

УДК 532.59:539.3

КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРА В ЖИДКОСТИ ПОД ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ ВБЛИЗИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКИ

© 2020 г. Л. А. Ткачева*

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

**E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru*

Поступила в редакцию 11.12.2019 г.

После доработки 17.12.2019 г.

Принята к публикации 17.12.2019 г.

Получено решение задачи о колебаниях кругового цилиндра в жидкости конечной глубины под ледяным покровом вблизи вертикальной стенки. Ледяной покров моделируется тонкой упругой полубесконечной пластиной постоянной толщины. Рассмотрены различные граничные условия на кромке пластины: свободный край и защемленный. Исследованы коэффициенты присоединенных масс и демпфирования, амплитуды прогиба и деформаций ледяного покрова, сил, действующих на стенку, в зависимости от частоты колебаний и входных параметров задачи.

Ключевые слова: тонкая упругая плавающая пластина, изгибно-гравитационные волны, преобразование Фурье, мультиполи, метод отражения, присоединенные массы, коэффициент демпфирования

DOI: 10.31857/S0568528120030135

Исследованию взаимодействия волн в жидкости с плавающими телами и конструкциями посвящено большое количество работ. Широкий круг математических методов решения таких задач содержится в [1]. В последнее время в связи с освоением полярных районов интерес вызывают задачи о взаимодействии волн с погруженными телами при наличии ледяного покрова. Методы, изложенные в [1], применимы и к этим задачам. Достаточно хорошо изучены задачи о колебаниях тел цилиндрической или сферической формы под бесконечным ледяным покровом. Обзор полученных результатов можно найти в работе [2]. Позднее появились работы [3–10]. В [3–6] для построения решения использован метод разложения потенциала по мультиполям – потенциалам, удовлетворяющим уравнению Лапласа и всем граничным условиям, кроме условий на теле. Ранее аналогичные мультиполи были введены для случая жидкости со свободной поверхностью [7]. В работах [8, 9] изучено движение диполя в жидкости под ледяным покровом, моделирующего движение тела. Движение подводной лодки в жидкости под ледяным покровом моделировалось с помощью системы источников и стоков в [10].

Однако в действительности ледяной покров может быть неоднородным. Он может покрывать не всю поверхность жидкости, могут быть трещины, полыньи. Влияние таких неоднородных условий на верхней границе изучалось в работах [11–19] для цилиндрического тела. В [11–14] использовался метод граничных интегральных уравнений, при этом в [11–13] функция Грина строилась методом сращивания разложений по собственным функциям, а в [14] методом Винера–Хопфа. Метод сращивания разложений по собственным функциям использован в [15] для построения решения о колебаниях цилиндрического прямоугольного тела в полынье между двумя полубесконечными ледяными пластинами. Решение задачи о колебаниях в полынье цилиндрического тела произвольной формы сечения приведено в [16] с помощью гибридного метода сращивания разложений и граничных элементов. В работе [17] в приближении широкой полыньи получено решение той же задачи на основе решений для полыньи без тела и плавающего тела без льда. Для кругового цилиндра под ледяным покровом с трещиной решение найдено в [18] с помощью мультипольных разложений. В этой работе построена функция Грина, удовлетворяющая краевым условиям на верхней и нижней границах жидкости в виде интеграла, и мультиполи получены дифференцированием функции Грина. В работе [19] приведено решение задачи о колебаниях тела в жидкости под ледяным покровом с многими трещинами, произвольно располо-

женными. Получена функция Грина, удовлетворяющая всем краевым условиям на верхней и нижней границах, условие на теле выполняется с помощью метода граничных интегральных уравнений. Нелинейный эффект движения тела в полынне изучался в [20] с помощью мультипольных разложений.

Взаимодействие изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове с вертикальной стенкой (без погруженного тела) при различных краевых условиях на кромке, для неподвижной и колеблющейся стенки, изучалось в работах [21–23] с помощью преобразования Фурье. В [21] решение получено двумя методами, во втором методе используется интегральное уравнение первого рода.

В настоящей работе приведено решение задачи о колебаниях кругового цилиндра в жидкости под ледяным покровом при наличии неподвижной вертикальной стенки. Используются метод мультипольных разложений, метод отражения. Для выполнения условий в кромке ледяного покрова используется преобразование Фурье, однако способ получения решения отличается от предложенных в [21–23].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ледяной покров моделируется упругой полубесконечной пластиной постоянной толщины h . Жидкость полагается идеальной несжимаемой, имеющей глубину H . Рассматриваются колебания жидкости и пластины при заданных колебаниях погруженного цилиндра с заданной частотой ω . Задача решается в линейном приближении и двумерной постановке. Введем декартову систему координат Oxy с центром O на верхней границе жидкости, осью Ox , перпендикулярной стенке, осью Oy , направленной вдоль стенки вертикально вниз. Пластина занимает область $x > 0$. Цилиндр радиуса a с центром в точке (x_0, y_0) , $a < x_0, a < y_0$ совершает поступательные колебания с амплитудами A_j , $j = 1, 2$ вдоль декартовых осей. Введем также цилиндрические координаты (r, θ)

$$x = x_0 + r \sin \theta, \quad y = y_0 + r \cos \theta, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Потенциал течения жидкости $\varphi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1)$$

Колебания пластины описываются уравнениями изгиба тонких упругих пластин Кирхгофа–Лява

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -p, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (1.2)$$

$$p = -\rho(\varphi_t - gw) \quad (1.3)$$

где $w(x)$ – нормальный прогиб пластины, ρ_0, ρ – плотности льда и жидкости, p – гидродинамическое давление, g – ускорение свободного падения, D – цилиндрическая жесткость пластины, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, t – время.

Осадка пластины в воду не учитывается. Граничные условия на верхней границе жидкости сносятся на плоскость $y = 0$. Предполагается, что вся нижняя поверхность пластины находится в контакте с жидкостью, отрыва не происходит. Тогда выполнено кинематическое соотношение

$$w_t = \partial \varphi / \partial y \quad (y = 0) \quad (1.4)$$

Потенциал течения жидкости можно представить в виде суммы по степеням свободы

$$\varphi(x, y, t) = \operatorname{Re} \left(-i\omega a \sum_{j=1}^2 A_j \varphi_j(x, y) \exp(-i\omega t) \right)$$

где каждый потенциал φ_j удовлетворяет уравнению Лапласа (1.1). Введем также безразмерные переменные и параметры

$$(x', y', a', x'_0, y'_0, H') = (x, y, a, x_0, y_0, H)/a, \quad \beta = \frac{D}{\rho g a^4}, \quad \lambda = \omega \sqrt{a/g}, \quad \delta = \frac{\rho_0 h \omega^2}{\rho g}$$

Штрихи далее будем опускать. Из (1.2)–(1.4) получаем для каждого потенциала ϕ_j условие на верхней границе в виде

$$\left(\beta \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1 - \delta\right) \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + \lambda^2 \phi_j = 0 \quad (1.5)$$

На дне, на стенке и цилиндре ставятся условия непротекания

$$\partial \phi_j / \partial y = 0 \quad (y = H), \quad \partial \phi_j / \partial x = 0 \quad (x = 0) \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial r} = n_j \quad (r = 1) \quad (1.7)$$

где $(n_1, n_2) = (n_x, n_y) = (\sin \theta, \cos \theta)$. Граничные условия на кромке пластины в случае свободного края имеют вид

$$\frac{\partial^3 \phi_j}{\partial x^2 \partial y} (0, 0) = \frac{\partial^4 \phi_j}{\partial x^3 \partial y} (0, 0) = 0 \quad (1.8)$$

в случае заземленного края

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial y} (0, 0) = \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} (0, 0) = 0 \quad (1.9)$$

На бесконечности ставится условие излучения (условие отсутствия приходящих волн).

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для построения решения будем использовать метод отражения. Вводим еще один цилиндр с центром в точке $(-x_0, y_0)$, который колеблется таким образом, что его центр находится на одинаковом расстоянии от стенки, что и исходный цилиндр. Таким образом, отраженный цилиндр колеблется с амплитудами $-A_1, A_2$ по осям x, y . Вводим цилиндрические координаты (r_1, θ_1) , связанные с этим цилиндром,

$$x = -x_0 + r_1 \sin \theta_1, \quad y = y_0 + r_1 \cos \theta_1, \quad r_1 = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Используя результаты работ [1, 7, 24], каждый из потенциалов ϕ_j можно записать в виде разложения по мультиполям – функциям, которые удовлетворяют уравнению Лапласа и всем граничным условиям, кроме условия (1.7) на поверхности цилиндра. Для кругового цилиндра с центром в точке (x_0, y_0) в жидкости под бесконечным ледяным покровом в отсутствие стенки мультиполи имеют вид

$$\phi_n^c = \frac{\cos(n\theta)}{r^n} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty [A(k) \operatorname{sh}(ky) + B_c(k) \operatorname{ch}(k(H-y))] k^{n-1} \cos(k(x-x_0)) dk$$

$$\phi_n^s = \frac{\sin(n\theta)}{r^n} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty [A(k) \operatorname{sh}(ky) + B_s(k) \operatorname{ch}(k(H-y))] k^{n-1} \sin(k(x-x_0)) dk$$

$$A(k) = \frac{\exp(k(y_0 - H))}{\operatorname{ch}(kH)},$$

$$B_c(k) = \frac{(\beta k^4 + 1 - \delta) k \exp(k(y_0 - H)) / \operatorname{ch}(kH)}{(\beta k^4 + 1 - \delta) k \operatorname{sh}(kH) - \lambda^2 \operatorname{ch}(kH)} + \frac{(-1)^n ((\beta k^4 + 1 - \delta) k + \lambda^2) \exp(-ky_0)}{(\beta k^4 + 1 - \delta) k \operatorname{sh}(kH) - \lambda^2 \operatorname{ch}(kH)}$$

$$B_s(k) = \frac{(\beta k^4 + 1 - \delta) k \exp(k(y_0 - H)) / \operatorname{ch}(kH)}{(\beta k^4 + 1 - \delta) k \operatorname{sh}(kH) - \lambda^2 \operatorname{ch}(kH)} - \frac{(-1)^n ((\beta k^4 + 1 - \delta) k + \lambda^2) \exp(-ky_0)}{(\beta k^4 + 1 - \delta) k \operatorname{sh}(kH) - \lambda^2 \operatorname{ch}(kH)}$$

Функции ϕ_n^c, ϕ_n^s удовлетворяют уравнению (1.1), условию (1.5) и первому из условий (1.6). Второе из условий (1.6) будет удовлетворяться с помощью метода отражения. Для удовлетворения условий на кромке пластины нужно к этим потенциалам добавить дополнительные потенци-

алы Ψ_n^c, Ψ_n^s . Используя симметрию относительно оси Ox , представим каждый из потенциалов Φ_j в виде

$$\begin{aligned}\Phi_j &= \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(\Phi_n^c + \Psi_n^c) + b_n(\Phi_n^s + \Psi_n^s)] \\ \Phi_n^c &= \frac{\cos(n\theta)}{r^n} + \frac{\cos(n\theta_1)}{r_1^n} + \\ &+ \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} [A(k)\text{sh}(ky) + B_c(k)\text{ch}(k(H-y))] k^{n-1} [\cos(k(x-x_0)) + \cos(k(x+x_0))] dk \\ \Phi_n^s &= \frac{\sin(n\theta)}{r^n} - \frac{\sin(n\theta_1)}{r_1^n} + \\ &+ \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} [A(k)\text{sh}(ky) + B_s(k)\text{ch}(k(H-y))] k^{n-1} [\sin(k(x-x_0)) - \sin(k(x+x_0))] dk\end{aligned}$$

Здесь a_n, b_n – коэффициенты разложения, которые необходимо найти из условия (1.7).

Потенциалы Ψ_n^c, Ψ_n^s должны удовлетворять уравнению (1.1), условиям (1.5), (1.6) и вместе с функциями Φ_n^c, Φ_n^s условиям в кромке пластины (1.8) или (1.9). Приведем далее построение дополнительных потенциалов, опуская для краткости индексы. Применяем преобразование Фурье

$$\Psi(k, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx)\psi(x, y)dx$$

Из уравнения (1.1) и первого условия (1.6) следует

$$\Psi(k, y) = C(k)\text{ch}(k(H-y))/\text{ch}(kH)$$

Для функции

$$u(x) = \partial\Psi/\partial y(x, 0) \quad (2.1)$$

справедливо уравнение

$$\left(\beta \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1 - \delta \right) u = -\lambda^2 \psi(x, 0) \quad (2.2)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(x) = C_1 \exp(i\kappa_1 x) + C_2 \exp(i\kappa_2 x) + u_0(x) \quad (2.3)$$

Здесь первые два члена представляют решение однородного уравнения, κ_1 и κ_2 являются корнями уравнения

$$\beta\kappa^4 + 1 - \delta = 0$$

лежащими в верхней полуплоскости, $\kappa_2 = -\bar{\kappa}_1$, $u_0(x)$ – частное решение уравнения (2.2). Для образа Фурье $U_0(k)$ функции $u_0(x)$ из уравнения (2.2) получаем

$$(\beta k^4 + 1 - \delta)U_0(k) = -\lambda^2 C(k), \quad U_0(k) = -\frac{\lambda^2 C(k)}{\beta k^4 + 1 - \delta} \quad (2.4)$$

Из уравнений (2.1), (2.3), (2.4) находим

$$C_1 \frac{2i\kappa_1}{\kappa_1^2 - k^2} + C_2 \frac{2i\kappa_2}{\kappa_2^2 - k^2} - \frac{\lambda^2 C(k)}{\beta k^4 + 1 - \delta} = -C(k)k\text{th}(kH)$$

Отсюда

$$C(k) = 2 \frac{\beta k^4 + 1 - \delta}{K(k)} \left(C_1 \frac{i\kappa_1}{k^2 - \kappa_1^2} + C_2 \frac{i\kappa_2}{k^2 - \kappa_2^2} \right)$$

$$U_0(k) = -\frac{2\lambda^2}{K(k)} \left(C_1 \frac{i\kappa_1}{k^2 - \kappa_1^2} + C_2 \frac{i\kappa_2}{k^2 - \kappa_2^2} \right)$$

$K(k)$ – дисперсионная функция изгибно-гравитационных волн в жидкости под пластиной

$$K(k) = (\beta k^4 + 1 - \delta)k \operatorname{th}(kH) - \lambda^2$$

Известно, что она имеет два действительных корня $\pm k_0$, четыре комплексных корня $\pm k_{-1}$, $\pm k_{-2}$, $k_{-2} = -\bar{k}_{-1}$ и счетное множество мнимых корней $\pm k_j$, $j = 1, 2, \dots$. Применяя обратное преобразование Фурье, находим с помощью метода вычетов

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 2\lambda^2 \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\exp(ik_j x)}{K'(k_j)} \left(C_1 \frac{\kappa_1}{k_j^2 - \kappa_1^2} + C_2 \frac{\kappa_2}{k_j^2 - \kappa_2^2} \right) - C_1 \exp(i\kappa_1 x) - C_2 \exp(i\kappa_2 x) \\ u(x) &= 2\lambda^2 \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\exp(ik_j x)}{K'(k_j)} \left(C_1 \frac{\kappa_1}{k_j^2 - \kappa_1^2} + C_2 \frac{\kappa_2}{k_j^2 - \kappa_2^2} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подставляем выражение (2.5) в условия на кромке и получаем систему уравнений для определения коэффициентов C_1 , C_2

$$\sum_{j=1}^2 A_{ij} C_j = B_i \quad (2.6)$$

В случае закрепленного края коэффициенты матрицы системы и правой части имеют вид

$$\begin{aligned} A_{11} &= 2\lambda^2 \kappa_1 \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{1}{K'(k_j)(k_j^2 - \kappa_1^2)}, & A_{12} &= 2\lambda^2 \kappa_2 \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{1}{K'(k_j)(k_j^2 - \kappa_2^2)} \\ A_{21} &= 2\lambda^2 \kappa_1 \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{k_j}{K'(k_j)(k_j^2 - \kappa_1^2)}, & A_{22} &= 2\lambda^2 \kappa_2 \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{k_j}{K'(k_j)(k_j^2 - \kappa_2^2)} \\ B_1 &= -\partial\varphi/\partial y(0,0), & B_2 &= 0 \end{aligned}$$

Для пластины со свободным краем

$$\begin{aligned} A_{11} &= -2\lambda^2 \kappa_1 \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{k_j^2}{K'(k_j)(k_j^2 - \kappa_1^2)}, & A_{12} &= -2\lambda^2 \kappa_2 \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{k_j^2}{K'(k_j)(k_j^2 - \kappa_2^2)} \\ A_{21} &= 2\lambda^2 \kappa_1 \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{k_j^3}{K'(k_j)(k_j^2 - \kappa_1^2)}, & A_{22} &= 2\lambda^2 \kappa_2 \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{k_j^3}{K'(k_j)(k_j^2 - \kappa_2^2)} \\ B_1 &= -\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y}(0,0), & B_2 &= 0 \end{aligned}$$

Коэффициенты A_{21} и A_{22} можно вычислить точно, применяя прием, который использовался ранее в работе [25]. Используя теорию вычетов, запишем ряд в виде интеграла. Затем замыкая его сначала в верхней, затем в нижней полуплоскости, преобразуем ряд через вычеты в точках, соответствующих корням полинома, стоящего в знаменателе. В случае закрепленной пластины

$$\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{k_j}{K'(k_j)(k_j^2 - \kappa_1^2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k dk}{K(k)(k^2 - \kappa_1^2)} + \frac{1}{2\lambda^2} = -\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{k_j}{K'(k_j)(k_j^2 - \kappa_1^2)} + \frac{1}{\lambda^2}$$

Отсюда находим

$$\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{k_j}{K'(k_j)(k_j^2 - \kappa_1^2)} = \frac{1}{2\lambda^2}, \quad A_{21} = \kappa_1, \quad A_{22} = \kappa_2, \quad C_1 \kappa_1 + C_2 \kappa_2 = 0$$

Таким образом, система (2.6) решается явно. После преобразований находим

$$C_1 \kappa_1 4i \lambda^2 \sqrt{\beta(1-\delta)} Q = B_1, \quad Q = \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{1}{K'(k_j)(\beta k_j^4 + 1 - \delta)}$$

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikx) C(k) \operatorname{ch}(k(H-y)) dk}{\operatorname{ch}(kH)} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0) \frac{1}{\lambda^2 Q} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\exp(ik_j x) \operatorname{ch} k_j (H-y)}{K'(k_j) \operatorname{ch}(k_j H)}$$

В случае пластины со свободным краем находим

$$\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{k_j^3}{K'(k_j)(k_j^2 - \kappa_1^2)} = \frac{\kappa_1^2}{2\lambda^2}, \quad A_{21} = \kappa_1^3, \quad A_{22} = \kappa_2^3, \quad C_1 \kappa_1^3 + C_2 \kappa_2^3 = 0$$

Из первого уравнения системы получаем

$$-4\beta^{3/4} (1-\delta)^{1/4} \lambda^2 C_1 \exp(i\pi/4) Q_1 = B_1, \quad Q_1 = \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{k_j^4}{K'(k_j)(\beta k_j^4 + 1 - \delta)}$$

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikx) C(k) \operatorname{ch}(k(H-y)) dk}{\operatorname{ch}(kH)} = -\frac{\varphi_{xy}(0, 0)}{\lambda^2 Q_1} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\exp(ik_j x) \operatorname{ch} k_j (H-y)}{K'(k_j) \operatorname{ch}(k_j H)}$$

В силу симметрии на стенке при $x = 0, y = 0$ имеем

$$r = r_1 = r_* = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \theta = \theta_* = \pi + \operatorname{arctg}(x_0/y_0), \quad \theta_1 = 2\pi - \theta_*$$

$$\frac{\partial \varphi_n^c}{\partial y}(0, 0) = -2n \frac{\cos(n+1)\theta_*}{r_*^{n+1}} + \frac{2}{(n-1)!} \int_0^{\infty} [A(k) - B_c(k) \operatorname{sh}(kH)] k^n \cos(kx_0) dk$$

$$\frac{\partial \varphi_n^s}{\partial y}(0, 0) = -2n \frac{\sin(n+1)\theta_*}{r_*^{n+1}} - \frac{2}{(n-1)!} \int_0^{\infty} [A(k) - B_s(k) \operatorname{sh}(kH)] k^n \sin(kx_0) dk$$

$$\frac{\partial^3 \varphi_n^c}{\partial x^2 \partial y}(0, 0) = 2n(n+1)(n+2) \frac{\cos(n+3)\theta_*}{r_*^{n+3}} - \frac{2}{(n-1)!} \int_0^{\infty} [A(k) - B_c(k) \operatorname{sh}(kH)] k^{n+2} \cos(kx_0) dk$$

$$\frac{\partial^3 \varphi_n^s}{\partial x^2 \partial y}(0, 0) = 2n(n+1)(n+2) \frac{\sin(n+3)\theta_*}{r_*^{n+3}} + \frac{2}{(n-1)!} \int_0^{\infty} [A(k) - B_s(k) \operatorname{sh}(kH)] k^{n+2} \sin(kx_0) dk$$

Чтобы удовлетворить условию (1.7), необходимо все функции выразить в цилиндрических координатах исходного цилиндра. Имеем

$$\cos k(x + x_0) = \cos k(x - x_0) \cos 2kx_0 - \sin k(x - x_0) \sin 2kx_0$$

$$\sin k(x + x_0) = \sin k(x - x_0) \cos 2kx_0 + \cos k(x - x_0) \sin 2kx_0$$

Аналогично тому, как изложено в [1], преобразуем выражения и раскладываем в ряд Тейлора

$$\exp(\pm k(y - y_0)) \cos k(x - x_0) = \operatorname{Re} \exp(\pm kr \exp(\pm i\theta)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\pm kr)^m \cos m\theta}{m!}$$

$$\exp(\pm k(y - y_0)) \sin k(x - x_0) = \operatorname{Im} \exp(\pm kr \exp(\pm i\theta)) = \operatorname{Im} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\pm kr)^m \exp(\pm im\theta)}{m!} = \pm \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\pm kr)^m \sin m\theta}{m!}$$

Введем комплексную переменную $z = x + iy$

$$z = z_0 + r \exp(i(\pi/2 - \theta)) = z_1 + r_1 \exp(i(\pi/2 - \theta_1))$$

Рассмотрим аналитическую функцию

$$f_n(z) = \frac{i^n}{(z - z_1)^n} = \frac{\exp(in\theta_1)}{r_1^n}$$

Представим ее в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0

$$f_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^m f_n}{dz^m} \Big|_{z=z_0} \frac{(z-z_0)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n+m-1)!}{m!(n-1)!(2x_0)^{n+m}} r^m \exp(i(n+m)\pi/2 - m\theta)$$

Отсюда находим

$$\frac{\cos n\theta_1}{r_1^n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n+m-1)!}{m!(n-1)!(2x_0)^{n+m}} r^m \cos((n+m)\pi/2 - m\theta)$$

$$\frac{\sin n\theta_1}{r_1^n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n+m-1)!}{m!(n-1)!(2x_0)^{n+m}} r^m \sin((n+m)\pi/2 - m\theta)$$

Таким образом, для каждого из потенциалов φ_j получаем выражение

$$\begin{aligned} \varphi_j = & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \left[\frac{\cos n\theta}{r^n} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n+m-1)! r^m}{m!(n-1)!(2x_0)^{n+m}} \cos((n+m)\pi/2 - m\theta) + \right. \right. \\ & + \frac{1}{2(n-1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^m \cos m\theta}{m!} \int_0^{\infty} (1 + \cos 2kx_0) [A(k)(\exp(ky_0) - (-1)^m \exp(-ky_0)) + \\ & + B_c(k)(\exp(k(H-y_0))(-1)^m + \exp(k(y_0-H)))] k^{n+m-1} dk - \\ & - \frac{1}{2(n-1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^m \sin m\theta}{m!} \int_0^{\infty} \sin 2kx_0 [A(k)(\exp(ky_0) + (-1)^m \exp(-ky_0)) + \\ & + B_c(k)(\exp(k(y_0-H)) - (-1)^m \exp(k(H-y_0)))] k^{n+m-1} dk + \psi_n^c \left. \right\} + \\ & + b_n \left[\frac{\sin n\theta}{r^n} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n+m-1)! r^m}{m!(n-1)!(2x_0)^{n+m}} \sin((n+m)\pi/2 - m\theta) + \right. \\ & + \frac{1}{2(n-1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^m \sin m\theta}{m!} \int_0^{\infty} (1 - \cos 2kx_0) [A(k)(\exp(ky_0) + (-1)^m \exp(-ky_0)) + \\ & + B_s(k)(\exp(k(y_0-H)) - (-1)^m \exp(k(H-y_0)))] k^{n+m-1} dk - \\ & - \frac{1}{2(n-1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^m \cos m\theta}{m!} \int_0^{\infty} \sin 2kx_0 [A(k)(\exp(ky_0) - (-1)^m \exp(-ky_0)) + \\ & + B_s(k)(\exp(k(y_0-H)) + (-1)^m \exp(k(H-y_0)))] k^{n+m-1} dk + \psi_n^s \left. \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

В случае закрепленной пластины (опуская верхние индексы)

$$\begin{aligned} \psi_n = & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}(0,0) \frac{1}{2Q\lambda^2} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\exp(ik_j x_0)}{K'(k_j) \operatorname{ch} k_j H} \left[\exp(k_j(H-y_0)) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-k_j r)^m \exp(-im\theta)}{m!} + \right. \\ & \left. + \exp(k_j(y_0-H)) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k_j r)^m \exp(im\theta)}{m!} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

В случае пластины со свободным краем

$$\begin{aligned} \psi_n = & -\frac{\partial^3 \varphi_n}{\partial x^2 \partial y}(0,0) \frac{1}{2Q_1 \lambda^2} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{k_j^2 \exp(ik_j x_0)}{K'(k_j) \operatorname{ch} k_j H} \left[\exp(k_j(H-y_0)) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-k_j r)^m \exp(-im\theta)}{m!} + \right. \\ & \left. + \exp(k_j(y_0-H)) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k_j r)^m \exp(im\theta)}{m!} \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставляем выражения (2.7)–(2.9) в уравнение (1.7), умножая на функции $\cos(l\theta)$, $\sin(l\theta)$ и интегрируя по θ , получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_n , b_n . Для случаев вертикальных и горизонтальных колебаний цилиндра матрица системы одна и та же, отличается только правая часть. Система решалась методом редукции.

После решения системы находим гидродинамические силы, действующие на колеблющийся цилиндр

$$F_i = \int_S p n_i ds = -\rho \int_S \varphi_i n_i ds = \rho \omega^2 a^2 \sum_{j=1}^2 \tau_{ij} A_j, \quad i = 1, 2$$

$$\tau_{ij} = \int_0^{2\pi} \varphi_j n_i d\theta = \mu_{ij} + \frac{i}{\omega} \sigma_{ij}$$
(2.10)

где S – поверхность цилиндра, μ_{ij} , σ_{ij} – коэффициенты присоединенных масс и демпфирования. Учитывая уравнения системы при $l = 1$, получаем

$$\tau_{11} = \pi(2b_1/a - a), \quad \tau_{12} = 2\pi b_1/a, \quad \tau_{21} = 2\pi a_1/a, \quad \tau_{22} = \pi(2a_1/a - a)$$

Для коэффициентов демпфирования справедливы соотношения эквивалентности, связывающие их с амплитудами генерируемых волн в дальнем поле. Имеем в силу условий (1.7)

$$\tau_{ij} - \tau_{ji} = \int_S \left(\varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \right) ds$$
(2.11)

где S – поверхность цилиндра. С помощью тождества Грина интеграл по поверхности тела можно преобразовать в интеграл по всей остальной поверхности, ограничивающей жидкость. При этом интегралы по дну и по стенке обращаются в нуль в силу условий непротекания, на верхней границе из условий (1.5), (1.8), (1.9). При $x \rightarrow \infty$ потенциалы можно представить в виде

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_j = R_j \exp(ik_0 x) \frac{\text{ch} k_0 (H - y)}{\text{ch} k_0 H}$$
(2.12)

$$R_j = \frac{2i\pi\lambda^2}{\text{sh}(k_0 H) K'(k_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_0^{n-1}}{(n-1)!} [a_n \cos(k_0 x_0) (\exp(k_0(y_0 - H)) + (-1)^n \exp(k_0(H - y_0))) - b_n \sin(k_0 x_0) (\exp(k_0(y_0 - H)) - (-1)^n \exp(k_0(H - y_0)))] + R_{j1}, \quad j = 1, 2$$
(2.13)

В случае закрепленной пластины

$$R_{j1} = \frac{1}{Q\lambda^2 K'(k_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(a_n \frac{\partial \varphi_n^c}{\partial y}(0, 0) + b_n \frac{\partial \varphi_n^s}{\partial y}(0, 0) \right)$$
(2.14)

в случае пластины со свободным краем

$$R_{j1} = -\frac{k_0^2}{Q\lambda^2 K'(k_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(a_n \frac{\partial^3 \varphi_n^c}{\partial x^2 \partial y}(0, 0) + b_n \frac{\partial \varphi_n^s}{\partial x^2 \partial y}(0, 0) \right)$$
(2.15)

В формулах (2.13)–(2.15) коэффициенты a_n и b_n получены при правой части, соответствующей моде колебаний с номером j . Интегралы (2.11) по вертикальным линиям $x = \text{const}$ обращаются в нуль при $x \rightarrow \infty$ в силу формул (2.12). Отсюда следует, что

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad \mu_{ij} = \mu_{ji}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Для коэффициентов демпфирования из (2.10) получаем

$$2i \frac{\sigma_{ij}}{\omega} = \int_S \left(\varphi_j \frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial n} - \bar{\varphi}_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \right) ds$$

где черта означает комплексное сопряжение. Преобразуя интегрирование в силу тождества Грина на оставшуюся часть границы жидкости, находим

$$2i \frac{\sigma_{ij}}{\omega} = \int_0^{\infty} \left(\bar{\varphi}_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} - \varphi_j \frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial y} \right) dx - \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^H \left(\varphi_j \frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial x} - \bar{\varphi}_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) dy \quad (2.16)$$

Первый интеграл в (2.16) вычисляем по частям, с учетом формулы (2.12) находим

$$2 \frac{\sigma_{ij}}{\omega} = R_j \bar{R}_i k_0 \left[\frac{4\beta k_0^4 \text{th}^2 k_0 H}{\lambda^2} + \frac{1}{\text{ch}^2 k_0 H} \left(1 + \frac{\text{sh} 2k_0 H}{2k_0} \right) \right] \quad (2.17)$$

Эта формула может служить проверкой правильности проведенных вычислений.

Прогиб ледяной пластины определяется формулой (1.4). Деформации пластины имеют вид

$$\varepsilon(x) = \frac{hA}{2a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{\partial^3 \varphi_n^c}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \Psi_n^c}{\partial x^2 \partial y} \right) (x, 0) + b_n \left(\frac{\partial^3 \varphi_n^s}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \Psi_n^s}{\partial x^2 \partial y} \right) (x, 0) \right]$$

В линейной теории упругости напряжения и деформации связаны линейной зависимостью. Необходимо, чтобы деформации и напряжения не превышали предельных значений, при которых начинаются пластические деформации и разрушение. Экспериментально полученные в работе [26] критические значения максимальных деформаций для льда составляют $4.4 \times 10^{-5} - 8.5 \times 10^{-5}$. В работе [22] использовалось критическое значение максимальных деформаций $\varepsilon_* = 8 \times 10^{-5}$. В данной работе также используется это значение.

На стенку действует горизонтальная сила со стороны жидкости

$$F_h = \int_0^H p(0, y) dy = -\rho \int_0^H (-gy + \varphi_t) dy = \rho g H^2 / 2 + \rho \omega^2 A a^2 \int_0^H \varphi(0, y) dy$$

Первый член в последней формуле представляет гидростатическую силу, а второй член – динамическую составляющую. В случае закрепленной пластины на стенку действует также вертикальная сила, равная перерезывающей силе в кромке, которая определяется формулой

$$F_v = -\frac{DA}{a^3} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (0, 0)$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Проводились численные расчеты для ледяного покрова и цилиндра при следующих входных параметрах: $E = 5$ ГПа, $\rho = 1025$ кг/м³, $\rho_0 = 922.5$ кг/м³, $\nu = 0.3$, $a = 5$ м, $H = 100$ м. Толщина пластины менялась в диапазоне $h = 0.5 \div 2$ м, глубина погружения цилиндра $y_0 = 6-10$ м, менялись также частота колебаний ω и расстояние x_0 от центра цилиндра до стенки.

На рис. 1 представлены графики зависимости безразмерных коэффициентов присоединенных масс μ_{ij} и демпфирования σ_{ij} от безразмерной частоты λ для случаев закрепленной пластины и со свободным краем при $h = 1$ м, $x_0 = 50$ м, $y_0 = 6$ м вблизи вертикальной стенки, а также для цилиндра под бесконечным ледяным покровом в отсутствие стенки. Видно, что наличие стенки приводит к тому, что коэффициенты присоединенных масс и демпфирования осциллируют относительно кривых, которые соответствуют колебаниям цилиндра под бесконечным ледяным покровом в отсутствие стенки. При этом коэффициенты демпфирования обращаются в нуль при некоторых значениях частоты. Из формулы (2.17) следует, что при этих значениях частоты соответствующие амплитуды потенциала на бесконечности R_j равны нулю, т.е. нет излучения волн на бесконечность. Коэффициенты μ_{ij} и σ_{ij} для случаев закрепленной пластины и со свободным краем сдвинуты по фазе: если в случае закрепленной пластины достигается максимум при некоторой частоте, то в случае пластины со свободным краем этот коэффициент близок к минимуму и наоборот. Аналогичный эффект наблюдается для вертикальных и горизонтальных колебаний: если коэффициенты μ_{11} или σ_{11} достигают максимума, то коэффициенты μ_{22} или σ_{22} близки к минимуму.

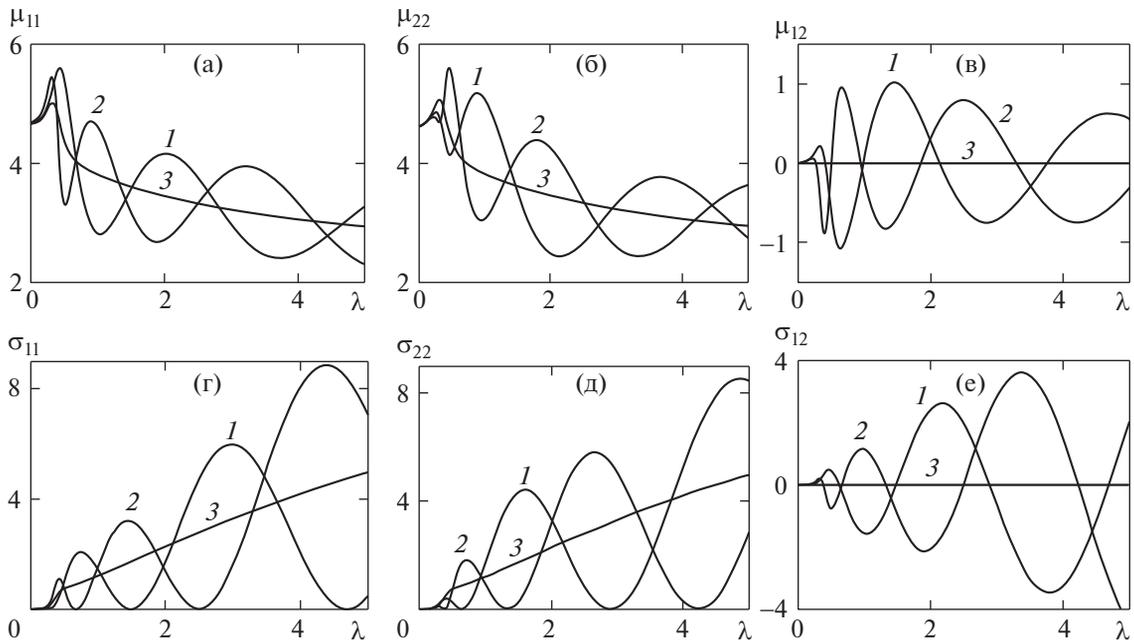


Рис. 1. Зависимость коэффициентов присоединенных масс и демпфирования от частоты при $x_0 = 50$ м, $y_0 = 6$ м, $h = 1$ м: 1 – закрепленная пластина, 2 – пластина со свободным краем, 3 – под бесконечным ледяным покровом в отсутствие стенки.

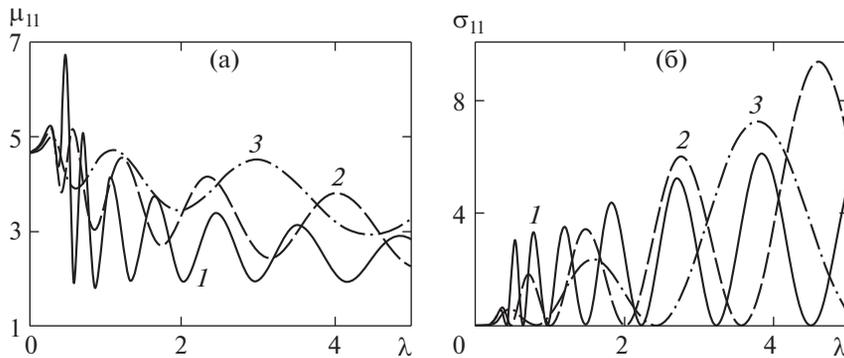


Рис. 2. Влияние толщины ледяного покрова на коэффициенты присоединенных масс и демпфирования μ_{11} , σ_{11} : $x_0 = 100$ м, $y_0 = 6$ м, 1 – $h = 0.5$ м, 2 – $h = 1$ м, 3 – $h = 2$ м.

В работе [5] показано, что в случае цилиндра под бесконечным ледяным покровом в отсутствие стенки при увеличении толщины ледяного покрова при малых частотах коэффициенты присоединенных масс и демпфирования уменьшаются, а при высоких частотах увеличиваются. Аналогичный эффект влияния толщины ледяного покрова наблюдается и при наличии стенки. На рис. 2 приведены для сравнения зависимости коэффициентов μ_{11} и σ_{11} от безразмерной частоты λ для случаев толщины пластины $h = 0.5, 1$ и 2 м, $x_0 = 100$ м, $y_0 = 6$ м. Такое же влияние толщины ледяного покрова проявляется на остальные коэффициенты присоединенных масс и демпфирования.

При уменьшении расстояния цилиндра от стенки период осцилляции коэффициентов μ_{ij} и σ_{ij} увеличивается. Это можно увидеть из сравнения графиков на рис. 1 и 2. Из формулы (2.13) следует, что амплитуда потенциала R_j складывается из членов, периодических по параметру x_0 , и членов, убывающих при $x_0 \rightarrow \infty$. На рис. 3 изображены зависимости коэффициентов присоеди-

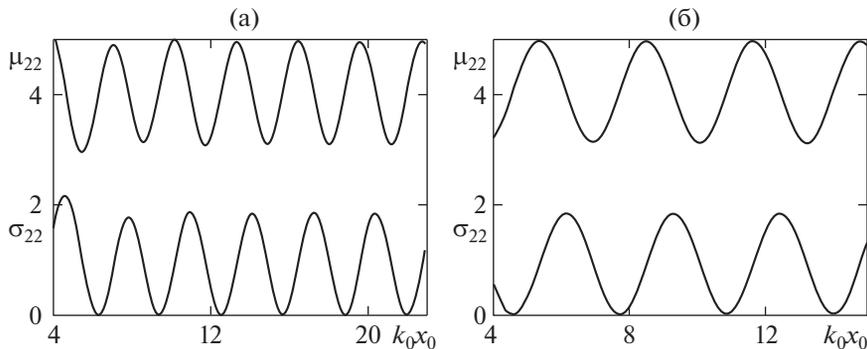


Рис. 3. Зависимость коэффициентов присоединенных масс и демпфирования μ_{22} , σ_{22} от расстояния до стенки x_0 в случае закрепленной пластины (а) и со свободным краем (б) при $h = 1$ м, $\lambda^2 = 0.5$.

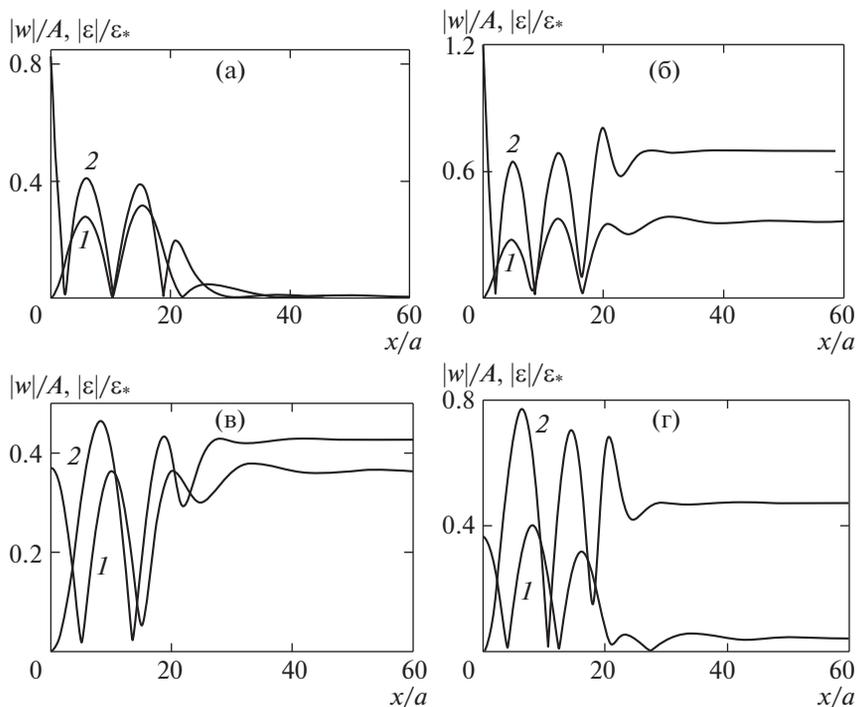


Рис. 4. Зависимости безразмерных амплитуд прогиба пластины (1) и деформаций (2) от координаты x при вертикальных колебаниях цилиндра для закрепленной пластины (а, б) и со свободным краем (в, г) при $\lambda^2 = 0.5$ (а, в) и $\lambda^2 = 1$ (б, г), $A = 0.05$ м.

ненных масс и демпфирования μ_{22} , σ_{22} от произведения $k_0 x_0$ в случаях закрепленной пластины толщиной $h = 1$ м и со свободным краем при $\lambda^2 = 0.5$, $y_0 = 6$ м. Видно, что в случае свободного края достаточно быстро при $k_0 x_0 > 4$ достигается периодическая зависимость, а в случае закрепленной пластины гораздо позже, при $k_0 x_0 > 11$. Остальные коэффициенты присоединенных масс и демпфирования зависят от расстояния от стенки аналогичным образом, а также при других значениях частоты колебаний.

На рис. 4 представлены распределения по координате x амплитуд безразмерного прогиба пластины $|w|/A$, отнесенных к амплитуде колебаний цилиндра A , и деформаций, вычисленных при значении $A = 0.05$ м и отнесенных к критическому значению ϵ_* , при вертикальных колеба-

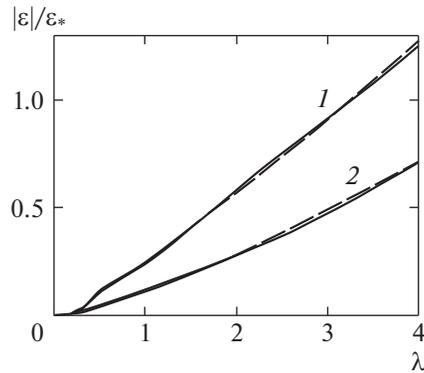


Рис. 5. Зависимость амплитуды максимальных деформаций в кромке закрепленной пластины с толщиной $h = 1$ м (1) и 2 м (2) от безразмерной частоты λ при вертикальных (сплошные кривые) и горизонтальных колебаниях (штриховые кривые), $x_0 = 100$ м, $A = 0.01$ м.

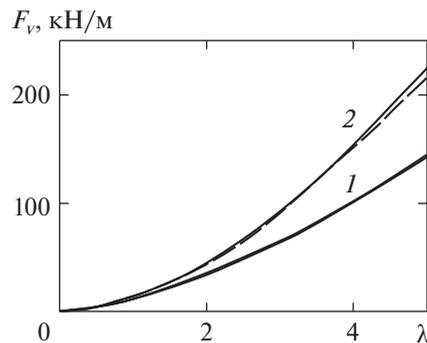


Рис. 6. Сравнение амплитуды вертикальной силы, действующей на стенку, при вертикальных (сплошные кривые) и горизонтальных (штриховые кривые) колебаниях цилиндра и различных толщинах закрепленной пластины: $h = 1$ м (1) и 2 м (2), $A = 0.05$ м.

ниях цилиндра в случаях закрепленной пластины и со свободным краем при значениях $\lambda^2 = 0.5$ и 1, $h = 1$ м, $x_0 = 100$ м, $y_0 = 6$ м. Видно, что при $\lambda^2 = 0.5$ в случае закрепленной пластины при $x \rightarrow \infty$ амплитуды прогиба пластины и деформаций стремятся к нулю, а при $\lambda^2 = 1$ близки к максимальным. В случае пластины со свободным краем, наоборот, при $\lambda^2 = 0.5$ амплитуды прогиба и деформаций максимальны при $x \rightarrow \infty$, а при $\lambda^2 = 1$ значительно меньше. В случае закрепленной пластины максимальные деформации достигаются в кромке и при $\lambda^2 = 1$ превышают критическое значение, ожидается разрушение пластины вблизи кромки. Однако если амплитуда колебаний цилиндра меньше, например $A = 0.03$ м, то максимальные деформации не превышают критическое значение, разрушение пластины не ожидается.

На рис. 5 показана зависимость амплитуды максимальных деформаций в кромке от частоты для закрепленных пластин толщиной $h = 1$ и 2 м при вертикальных и горизонтальных колебаниях при $x_0 = 100$ м и $A = 0.01$ м. Видно, что деформации тонкой пластины значительно больше, однако изгибающий момент для толстой пластины больше, чем для тонкой. В силу линейности задачи по этому графику можно оценить применимость данной модели, найти параметры, при которых разрушение ледяного покрова не ожидается.

На рис. 6 приведены зависимости от частоты амплитуды вертикальной силы, действующей на стенку, при горизонтальных и вертикальных колебаниях цилиндра для закрепленной пластины толщиной $h = 1$ и 2 м, $x_0 = 100$ м, $y_0 = 6$ м, $A = 0.05$ м. Кривые для горизонтальных и вертикальных колебаний цилиндра практически сливаются, только при больших частотах в случае пластины толщиной $h = 2$ м заметно различие.

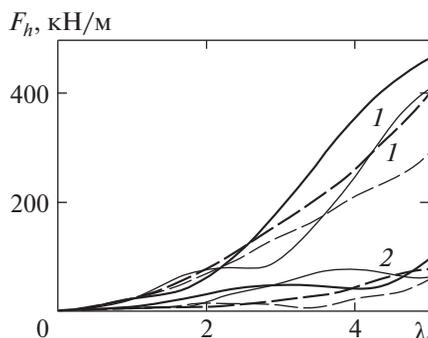


Рис. 7. Сравнение амплитуды горизонтальной динамической силы, действующей на стенку, при вертикальных (сплошные кривые) и горизонтальных (штриховые кривые) колебаниях цилиндра в случаях закрепленной пластины (1) и со свободными краями (2) и различных толщинах пластины: $h = 1$ м (тонкие кривые) и 2 м (толстые кривые), $A = 0.05$ м.

На рис. 7 показаны зависимости от частоты амплитуды динамической составляющей горизонтальной силы, действующей на стенку, при горизонтальных и вертикальных колебаниях цилиндра для закрепленной пластины и со свободным краем с толщиной $h = 1$ и 2 м, $x_0 = 100$ м, $y_0 = 6$ м. Видно, что в случае закрепленной пластины значение силы значительно выше, чем в случае свободного края. В случае закрепленной пластины увеличение толщины приводит к увеличению силы при больших частотах.

При увеличении глубины погружения цилиндра все исследованные характеристики: коэффициенты присоединенных масс и демпфирования, прогиб и деформации ледяного покрова, действующие на стенку силы уменьшаются.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построено решение задачи о колебаниях цилиндра в жидкости под ледяным покровом вблизи вертикальной стенки. Исследованы зависимости присоединенных масс и коэффициентов демпфирования, прогиба и деформаций пластины, вертикальных и горизонтальных сил, действующих на стенку, от частоты и входных параметров задачи: толщины ледяного покрова, расстояния цилиндра от стенки и глубины его погружения.

Наличие стенки приводит к тому, что кривые зависимости коэффициентов присоединенных масс и демпфирования от частоты осциллируют относительно кривых, которые соответствуют колебаниям цилиндра под бесконечным ледяным покровом в отсутствие стенки. При уменьшении расстояния цилиндра от стенки период их осцилляции увеличивается. Коэффициенты демпфирования обращаются в нуль при некоторых значениях частоты, что означает отсутствие излучения волн на бесконечность. При увеличении толщины ледяного покрова при малых частотах коэффициенты присоединенных масс и демпфирования уменьшаются, а при больших частотах увеличиваются. Амплитуда вертикальной силы, действующей на стенку в случае примороженного края ледяного покрова, увеличивается при увеличении толщины льда. Амплитуда динамической составляющей горизонтальной силы при больших частотах значительно больше в случае закрепленной пластины, чем в случае свободного края.

Автор выражает благодарность И.В. Стуровой за внимание к работе и полезное обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Linton C.M., McIver P.* Handbook of mathematical techniques for wave/structure interactions. 2001. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
2. *Sturova I.V.* Unsteady three-dimensional sources in deep water with an elastic cover and their applications // *J. Fluid Mech.* 2013. V. 730. P. 794–418. <https://doi.org/10.1017/jfm.2013.303>
3. *Das D., Thakur N.* Water wave scattering by a sphere submerged in uniform finite depth water with an ice-cover // *J. Mar. Struct.* 2013. V. 30. P. 63–73.

4. *Das D., Thakur N.* Wave scattering by a sphere submerged in a two-layer fluid with an ice-cover // *Int. J. Appl. Math. Eng. Sci.* 2014. V. 8. P. 45–632.
5. *Das D., Sahu M.* Wave radiation by a horizontal circular cylinder submerged in deep water with ice-cover // *J. of Ocean Engng and Science.* 2019. V.4. P. 49–54.
6. *Thakur N., Das D.* Hydrodynamic forces on a submerged horizontal circular cylinder in water with an ice cover // *Iran J. Sci. Technol. Trans. Sci.* 2017. V. 41. P. 837–842.
7. *Thorne R.C.* Multipole expansions in the theory of surface waves // *Proc. Camb. Philos. Soc.* 1953. V. 49. P. 707–716.
8. *Савин А.А., Савин А.С.* Пространственная задача о возмущении ледяного покрова движущимся в жидкости диполем // *Изв. РАН. МЖГ.* 2015. № 5. С. 16–23.
9. *Ильичев А.Т., Савин А.С.* Процесс установления системы плоских волн на ледовом покрове над диполем, равномерно движущимся в толще идеальной жидкости // *Теор. и матем. физика.* 2017. Т. 193. № 3. С. 455–465.
10. *Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Kozin V.M.* Moving of a submarine under an ice cover in fluid of finite depth // *J. Hydrodynamics.* 2018. doi.org/<https://doi.org/10.1007/s42241-018-0143-1>
11. *Стурова И.В.* Генерация волн колеблющимся погруженным цилиндром при наличии плавающей полубесконечной упругой пластины // *Изв. РАН, МЖГ.* 2014. № 4. С. 98–108.
12. *Стурова И.В.* Влияние трещины в ледяном покрове на гидродинамические характеристики погруженного колеблющегося цилиндра // *ПММ.* 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 251–263.
13. *Sturova I.V.* Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya // *J. Fluid Mech.* 2015. V. 784. P. 373–395.
14. *Ткачева Л.А.* Колебания цилиндрического тела, погруженного в жидкость, при наличии ледяного покрова // *ПМТФ.* 2015. Т. 56. № 6. С. 173–186.
15. *Ren K., Wu G.X., Thomas G.A.* Wave excited motion of a body floating on water confined between two semi-infinite ice sheets // *Phys. Fluids.* 2016. V. 28. P. 127101.
16. *Li Z.F., Shi Y.Y., Wu G.X.* Interaction of waves with a body floating on polynya between two semi-infinite ice sheets // *J. Fluids and Structures.* 2018. V. 78. P. 86–108.
17. *Li Z.F., Shi Y.Y., Wu G.X.* Interaction of wave with a body floating on a wide polynya // *Phys. Fluids.* 2017. V. 29(9). P. 097104.
18. *Li Z.F., Wu G.X., Ji C.Y.* Wave radiation and diffraction by a circular cylinder submerged below an ice sheet with a crack // *J. Fluid Mech.* 2018. V. 845. P. 682–712.
19. *Li Z.F., Wu G.X., Ji C.Y.* Interaction of wave with a body submerged below an ice sheet with multiple arbitrary spaced cracks // *Phys. Fluids.* 2018. V.30. P. 057107.
20. *Li Z.F., Shi Y.Y., Wu G.X.* Large amplitude motions of a submerged circular cylinder in water with an ice cover // *Eur. J. Mech. (B/Fluids)* 2017. V. 65. P. 141–159.
21. *Chakrabarti A., Ahluwalia D.S., Manam S.R.* Surface water waves involving a vertical barrier in the presence of an ice-cover // *Intern. J. of Engng Science.* 2003. V. 41. P. 1145–1162.
22. *Brocklehurst P., Korobkin A., Parau E.* Interaction of hydro-elastic waves with a vertical wall // *J. Eng. Math.,* 2010. V. 68. P. 215–231.
23. *Bhattacharjee J., Guedes Soares C.* Flexural gravity wave over a floating ice sheet near a vertical wall // *J. Engng Math.* 2012. V. 75. P. 29–48.
<https://doi.org/10.1007/s10665-011-9511-3>
24. *Das D., Mandal B.N.* Oblique wave scattering by a circular cylinder submerged beneath an ice-cover. *Intl J. Engng Sci.* 2006. 44 (3–4), 166–179.
25. *Ткачева Л.А.* Поведение полубесконечного ледяного покрова при периодическом динамическом воздействии // *ПМТФ.* 2017. Т. 58. № 4. С. 82–94.
26. *Squire V., Martin S.* A field study of the physical properties, response to swell, and subsequent fracture of a single ice floe in the winter Bering sea: Tech. report/ Univ. of Washington; Washington, N 18. 1980.