвержены дисперсии и сохраняют скорость, зависящую от глубины бассейна. Структура волн между этими предельными случаями аналитически не описана.

В теории слабонелинейных волн рассматривается группа волн, обладающая несущей частотой ω_0 и несущим волновым числом. Предполагается, что амплитуда, волновое число и частота группы медленно меняются на расстояниях порядка длины волны несущего колебания и на интервале времени порядка периода несущего колебания, причем подавляющая часть энергии волн приходится на узкий диапазон волновых чисел.

Простейшим примером группы волн, удовлетворяющей указанным условиям, является сумма двух гармонических волн близких частот. Эта группа волн состоит из волновых пакетов, обладающих медленно меняющейся огибающей пакета.

На основе этих предположений классические уравнения теории волн редуцируются к системе уравнений, описывающих эволюцию медленно меняющихся частоты, волнового вектора и амплитуды эволюционирующих волн. В комплекснозначной форме эта система сводится к уравнению Шредингера для комплексной огибающей [2].

Применимость уравнения Шредингера к теории слабонелинейных волн на поверхности жидкости обосновывается тем, что некоторые выводы этой теории согласуются с результатами лабораторных экспериментов.

Однако эти же результаты этих же экспериментов не менее убедительно говорят в пользу нелинейной теории волновых пакетов.

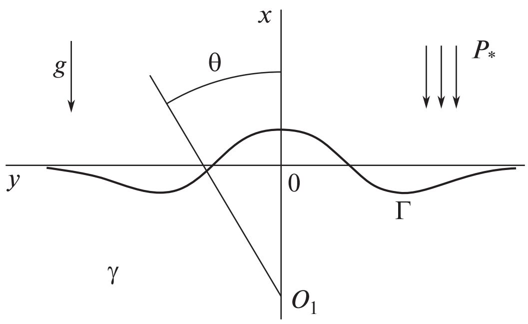

Рис. 1. Системы координат и профиль свободной поверхности жидкости.

Нелинейная теория волновых пакетов отличается тем, что в ней не делается никаких предположений относительно частотного спектра волн или их длины. Предположения касаются только начальных условий. Теория предсказывает ранее неизвестные свойства гравитационных волн в воде.

Цель предлагаемой работы – проверить согласие теории волновых пакетов с результатами экспериментов и наблюдений.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В теории нелинейных волновых пакетов изучается эволюция волн на свободной поверхности тяжелой идеальной жидкости, которые начинают распространяться из некоторой области начального возмущения этой жидкости. Рассматриваются потенциаьные течения в бесконечно глубокой жидкости, ее свободная поверхность неограничена, внешнее давление на свободной поверхности постоянно.

Предполагается, что в области начального возмущения вертикальное смещение поверхности жидкости много меньше горизонтального размера этой области.

Схема течений представлена на рис. 1, где ось x и y – вертикальная и горизонтальная координатные оси; поле скоростей параллельно вертикальной плоскости (y, x), кривая Γ – след свободной поверхности S в плоскости (y, x), $y = 0$, $x = f < 0$, – координаты полюса O_1 системы полярных координат в плоскости (y, x), θ – полярный угол, измеряемый от направленной вверх положительной полуоси x против хода часовой стрелки, t – время. Внешнее давление P_* на свободной поверхности – постоянно. Свободная поверхность покоящейся жидкости – горизонтальная плоскость $x = 0$.

Чтобы удовлетворить уравнению Лапласа, потенциал скоростей Φ ищется в форме потенциала диполей, распределенных на кривой Γ

$$\Phi(P) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \nu(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right) dl$$

где $Q(\theta, t)$ – точка на кривой Γ, точка P не принадлежит этой кривой, $r = |PQ|$ – расстояние между точками P и Q, dl – длина элемента дуги Γ (рис. 1). Запись $\partial\Phi/\partial n$ означает производную в точке Q в направлении положительной нормали (ее орт направлен в область над свободной поверхностью жидкости).

3. ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Уравнения свободной поверхности ищутся в параметрической форме

$$x = cW(\theta, t), \quad y = (W - f)\mathrm{tg}\theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2 \tag{3.1}$$

где $W(\theta, t)$ – неизвестная функция, которая отыскивается в ходе решения задачи.

Формально уравнения (3.1) при заданной функции W и фиксированном t описывает семейство кривых, зависящее от параметра f. Величина $|f|$ определяет горизонтальный масштаб задачи.

Уравнениями (3.1) осуществляется нелинейное отображение бесконечной горизонтальной оси x на полуокружность $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Поскольку длина полуокружности конечна, отображение позволяет представить волну функциональным рядом по дискретному (относительно пространственной переменной θ) множеству функций вместо интеграла Фурье – разложения по континууму гармонических волн.

В плоскости (y, x) соотношениями

$$x = \sigma + W(\theta, t), \qquad y = (\sigma + W - f)\mathrm{tg}\theta$$

вводятся криволинейные координаты (σ, θ), в которых свободная поверхность описывается уравнением $\sigma = 0$ (жидкость заполняет полупространство $\sigma < 0$).

Все уравнения переписываются в криволинейных координатах, и задача формулируется в терминах интегродифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций – $W(\theta, t)$ и плотности диполей $\nu(\theta, t)$, зависящих от аргументов θ и t.

Все уравнения записываются в безразмерных переменных (если не оговорено противное). Поскольку в задаче нет характерного линейного размера, размерная единица длины L_* может выбираться произвольно. Однако в разделе 7 значения L_* и $|f|L_*$ назначаются, исходя из инструментальных данных. Размерная единица времени T_* определяется соотношением $T_*^2 g = L_*$, где g – ускорение свободного падения. Безразмерное ускорение свободного падения равно 1.

Все параметры, переменные и уравнения обезразмериваются с помощью L_*, T_*, P_* и плотности воды $\gamma_* = 1000$ кг/м^3.

В уравнения в криволинейных координатах вводится малый параметр $\varepsilon = c/f$, где c – максимум отклонения свободной поверхности в очаге возмущения жидкости, $|f|$ – характерный горизонтальный размер этого очага. Отбрасывая в классических уравнениях члены порядка ε, приходим к уравнениям ведущего приближения.

И классические уравнения задачи, и уравнения ведущего приближения, записанные в криволинейных координатах, получены в [3] и представлены в Приложении.

Последовательные стадии построения решения интегродифференциальных уравнений ведущего приближения представлены в [3–6].

Здесь приводятся итоговые результаты.

4. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВЕДУЩЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Точное решение дает для поверхности жидкости следующие формулы

$$x = cW(\theta, t), \qquad y = (x - f)\tan\theta, \qquad -\pi/2 < \theta < \pi/2 \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered} W(\theta, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n} [a_n I_{2n+1}(\tau, \theta) + b_n J_{2n+1}(\tau, \theta)] + \\ + \frac{1}{\sqrt{2|f|}} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n [\rho_n P_n(\tau, \theta) + e_n Q_n(\tau, \theta)], \qquad t = \tau\sqrt{2|f|} \end{gathered} \tag{4.2}$$

$$P_{2n}(\tau, \theta) = \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2/2} \cos\phi \sin(\tau x) dx, \qquad Q_{2n}(\tau, \theta) = \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2/2} \sin\phi \sin(\tau x) dx$$

$$I_{2n+1}(\tau, \theta) = \frac{\partial P_{2n}}{\partial \tau}, \qquad J_{2n+1} = \frac{\partial Q_{2n}}{\partial \tau}$$

где $\phi = 1/2x^2\mathrm{tg}\theta$

$$I_{2n+1}(0, \theta) = \cos^{n+1}\theta \cdot \cos((n+1)\theta), \qquad J_{2n+1}(0, \theta) \cos^{n+1}\theta \cdot \sin((n+1)\theta)$$

Постоянные a_n, b_n определяют начальную форму поверхности жидкости, ρ_n, e_n – начальное поле скоростей.

Пусть в (4.2) все коэффициенты равны нулю, кроме $a_n = 1$.

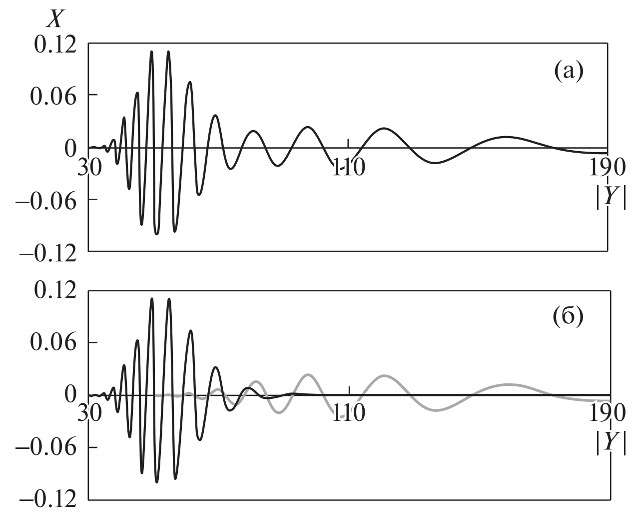

Рис. 2. Профили пакетов (6.1) (а), (6.2) (б, левый профиль), (6.3) (б, правый профиль) при $\tau = 25$.

Уравнениями

$$x = cI_{2n+1}, \quad y = (x - f)\mathrm{tg}\theta, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$I_{2n+1}(\tau, \theta) = \int\limits_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2/2} \cos\left(\frac{1}{2}x^2 \mathrm{tg}\theta\right)\cos(\tau x)dx \tag{4.3}$$

описывается счетное множество специфических волновых пакетов; параметр $2n + 1$ именуется номером пакета.

Аналогично из (4.2) получим три другие семейства специфических пакетов.

Любая волна, удовлетворяющая сформулированным условиям, является нелинейной смесью конечного или бесконечного (это зависит от начальных условий) специфических волновых пакетов (симметричных и антисимметричных) различных номеров, и эволюция каждого пакета не влияет на эволюцию остальных.

Хотя функция $W(\theta, t)$ является линейной комбинацией функций четырех указанных множеств, волны, описываемые параметрическими уравнениями вида (4.1), являются нелинейными: их уравнение в неявной форме

$$x = cW\left(\mathrm{arctg}\frac{y}{x - f}, t\right)$$

5. СВОЙСТВА СПЕЦИФИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

Уточним смысл используемых ниже терминов.

Термин “волна” означает часть профиля поверхности жидкости, ограниченного тремя последовательными нулями функции $W(\tau, \theta)$; волна включает один гребень и смежную с ним ложбину; ложбина может предшествовать гребню или следовать за ним. Высота (размах) волны равна сумме высоты гребня и глубины ложбины; например, на рис. 2 и 3 высота волны максимального размаха пакета (6.2) примерно равна 0.21 при $\tau = 25$ и 0.18 при $\tau = 50$.

Волна максимальной высоты вычленяется тремя последовательными нулями. Любые другие три последовательных нуля ограничивают волну меньшей высоты. Это условие определяет волну максимального размаха единственным образом, что позволяет занумеровать нули волн.

Термин “группа волн” означает систему волн, амплитуды которых убывают с расстоянием от волны максимального размаха; “волновой пакет” – это группа волн, размах которых быстро убывает при удалении от волны максимального размаха.

При каждом фиксированном τ нули пакета (4.3) определяются уравнением $I_{2n+1}(\tau; \theta) = 0$ и расположены на лучах $\theta = \theta_k(\tau)$ (k – номер нуля).

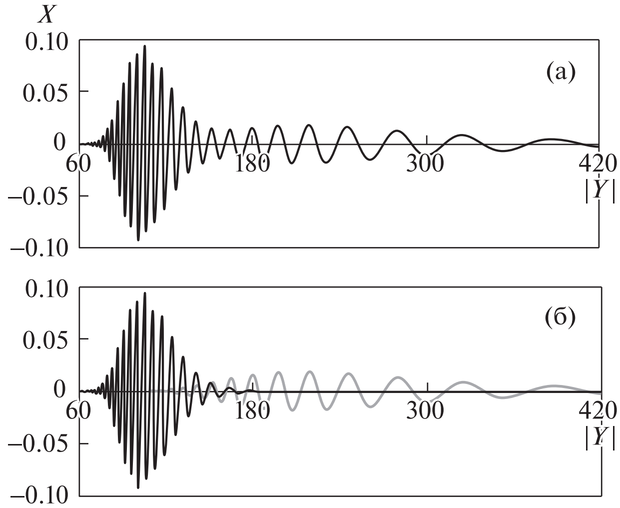

Рис. 3. Пакеты те же, что на рис. 2, но $\tau = 50$.

Горизонтальная координата нуля $\theta_k(\tau)$ равна $y_k = -f \cdot \mathrm{tg}\theta_k(\tau)$, и функции $I_{2n+1}(\tau;\theta)$ не зависят от f. Отсюда следуют утверждения.

При каждом фиксированном τ

а) вертикальные координаты гребней и ложбин (и, следовательно, высота) волн не зависят от f;

б) отношение расстояний $y_{k+1} - y_k$ и $y_k - y_{k-1}$ между тремя последовательными нулями волны (4.3) не зависит ни от f, ни от c (т.е. не зависит от амплитуды).

Горизонтальная скорость нуля равна $dy_k/dt = u_k(\tau)\sqrt{0.5|f|}$, где $u_k(\tau) = d\mathrm{tg}\theta_k(\tau)/d\tau$.

С течением времени количество нулей группы волн растет, так что существование функций $\theta_k(\tau)$ на всей полуоси $\tau > 0$ не гарантируется. Дифференцируя уравнение $I_{2n+1}(\tau;\theta_k(\tau)) = 0$ по τ, найдем, что при некоторых значениях τ производная $u_k(\tau)$ может не существовать, но допредельные отношения

$$[\mathrm{tg}\theta_k(\tau + \Delta\tau) - \mathrm{tg}\theta_k(\tau)]/\Delta\tau$$

существуют. Этого достаточно, чтобы получить существенную информацию о скорости распространения различных участков группы волн (4.3).

Если L_* – размерная единица длины, $T_* = \sqrt{L_*/g}$ – размерная единица времени, то в момент t_* размерная координата нуля, лежащего на луче $\theta = \theta(\tau)$, равна

$$y_*(t_*) = |f| L_* \mathrm{tg}\theta(\tau), \quad t_* = \tau\sqrt{2|f|} \cdot T_*$$

и, следовательно, отношение

$$\lambda(\tau) = \frac{y_*(t_*)}{g t_*^2} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{tg}\theta(\tau)}{\tau^2} \tag{5.1}$$

явно зависит только от τ.

Максимальный по модулю тангенс из трех, определяющих нули волны, определяет передний фронт этой волны. Максимальный тангенс обозначим как $\mathrm{tg}\theta_f(\tau)$; минимальный по модулю тангенс обозначается как $\mathrm{tg}\theta_r(\tau)$. Размерная длина волны равна

$$l_* = L_* \left| f[\mathrm{tg}\theta_f(\tau) - \mathrm{tg}\theta_r(\tau)] \right| \tag{5.2}$$

6. ЭВОЛЮЦИЯ СПЕЦИФИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

На рис. 2–6 представлены профили волн при $f = -10$ и различных значениях τ. Профили описываются уравнениями

$$x = 0.4 I_{23}(\mathrm{tg}, \theta) + 0.075 I_5(\tau, \theta), \quad |y| = (x - f)|\mathrm{tg}\theta| \tag{6.1}$$

$$x = 0.4I_{23}(\tau,\theta), \quad |y| = (x - f)|\mathrm{tg}\theta| \tag{6.2}$$

$$x = 0.075I_5(\tau,\theta), \quad |y| = (x - f)|\mathrm{tg}\theta| \tag{6.3}$$

Эволюция пакетов с номерами 23 и 5 и их смеси показана на рис. 2–6.

Пакеты I_{2n+1} симметричны относительно плоскости $y = 0$, и потому на рисунках представлены профили как функции $|y|$ (через плоскость $y = 0$ жидкость не течет).

Три профиля при каждом значении τ нарисованы в одном масштабе.

При $\tau = 0$ максимальная высота каждого профиля достигается на луче $\theta = 0$, т.е. на оси x. Вертикальная координата максимума равна $x = 0.4$ для (6.2), $x = 0.075$ для (6.3) и, следовательно, при $\tau = 0$ вертикальная координата максимума равна $x = 0.475$ для (6.1).

Ниже рассматривается группа волн, распространяющихся в заданном направлении, например, вдоль полуоси $y > 0$.

Рисунки позволяют заключить, что профили (6.2) и (6.3) движутся с разными скоростями: горизонтальное расстояние между вершинами волн максимального размаха (разность горизонтальных координат) приближенно равно 70 при $\tau = 25$, 115 при $\tau = 50$, 260 при $\tau = 100$, 440 при $\tau = 200$ и 690 при $\tau = 300$.

Можно сделать вывод, что группа волн постепенно разделяется на специфические пакеты – составляющие группы. Эволюция каждого пакета не влияет на эволюцию остальных и, в свою очередь, не зависит от эволюции остальных пакетов. Чем больше номер пакета, тем короче характерная длина волны его несущей, тем меньше его (пакета) скорость и тем медленнее пакет "расползается" вдоль горизонтали и медленнее убывает его высота – типичное проявление дисперсии волн.

7. ОЦЕНКА РАЗМЕРНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПАКЕТА (6.2)

Ниже понадобятся оценки ряда размерных параметров пакета (6.2) в окрестности точки, удаленной от оси $y = 0$ на расстояние y_*, в зависимости от начальной высоты пакета H_* и времени t_* пробега вершины пакета (точнее, переднего фронта волны максимального размаха) до указанной точки. Оцениваются L_*, h_* – высота пакета в момент t_*, V_* – средняя скорость вершины за время пробега, v_* – скорость вершины в момент t_*, l_* – длина волны максимального размаха в момент t_*, l_{**} – длина пакета в момент t_*.

Опишем алгоритм расчета указанных параметров.

Вычисляется отношение y_*/t_*^2, после чего, используя уравнения (6.2), отыскиваются передний фронт волны максимального размаха, для которой τ и $\mathrm{tg}\theta_f(\tau)$ удовлетворяют равенству (5.1), а также $\mathrm{tg}\theta_r(\tau)$, безразмерная высота $h(\tau)$ волны и $\mathrm{tg}\theta_f(\tau + \Delta\tau)$ для малого значения $\Delta\tau$.

Соотношения $H_* = cL_*$ и $|f|L_*|\mathrm{tg}\theta_f(\tau)| = y_*$ дают размерные оценки вертикального L_* и горизонтального $a = |f|L_*$ характерных линейных параметров (c – безразмерная высота пакета в момент $t = 0$). Высота волны максимального размаха оценивается величиной $h_*(t_*) = h(\tau)L_*$, длина волны, согласно (5.2), оценивается величиной $l_* = a\left[|\mathrm{tg}\theta_f(\tau)| - |\mathrm{tg}\theta_r(\tau)|\right]$.

Скорости вершины оцениваются по формулам

$$V_* = y_*/t_*, \quad v_* = \sqrt{0.5ag}\left[|\mathrm{tg}\theta_f(\tau + \Delta\tau)| - |\mathrm{tg}\theta_f\tau)|\right]/\Delta\tau$$

при малом $\Delta\tau$. Процедура оценки длины волнового пакета поясняется ниже в примере 1.

Все горизонтальные размеры зависят от расстояния y_* и времени пробега t_* и не зависят от начальной высоты H_* пакета. Все оценки не зависят от постоянных f и c (в (6.2) $c = 0.4$).

Пример 1. При $y_* = 8.3$ м, $t_* = 27.4$ с, $H_* = 0.75$ см, $g = 9.8$ м/с^2, $2y_*/(gt_*^2) = 0.0023$ находим $\tau = 91$, $\mathrm{tg}\theta_f(91) = 19.150$, $\mathrm{tg}\theta_r(91) = 18.610$, $\mathrm{tg}\theta_f(91{,}1) = 19.192$, $h(91) = 0.075$, $L_* = 1.86$ см, $a = |f|L_* = 0.445$ м, $h_* = 1.4$ мм, $l_* = 0.24$ м, $V_* = 0.311$ м/с, $v_* = 0.620$ м/с.

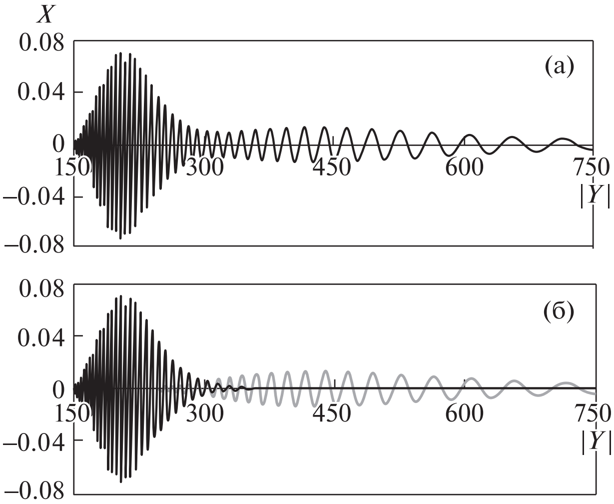

Рис. 4. Пакеты те же, что на рис. 2, но $\tau = 100$.

Оценки длины волнового пакета, получаемые на основе записи волнографами, зависят от чувствительности датчиков амплитуды, используемых при записи волн. В момент t_* пакет ограничен координатами $y_{min} = |f|\text{tg}\theta_{min}$ и $y_{max} = |f|\text{tg}\theta_{max}$, где $\text{tg}\theta_{min}$ и $\text{tg}\theta_{max}$ отыскиваются из уравнений (6.2) при соответствующем значении τ.

Неравенству $|x| > 0.01$ отвечают волны, амплитуда которых превосходит 0.2 мм. В момент t_* эти волны локализованы в интервале

$$14.3a < y < 25.9a, \quad \text{tg}\theta_{min} = 14.3, \quad \text{tg}\theta_{max} = 25.9 \quad \text{при} \quad \tau = 91.$$

Длина интервала оценивается величиной $l_{**} = (25.9 - 14.3)\cdot 0.45$ м $= 5.2$ м.

В момент t_* в интервале $15a < y < 25a$ выполняется неравенство

$|x| > 0.02$. Длина интервала оценивается величиной $l_{**} = 10\cdot a = 4.5$ м.

В момент t_* в интервале $15.5a < y < 22.3a$ выполняется неравенство $|x| > 0.03$, и, следовательно, интервал содержит волны, амплитуда которых превосходит 0.6 мм. Длина интервала оценивается величиной $l_{**} = 6.8\cdot a = 3.06$ м.

В зависимости от чувствительности датчиков амплитуды, используемых при записи волн, любая из трех оценок может рассматриваться как оценка длины волнового пакета (6.2) в момент t_*.

Пример 2. При $y_* = 8.53$ м, $t_* = 24$ с, $H_* = 0.5$ см, $g = 9.8$ м/с^2, $2y_*/(gt_*^2) = 0.0030$ находим $\tau = 70$, $\text{tg}\theta_f(70) = 14.765$, $\text{tg}\theta_r(70) = 14.227$, $\text{tg}\theta_f(70{,}1) = 14.807$, $h(70) = 0.084$, $L_* = 1.25$ см, $a = |f|L_* = 0.578$ м, $h_* = 1.05$ мм, $l_* = 0.31$ м, $V_* = 0.355$ м/с, $v_* = 0.707$ м/с.

Пример 3. При $y_* = 8.53$ м, $t_* = 28.8$ с, $H_* = 0.7$ см, $g = 9.8$ м/с^2, $2y_*/(gt_*^2) = 0.0021$ находим $\tau = 100$, $\text{tg}\theta_f(100) = 20.990$, $\text{tg}\theta_r(100) = 20.450$, $\text{tg}\theta_f(100.1) = 21.032$, $h(100) = 0.072$, $L_* = 1.75$ см, $a = |f|L_* = 0.406$ м, $h_* = 1.3$ мм, $l_* = 0.22$ м, $V_* = 0.296$ м/с, $v_* = 0.592$ м/с.

На рис. 4 (б), левый профиль, волны с амплитудой более 0,3 мм заключены в интервале $170 < y < 250$; длина интервала оценивается как $(25 - 17)a = 3.2$ м.

8. СОПОСТАВЛЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ЛАБОРАТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Воспользуемся результатами лабораторных экспериментов, представленные в [7] и [2].

В [7] исследуется тонкая структура волнового импульса.

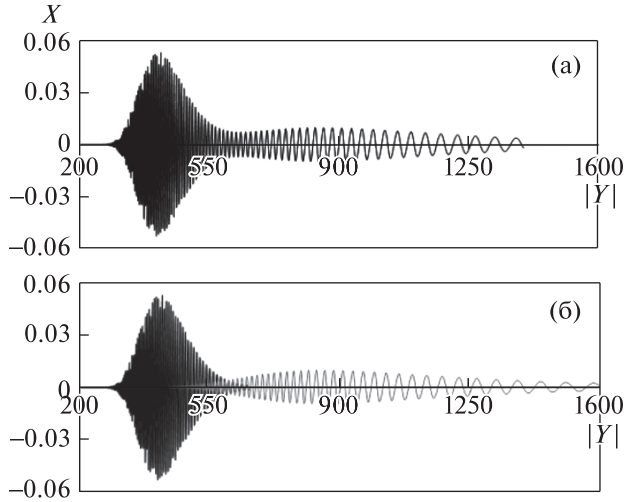

Рис. 5. Пакеты те же, что на рис. 2, но $\tau = 200$.

Используем термин “импульс” для того, чтобы отличать экспериментальные группы волн, описываемые в [7], от пакетов, определяемых уравнениями (6.2)–(6.3).

Цель работы [2] – выяснить, в какой мере результаты эксперимента подтверждают прогноз эволюции группы волн, полученный на основе асимптотики решенией (с ростом времени) уравнения Шредингера.

В работе [7] волновые импульсы генерировались волнопродуктором, колебавшимся с частотой 2.5 Гц; относительно медленная модуляция амплитуды несущего колебания обеспечивалась медленным периодическим смещением волнопродуктора. Максимум этого смещения (ход волнопродуктора) варьируется от 0.19 см до 1.5 см.

При сопоставлении профилей импульсов работы [7] с профилями пакетов, представленными здесь на рис. 2–6, нужно учесть, что в [7] импульсы записывались на некотором интервале времени в фиксированной точке лотка, и потому волны большей длины (меньшей частоты) приходят к волнографу первыми и находятся на левом участке профиля.

На рис. 2–6 показаны профили пакетов в фиксированный момент времени на некотором пространственном интервале, и потому волны большей длины находятся на правом конце профиля.

В [7] период волны подсчитывался по измеренному интервалу времени, отделяющего гребни и смежные впадины; другими словами, последовательно измерялись длительности полуволн. В [7] автор оперировал с величинами, обратными этим длительностям, и называет их частотами.

При ходе волнопродуктора в 0.19 см, амплитуда импульса достигала 1 мм; периоды волн в центре импульса равны периоду волны несущего колебания; периоды удаленных от центра волн могли отличаться на величины до 20% периода несущей. В [7] отмечается, что такое распределение периодов типично для импульсов малой амплитуды (амплитуда 6 мм считалась большой).

Волны переднего фронта импульса движутся быстрее волн центра, волны заднего фронта – медленнее.

Эти экспериментально обнаруженные в [7] свойства импульса присущи пакету (6.2), вплоть до количества волн (25) в момент $\tau = 100$ (рис. 4).

В [7] приведены записи 6 импульсов, отвечающих шести значениям хода волнопродуктора. При большом ходе волнопродуктора (в 0.4, 0.5, 0.6 дюймов; 1 дюйм = 2.54 см) импульсы на более поздней стадии эволюции распадаются на два пакета; длительности полуволн в разделяющихся пакетах изменяются нерегулярно, но, отмечается в [7], по-видимому, длительности полуволн в лидирующем пакете больше длительностей полуволн в пакете отстающем.

Этот экспериментальный результат – весомый аргумент в пользу нелинейной теории волновых пакетов.

На рис. 2–6 видны эффекты, аналогичные экспериментально обнаруженным в [7]: волны в лидирующем пакете длиннее, чем в отстающем; в области, где пакеты перекрываются, моменты времени их максимумов (и минимумов) не совпадают, и потому длительности полуволн смеси двух пакетов меняются нерегулярно.

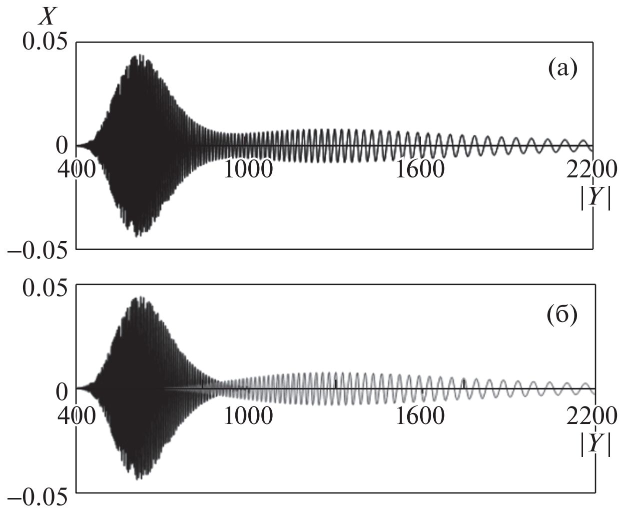

Рис. 6. Пакеты те же, что на рис. 2, но $\tau = 300$.

В [7] для импульса, генерируемого волнопродуктором при ходе 0.19 см, времени записи 10 с в точке, отстоящей от волнопродуктора на расстоянии 8.4 м, не указаны ни длина импульса, ни время пробега от волнопродуктора до волнографа. Оценим эти параметры, используя линейную теорию. Согласно теории групповая скорость волнового пакета с несущей частотой 2.5 Гц равна 0.31 м/с, что позволяет оценить длину импульса $0.31\ \text{м/с} \times 10\ \text{с} = 3.1$ м и время пробега от волнопродуктора до волнографа как 27.5 с. Отношение дистанции $D = 8.4$ м к длине импульса не превосходит 3.

Эти оценки вполне согласуются с оценками, полученными в трех примерах разд. 7.

В работе [2] волновые импульсы генерировались волнопродуктором на одном конце лабораторного лотка и двигались вдоль лотка к его противоположному концу. Волны записывались шестью волнографами, датчики которых располагались на расстояниях 5, 10, 15, 20, 25 и 30 футов от волнопродуктора (1 фут = 30.48 см); частота волнопродуктора – 2 Гц.

В [2] показана эволюция огибающей импульсов в случаях А, Б, В, соответствующих трем вариантам начальной формы огибающей: солитон А, гиперболический секанс Б, дуга синусоиды В; на конце лотка обеспечивались условия неотражения (ставилась поглощающая волны отмель).

В случае А за время наблюдения изменения формы огибающей (на рисунке) не обнаруживаются. В случаях Б и В исходный волновой пакет с одной вершиной за время наблюдения превращается в структуру, состоящую из “высокого” одновершинного пакета, следующего за “низким” одновершинным пакетом, и относительно длинных цепочек волн весьма малой амплитуды на переднем и заднем фронтах системы двух пакетов.

Комментируя этот рисунок, авторы [2] полагают, что случай А говорит в пользу существования солитонов, случаи Б и В демонстрируют распад группы волн на солитоны.

В тексте работы [2] не указаны ни размеры огибающей пакетов, ни отношение вертикальных масштабов к горизонтальным, ни время наблюдения.

Только для начального профиля с солитоном огибающей (случай А) имеется возможность получить представление о соотношении вертикального и горизонтального масштабов рисунка.

Форма солитона огибающей описывается уравнением

$$x(s) = a/\mathrm{ch}u, \quad u = \sqrt{2}k^2as, \quad u = \sqrt{2}(ka)^2 s/a,$$

где $s = 0$ – вертикальная ось симметрии солитона, a – начальная высота солитона; в случае А задано значение $(ka) \approx 0.14$; при $u = 0.882$ достигается максимум острого угла между горизонтальной осью и касательной к огибающей; точка, в которой достигается этот максимум, имеет координаты $s = 32a$, $x = 0.7a$; ширина солитона на уровне этой точки, т.е. на уровне 0.7 его высоты, в 46 раз превосходит эту высоту.

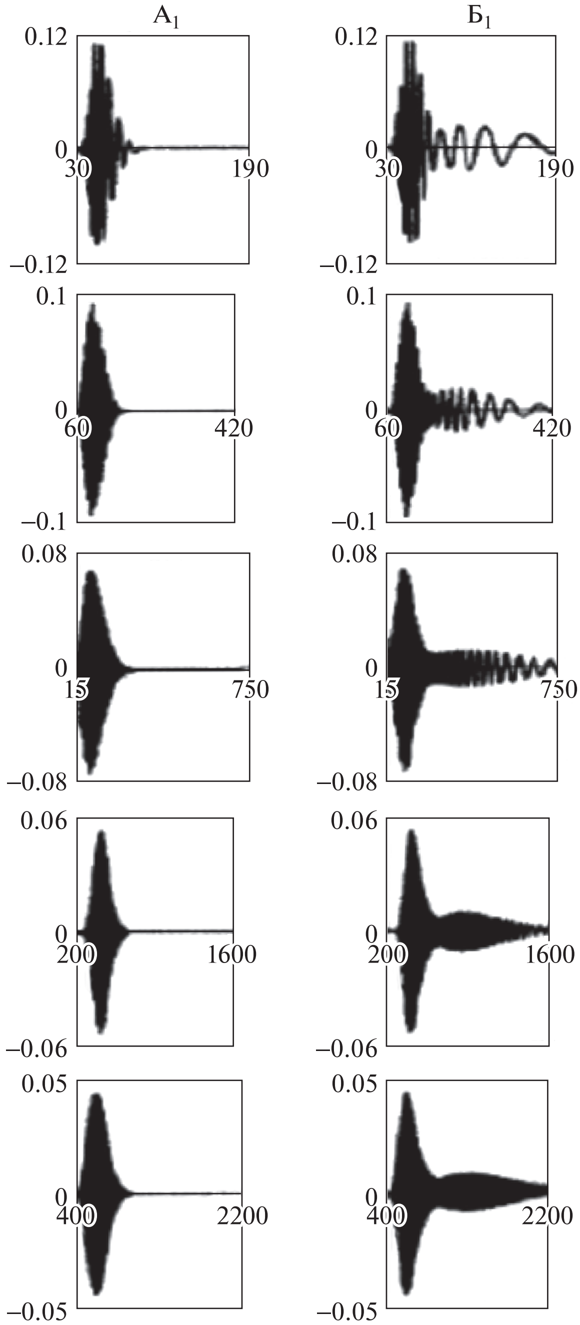

Рис. 7. То же, что на рис. 2–6 (сверху вниз) при $\tau = 25$, $\tau = 50$, $\tau = 100$, $\tau = 200$, $\tau = 300$ соответственно, но при уменьшенном горизонтальном масштабе. Столбец A_1: профили пакета (6.2); столбец $Б_1$: профили пакета (6.1)

Но на рисунке в [2] в случае А в начальный момент отношение ширины импульса к 0.7 его высоты не превосходит 0.2, что примерно в 250 раз больше аналогичного отношения для солитона.

На рис. 7 показаны те же профили, что на рис. 2–6, но в более мелком горизонтальном масштабе.

Столбец A_1 демонстрирует возможности масштабирования: видимые на рисунке высота и ширина огибающей почти не меняются с ростом τ.

Последовательность представленных в [2] профилей огибающей в случае Б и профили на рис. 7 в случае $Б_1$ аналогичны.

На рис. 2 при $\tau = 25$ высота пакета (6.2) равна 0.114, ширина пакета на уровне 0.7 высоты равна 6.6; эта ширина превосходит высоту в 60 раз (почти как у солитона огибающей с $ka = 0.10$.

Но в отличие от солитона огибающей, со временем ширина пакета (6.2) растет, его высота убывает (рис. 2–6); на этих же рисунках профили (а) иллюстрируют формирование цепочки более длинных волн малой аплитуды, опережающих пакет (6.2).

Приведем оценки параметров волн, наблюдавшихся в [2]: частота волнопродуктора $f_0 = 2$ Гц $= 4\pi c^{-1}$, длина волны $l = 0.39$ м, дистанция, пройденная каждой группой волн $D = 9.14$ м, на этой дистанции укладывается $n = D/l = 9.14/0.39 \approx 23{-}24$ волны, групповая скорость волн $v = 0.39$ м/с, длительность прохождения дистанции группой волн $t = 23.4$ с.

Время записи импульсов одним волнографом, длина импульса, отношение длины дистанции к длине импульса не указаны. Надо полагать, что это отношение близко к 3, поскольку оценки для импульса в [2] близки к соответствующим параметрам импульса в [7]. При таком отношении и медленном изменении параметров пакета применение асимптотических утверждений теории слабонелинейных волн не кажется убедительным.

Сходство между экспериментальными профилями импульсов в [7] и теоретическими профилями на рис. 2–6, между экспериментальными профилями огибающих в [2] и теоретическими профилями на рис. 7, согласие между теоретическими и экспериментальными оценками ряда параметров пакетов позволяют заключить, что профили, представленные на рис. 2–6, соответствуют (при указанных значениях параметра a) интервалам времени, сопоставимым со временем наблюдения импульсов в экспериментальном лотке.

9. СОПОСТАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ С ТЕОРИЕЙ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

Асимптотическое поведение решений уравнения Шредингера описано в [2] для случая, когда начальные условия достаточно быстро убывают с удалением от очага волн. Один из основных результатов гласит, что начальная группа волн с огибающей произвольной формы со временем распадается на совокупность финальных волновых пакетов, каждый с огибающей специфической формы, и осциллирующий "хвост". Количество финальных пакетов определяется начальными условиями. Огибающая каждого финального пакета является решением уравнения Шредингера. Огибающая каждого финального пакета не меняет форму, движется с постоянной скоростью и обладает свойствами солитонов, а именно: скорость этих пакетов и форма их огибающих сохраняются после их взаимодействия (отсюда термин "солитоны огибающей").

Распад группы волн на солитоны, движущиеся с разными скоростями, – это дисперсия. Сохранение формы солитона – это отсутствие дисперсии. Этот результат теории слабонелинейных волн явно противоречит теории линейных волн и, главное, поведению волн в реальной воде: даже длинные волны в открытом океане (длина волны порядка 100–150 км при глубине океана в 4–5 км) являются дисперсионными, как показывают их записи.

Нелинейная теория волновых пакетов также говорит о разложении на специфические пакеты; каждый пакет является решением уравнений ведущего приближения; количество пакетов зависит от начальных условий; упоминавшийся хвост – это смесь пакетов с большими номерами. В отличие от солитонов, любой специфический пакет подвержен дисперсии.

При экспериментах в лотке специфические пакеты с большими номерами могут интерпретироваться как солитоны огибающей: огибающая такого специфического пакета практически не меняет своей формы в течение времени прохождения по лотку.

10. СОПОСТАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ С ТЕОРИЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

Между теориями просматривается достаточно тесная связь.

а) В линейной теории предполагается, что амплитуда волны мала по сравнению с ее длиной [1]. Волны цунами в открытом океане заведомо удовлетворяют этому условию.

В теории пакетов предполагается, что высота волны мала по сравнению с горизонтальными размерами очага.

б) В обеих теориях скорость распространения волн ограничена, причем ограничения связаны с некоторыми линейными размерами.

В линейной теории в качестве единственного линейного размера выбрана глубина H жидкости, поэтому ограничение зависит от H: скорость синусоидальной волны не может превышать значения $\sqrt{gH}$.

В теории пакетов скорость волны максимального размаха любого пакета не превышает скорости волны максимального размаха пакета с номером 1, которая зависит от горизонтального размера очага волны (от параметра a).

Как и в линейной теории, оценки скоростей волн в пакете и их длин не зависят от его амплитуды.

в) В пределах указанных ограничений, скорость гармонической волны тем меньше, чем меньше ее длина.

Скорость пакета тем меньше, чем больше его номер, а чем больше номер пакета, тем меньше длины его волн (при одном и том же значении параметра a).

г) Группа гармонических волн, обладающих частотами, мало отличающимися от несущей частоты ω_0, движется с групповой скоростью, равной половине фазовой скорости синусоидальной волны частоты ω_0.

В рассмотренных примерах отношение средней скорости V_* волны максимальной высоты пакета (6.2) к ее мгновенной скорости v_* равно 1/2.

Расчеты по данным Курильского цунами 2007 г. [8] показывают, что для пакета с номером 1 отношение

$$\frac{V_*}{v_*} = \frac{1.22}{2.24} = 0.54$$

при любой длине волны (например, для волны длиной порядка 100 км).

д) Фазовая скорость v гармонической волны связана с длиной волны l соотношением

$$v^2(l) = \frac{gl}{2\pi}\operatorname{th}\frac{2\pi H}{l}, \qquad (10.1)$$

где H – постоянная глубина воды.

Групповая скорость синусоидальной волны равна фазовой.

Пусть длина гармонической волны равна $l = 117$ км, ее скорость равна $V = 792$ км/ч = 220 м/с (оценки параметров Курильского цунами 2007 г. по записям донных буев).

Подставим эти значения в (10.1) и получим

$$\operatorname{th}\frac{2\pi H}{l} = 0.259, \quad \frac{2\pi H}{l} = 0.27, \quad H = 5030 \text{ м},$$

что вполне соответствует глубинам Тихого океана, на которых расположены упомянутые донные буи.

Связь между теориями становится понятной, если учесть, что ведущие члены для потенциала скорости Φ и функции W удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + W = 0 \qquad (10.2)$$

где $\partial/\partial n$ обозначает частную производную в нормальном к свободной поверхности $x = W(\theta, t)$ направлении, которая вычисляется в точке на этой поверхности.

Уравнения (10.2) суть кинематическое и динамическое условия на свободной поверхности жидкости (разд. 1). Если эти условия перенести со свободной поверхности на равновесную плоскость $x = 0$, то нормальная производная заменяется выражением $\partial\Phi/\partial x|_{x=0}$, и уравнения (10.2) сводятся к уравнениям линейной теории волн бесконечно малой амплитуды.

Теории отличаются условиями на уходящей в бесконечность свободной поверхности жидкости. В теории пакетов требуется, чтобы скорость достаточно быстро убывала вдоль поверхности. В линейной теории требуется, чтобы скорость оставалась ограниченной. Чтобы на поверхности образовался пакет любого номера, источник возмущения должен сообщить жидкости конечную энергию; чтобы возбудить гармоническую волну, источник возмущения должен сообщить жидкости бесконечно большую энергию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тестирование подтверждает, что нелинейная теория волновых пакетов не противоречит результатам экспериментов, ее аналитические результаты адекватно описывают волны любой длины, если в области начального возмущения вертикальное смещение водной поверхности много меньше горизонтального размера этой области. Нелинейная теория волновых пакетов, с одной стороны, в пределе переходит в теорию волн линейных, а с другой стороны, она содержит утверждение, аналогичное (при всех количественных и качественных различиях) выводу теории слабонелинейных волн о распаде группы волн на невзаимодействующие пакеты, движущиеся с разными скоростями.

ПРИЛОЖЕНИЕ

КЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ σ, θ

В интеграле для потенциала скорости упоминаются точки P и Q; точка P имеет криволинейные координаты σ, θ, точка Q имеет координаты σ_1, θ_1 при $\sigma_1 = 0$.

Потенциал скорости в криволинейных координатах записывается как

$$\Phi(\sigma,\theta,t) = \frac{f}{|f|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \nu(\theta_1,t)A(\sigma,\sigma_1,\theta,\theta_1,t)\frac{d\theta_1}{R}\bigg|_{\sigma_1=0} \tag{П1}$$

где

$$A = (\sigma - \sigma_1 + W - W_1)(f - W_1) + \frac{\sigma - f + W}{\sigma_1 - f + W_1}\frac{\partial W_1}{\partial \theta_1}(\tan\theta\cdot\cos^2\theta_1 - \sin\theta_1\cdot\cos\theta_1)$$

$$R = (\sigma - \sigma_1 + W - W_1)^2\cos^2\theta_1 + [(\sigma - f + W)\tan\theta\cdot\cos\theta_1 - (\sigma_1 - f + W_1)\sin\theta_1]^2$$

$$W = W(\theta,t), W_1 = W(\theta_1,t)$$

Нелинейные уравнения (П 2) и (П 3) суть, соответственно, кинематическое условие на свободной поверхности жидкости и условие непрерывности давления на этой поверхности

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D_2\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_-} - D_1\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_-} \tag{П2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_-} - \frac{1}{2}D_2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_-}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(D\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_-}\right)^2 + W(\theta,t) = 0 \tag{П3}$$

$$D = \frac{\cos\theta}{W - f}, \quad D_1 = \left(\sin\theta + D\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)D$$

$$D_2 = 1 + (D_1 + D\sin\theta)\frac{\partial W}{\partial \theta}$$

Условия на бесконечности берутся в форме

$$|W(\theta,t)| < C(t)\cos^2\theta, \quad \lim_{\cos\theta\to 0}\frac{\partial W}{\partial \theta} = 0, \quad |\nu(\theta,t)| < C(t) \tag{П4}$$

Условия (П 4) гарантируют, что источник возмущения жидкости сообщает ей конечную энергию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика, Т. VI. Гидродинамика. М: Наука, 1986. 736 с.
2. *Yuen H.C., Lake B.M.* Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves// Advances in applied mechanics. Academic press: New York–London, 1982. V. 22. P. 67. (Рус. перевод: *Юэн Г., Лэйк Б.* Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М.: Мир, 1987. 179 с.)
3. *Миндлин И.М.* Интегродифференциальные уравнения в динамике тяжелой слоистой жидкости. М.: Наука, 1996. 304 с.
4. *Миндлин И.М.* Нелинейные волны в тяжелой двухслойной жидкости, порождаемые начальным возмущением горизонтальной границы раздела: точное решение // Изв. АН СССР. МЖГ. 1995. № 6. С. 165–168.
5. *Mindlin I.M.* Nonlinear waves in two-dimensions generated by variable pressure acting on the free surface of a heavy liquid // J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). 2004. V. 55. P. 781–799.
6. *Mindlin I.M.* Deep-water gravity waves: nonlinear theory of wave groups, 30 p., 6 Jun. 2014. http://arxiv.org/abs/1406.1681
7. *Feir J.E.* 1967 Discussion: Some results from wave pulse experiments// A discussion on nonlinear theory of wave propagation in dispersive systems. Proc. R. Soc. Lond. V. 299, 1967. P. 54–58. (Рус. перевод: *Фейр Дж.* Обсуждение. Некоторые результаты опытов с волновыми импульсами// Нелинейная теория распространения волн. М: Мир, 1970. С. 77–82.)
8. *Mindlin I.M.* Two Kuril tsunamis and analytical long wave theory, 16 p. 31 Aug 2018. http://arxiv.org/abs/1809.00987