

УДК 533.95:534.13

## О ТОЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

© 2020 г. А. Н. Голубятников<sup>a</sup>, Д. В. Украинский<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup> МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: d.v.ukrainskiy@gmail.com

Поступила в редакцию 29.10.2019 г.

После доработки 17.12.2019 г.

Принята к публикации 17.12.2019 г.

В рамках одномерной нестационарной газовой динамики с плоскими волнами развивается теория построения точных аналитических решений задачи Коши с помощью степенных рядов по специальной временной переменной, вид которой определяет конкретный класс движения. В общем виде рекуррентные соотношения на коэффициенты конечны и устроены таким образом, что для вычисления искомым функций не нужно решать дифференциальных уравнений или интегрировать, все члены рядов определяются последовательно по начальным условиям только с использованием алгебраических операций и дифференцирования. Данное обстоятельство позволяет также находить члены рядов точно с помощью любого математического пакета, допускающего символьные преобразования. Обсуждаются необходимые граничные условия и излагается методика контроля поведения рядов. Разбираются примеры физических задач, решаемых разработанным методом.

*Ключевые слова:* газовая динамика, нелинейные уравнения, точные решения, неортогональные системы функций

**DOI:** 10.31857/S0568528120030044

Общая задача трех тел в небесной механике (при невозможности тройного столкновения) была разрешена с использованием так называемых рядов К.Ф. Зундмана [1], представляющих собой степенные ряды по специальной параметрической переменной, от которой зависят время и координаты тел. Данный подход был связан с методами, развиваемыми Т. Леви-Чивитой [2], и представлял собой глобальную регуляризацию уравнений движения, в которых оставалась возможность парного столкновения, с помощью вводимого параметра.

При решении уравнений газовой динамики также использовались подходы, связанные с поиском решений в виде рядов. В [3] дано решение уравнений одномерных неустановившихся движений газа вблизи центра симметрии с использованием рядов по дробным степеням радиальной переменной с определением коэффициентов, зависящих от времени. В [4] получен класс осесимметричных неустановившихся адиабатических движений совершенного газа, характеристики которого допускают представления в виде степенных рядов по положительным степеням линейной координаты с коэффициентами, являющимися функциями угловой координаты и времени, указан алгоритм, позволивший найти общее решение системы уравнений для определения всех коэффициентов разложений. Также можно отметить работы о распространении слабых ударных волн [5] и о трехволновом резонансе в плоской стационарной задаче [6]. В [7] решена задача о периодических по пространственной переменной политропных движений газа. В [8] дано решение задачи об определении периодического по времени решения в виде разложения по малой амплитуде волн с учетом квадратичных членов. Классические задачи о движениях поршня с оптимизацией процесса приведены в [9].

В настоящей работе идея о поиске решений нелинейных уравнений в виде разложения в степенной ряд по специальной, зависящей от времени переменной, которая определяет характер движения, применяется к решению задачи Коши с необходимыми краевыми условиями для одномерных адиабатических процессов динамики совершенного идеального газа с плоскими волнами при переменной энтропии. Даны решения задач с ограниченным движением газа, периодическим по времени, а также с учетом явлений обострения.

## 1. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

С использованием массовой лагранжевой переменной  $m$  уравнения одномерной нестационарной газовой динамики могут быть сведены к системе с квадратичной нелинейностью [9, 10]

$$x_t + p_m = g(m) \quad (1.1)$$

$$x_m p_t + \gamma p x_{mt} = 0 \quad (1.2)$$

где  $x = x(m, t)$  – закон движения,  $t$  – время,  $p = p(m, t)$  – давление,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $g(m)$  – массовая сила (например, для газа в однородном поле тяготения  $g(m) = -g$ , где  $g$  – величина ускорения свободного падения; можно также учесть наличие в заряженном газе замороженного электрического поля в рамках электрогидродинамики [9]). Плотность выражается через закон движения с помощью соотношения  $\rho = 1/x_m$ . В дальнейшем для функций одной переменной приняты обозначения: точка – производная по времени, штрих – производная по массе.

Важно заметить, что уравнение (1.2) представляет собой закон сохранения

$$p(x_m)^\gamma = \sigma(m) \quad (1.3)$$

в правой части которого стоит функция  $\sigma(m)$ , связанная с энтропией.

В уравнениях (1.1), (1.2) можно совершить взаимно-однозначную замену переменной  $a = a(t)$ .

Пусть  $a$  удовлетворяет уравнению  $\dot{a}^2/2 = U(a)$  (т.к. фактически можно считать, что  $a$  определяется гамильтонианом). В этом случае получается система

$$2U(a)x_{aa} + \frac{dU(a)}{da} x_a + p_m = g(m) \quad (1.4)$$

$$x_m p_a + \gamma p x_{ma} = 0 \quad (1.5)$$

В уравнение (1.4) входит потенциал  $U(a)$ , который определяет характер движения. Предполагается, что  $a(0) = 0$ .

Решение системы (1.4), (1.5) ищется в виде ряда Тейлора по  $a$  в окрестности нуля

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(m) a^n \quad (1.6)$$

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(m) a^n \quad (1.7)$$

При этом начальные условия выражаются через члены рядов следующим образом:

$$x(m, 0) = A_0(m), \quad x_t(m, 0) = \sqrt{2U(0)} A_1(m), \quad p(m, 0) = B_0(m) \quad (1.8)$$

Пусть функция  $\sqrt{U(a)}$  является гладкой. В этом случае, поскольку  $\dot{a} = \sqrt{2U(a)}$  и  $a(0) = 0$ , в силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для  $a(t)$ , нельзя считать  $U(0) = 0$ , что приводит к  $a \equiv 0$ . Это не пригодно с точки зрения замены переменной. Кроме того, для исследования поведения решения в терминах  $a$  отсутствует необходимость определения зависимости  $a(t)$  как таковой. При этом теорема гарантирует существование и единственность такой зависимости.

Стоит отметить, что в соответствии со структурой рядов (1.6), (1.7) существует инвариантность относительно растяжения переменной  $a$  и коэффициентов разложений. Ясно, что для достаточно малых  $a$  ряды будут сходиться при любых ограниченных коэффициентах.

При подстановке (1.6), (1.7) в закон сохранения (1.5) и перемножении рядов по правилу Коши, при одинаковых степенях  $a$  получаются рекуррентные соотношения

$$B_n(m) A'_0(m) + \gamma B_0(m) A'_n(m) = - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} (A'_k(m) B_{n-k}(m) + \gamma B_k(m) A'_{n-k}(m)) \quad (1.9)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  (правая часть равняется нулю при  $n = 1$ ). Следует сказать, что функция  $A'_0(m)$ , вообще говоря, не может быть тождественно равна нулю в силу ее механического смысла: величина, обратная начальной плотности.

Рекуррентные соотношения, следующие из уравнения движения (1.4), зависят от разложения функции  $U(a)$

$$U(a) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n a^n \tag{1.10}$$

и имеют вид

$$2n(n-1)C_0 A_n(m) + \sum_{k=1}^{n-1} k(n+k-2)C_{n-k} A_k(m) + B'_{n-2}(m) = \delta_{2n} g(m) \tag{1.11}$$

где  $n = 2, 3, 4, \dots$  и  $\delta_{ij}$  – символы Кронекера. Важно заметить, что  $C_0 = U(0) \neq 0$ .

Соотношения (1.9) и (1.11) устроены таким образом, что все члены ряда могут быть найдены последовательно исходя из заданных начальными условиями  $A_0(m)$ ,  $A_1(m)$  и  $B_0(m)$ , при этом не нужно решать дифференциальных уравнений и интегрировать

$$A_2(m) = \frac{g(m) - B'_0(m) - C_1 A_1(m)}{4C_0}, \quad B_1(m) = -\frac{\gamma B_0(m) A'_1(m)}{A'_0(m)} \tag{1.12}$$

$$A_n(m) = -\frac{B'_{n-2}(m)}{2n(n-1)C_0} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n+k-2)C_{n-k}}{2n(n-1)C_0} A_k(m), \quad n = 3, 4, 5, \dots \tag{1.13}$$

$$B_n(m) = -\frac{\gamma B_0(m) A'_n(m)}{A'_0(m)} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} \frac{A'_k(m) B_{n-k}(m) + \gamma B_k(m) A'_{n-k}(m)}{A'_0(m)}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \tag{1.14}$$

Соотношения (1.12)–(1.14) позволяют точно находить коэффициенты рядов при произвольном разложении (1.10) функции  $U(a)$  с помощью любого математического пакета, допускающего символьные преобразования.

Стоит подчеркнуть, что для произвольного момента времени решение при заданном  $m$  зависит от вида начальных условий (1.8) и их производных. Кроме того, из вида рекуррентных формул также следует, что равновесные начальные условия, т.е. условия вида

$$A_0 = A_0(m), \quad A_1(m) \equiv 0, \quad B_0(m) = \int g(m) dm + C$$

всегда приводят к равновесному решению

$$x(m, t) \equiv A_0(m), \quad p(m, t) \equiv B_0(m)$$

т.е. равновесие в начальный момент сохраняется во все последующие моменты времени для любого  $U(a)$ .

Для того чтобы использовать построенные решения в расчетах, необходимо совершить переход от рядов к их частичным суммам. С целью контроля точности такой процедуры, а также с целью проверки необходимого условия сходимости можно вычислить сохраняющуюся во времени энтропийную функцию  $\sigma(m)$  (1.3), известную из начальных условий, и сравнить ее точное значение с этой же величиной, но уже вычисленной с помощью построенных частичных сумм рядов. При этом удобно воспользоваться относительной погрешностью

$$r(m, t) = \left| \frac{p(m, t)(x_m(m, t))^{\gamma} - B_0(m)(A'_0(m))^{\gamma}}{B_0(m)(A'_0(m))^{\gamma}} \right| \tag{1.15}$$

Здесь ряды  $p$  и  $x$  представлены с помощью своих частичных сумм.

В случае приближения  $r(m, t)$  к 0 с ростом числа вычисляемых членов рядов возможность сходимости ряда для  $p(m, t)$  можно проверить, проанализировав стремление к 0 ряда для  $x_m(m, t)$ , и соответственно наоборот.

Граничные условия в рамках данного подхода определяются необходимым для существования решения образом, например, в виде непротекания на поверхностях пары поршней, в области между которыми происходит рассматриваемое движение. Законы движения поршней находятся a posteriori, т.е. после вычисления решения задачи, и представляются функциями  $x(0, t)$  и

$x(M, t)$  соответственно (если масса  $m$  изменяется в пределах  $[0, M]$ ). В этом смысле можно считать, что для решения конкретных задач применяется полуобратный метод.

Однако можно поставить задачу о равенстве  $a(t)$  закону движения одного из поршней. Пусть координате поршня отвечает точка  $m = 0$ , и начальные условия, по предположению, согласуются с указанными краевыми условиями при  $t = 0$ , так что отсутствуют начальные разрывы. При этом требуется определить подходящее  $U(a)$ .

В этом случае закон движения поршня имеет вид  $x(0, t) = a(t)$ . В соответствии с (1.6) получается, что

$$A_1(0) = 1, \quad A_0(0) = A_2(0) = A_3(0) = \dots = 0$$

Данные соотношения можно выполнить, если на каждой итерации рекуррентных соотношений, прежде чем вычислять очередной  $A_n(m)$ , определять

$$C_1 = g(0) - B'_0(0), \quad n = 2$$

$$C_{n-1} = -\frac{B'_{n-2}(0)}{n-1}, \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

Таким образом, функция  $U(a)$  выстраивается по начальным условиям в процессе решения задачи. В конечном счете она имеет вид

$$U(a) = C_0 + g(0)a - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B'_n(0)}{n+1} a^{n+1} = C_0 + g(0)a - \int_0^a p_m(0, a) da$$

Выбирать  $C_0$  следует, если возможно, исходя из неотрицательности  $U(a)$ . При малых  $t$ , а значит и малых  $a$  в силу  $a(0) = 0$ , этого добиться несложно. Вообще говоря, возможность выполнения условия неотрицательности при произвольном  $a$  зависит от начальных данных и массовой силы. Стоит отметить, что конкретизация  $C_0$  также влияет на получаемое решение. Сам вид  $a(t)$  определяется через полученную  $U(a)$  из соответствующих дифференциального уравнения и начального условия.

## 2. СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ В РЯДАХ С ИЗВЕСТНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Указанные рассуждения оказываются полезными при решении следующей задачи Коши с краевыми условиями. Пусть начальные данные имеют вид

$$A_0(m) = m, \quad A_1(m) = \alpha m, \quad B_0(m) = 1 \quad (2.1)$$

и массовые силы отсутствуют:  $g(m) = 0$ .

Линейность начальной скорости по  $m$  и постоянство начальных плотности и давления в соответствии с (1.12)–(1.14) приводят к тому, что какими бы ни были постоянные  $C_n$ ,  $x(m, t) = mq_1(t)$  и  $p(m, t) = q_2(t)$  с некоторыми функциями времени  $q_1$  и  $q_2$ . Отсюда следует, что  $x(0, t) \equiv 0$ , т.е. поршень в точке  $m = 0$  остается неподвижным во все моменты времени.

Задача нахождения закона движения поршня в точке  $m = 1$  в виде  $a(t)$  дает, в свою очередь, что  $C_n = 0$  для любого натурального  $n$ , поскольку  $B'_{n-1}(1) = 0$ . Следовательно,  $U(a) \equiv C_0 > 0$  и  $a(t) = \sqrt{2C_0 t} = Vt$ . В итоге закон движения второго поршня будет иметь вид  $x(1, t) = A_0(1) + A_1(1)a(t) = 1 + \alpha Vt$ , где можно положить  $V = 1$ .

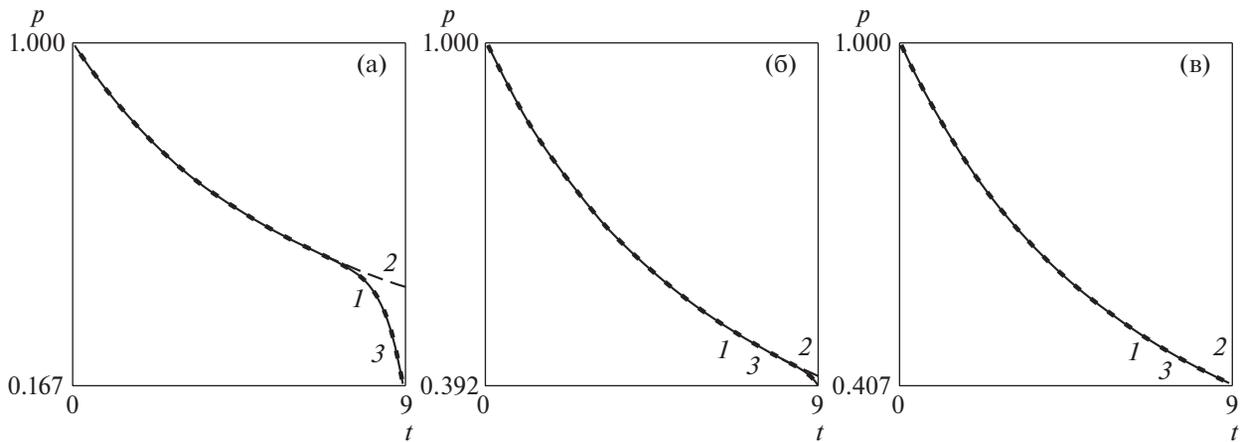
Таким образом, с помощью определения в рамках изложенной теории  $a(t) = t$  при начальных условиях (2.1) и отсутствии массовых сил, решается точно задача Коши с граничными условиями

$$x_m + p_m = 0, \quad x_m p_t + \gamma p x_{mt} = 0, \quad t \geq 0, \quad m \in [0, 1] \quad (2.2)$$

$$x(m, 0) = m, \quad x_t(m, 0) = \alpha m, \quad p(m, 0) \equiv 1 \quad (2.3)$$

$$x(0, t) \equiv 0, \quad x(1, t) = 1 + \alpha t \quad (2.4)$$

которая моделирует процесс расширения газа с однородной деформацией в трубе с подвижной стенкой.



**Рис. 1.** Сравнение решения задачи Коши с краевыми условиями, полученного через разложения по степеням функции времени ( $t$ ), с известным точным решением: его представление в квадратурах (2), разложение в ряд Тейлора (3); графики приведены для 20 (а), 50 (б) и 100 (в) членов рядов.

Задача (2.2)–(2.4) имеет точное решение в квадратурах [3]

$$x(m, t) = m(1 + \alpha t), \quad p(m, t) = (1 + \alpha t)^{-\gamma} \tag{2.5}$$

Решение, получаемое исходя из формул (1.12)–(1.14), в точности представляет собой разложение в ряд Тейлора по времени в окрестности нуля решения (2.5) и представлено на рис. 1.

На данном рисунке для  $\gamma = 1.4$  и  $\alpha = 0.1$  изображены сравнительные графики давления согласно решению через разложение по степеням функции времени ( $t$ ), решению в квадратурах (2), разложению решения в квадратурах в ряд Тейлора (3) при 20, 50 и 100 взятых членах рядов соответственно.

Следует отметить, что в данной задаче

$$r(m, t) = \left| \frac{p(m, t) - (1 + \alpha t)^{-\gamma}}{(1 + \alpha t)^{-\gamma}} \right|$$

т.е. в точности является погрешностью ряда давления относительно его суммы – решения в квадратурах. При  $\alpha t < 1$  функция  $r(m, t)$  достаточно быстро убывает с ростом числа членов ряда, достигая в точке  $\alpha t = 0.9$  значений 0.58981, 0.03597 и 0.00024 при 20, 50 и 100 взятых членов ряда соответственно.

В качестве другого примера можно рассмотреть, наоборот, линейное по  $m$  начальное давление и постоянную начальную скорость. В соответствии с рекуррентными соотношениями (1.12)–(1.14) при произвольном  $U(a)$  это приводит к решению, которое сходится (вообще говоря в некоторой области) в терминах  $a$  к известному решению [3] с постоянной по массе  $m$  и линейной по времени  $t$  скоростью с сохраняющимися начальными плотностью и давлением, т.е. к твердотельному движению с постоянным ускорением.

Если задать начальные условия в виде

$$A_0(m) = m, \quad A_1(m) = 0, \quad B_0(m) = 1 + \alpha m, \quad m \in [0, 1]$$

и строить решение с помощью разложения в степенной ряд по функции  $a(t) = \sin t$ , где  $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ , то в терминах  $a$  получается решение, в точности представляющее собой разложение в ряд Тейлора следующих функций:

$$x(m, a) = m - (\alpha/2) \arcsin^2 a, \quad p(m, a) \equiv 1 + \alpha m$$

На рис. 2 при  $\alpha = 1$  показан график скорости ( $I$ ) в терминах  $t$  для полученного через формулы (1.12)–(1.14) решения с 20, 50 и 100 вычисленными членами ряда соответственно. Хорошо видна сходимости скорости к точному решению  $v = -t$  (изображено линией 2). Поведение в окрестности точек  $t = \pm\pi / 2$  регулярно, несмотря на отсутствие производной арксинуса при  $a = \pm 1$ .

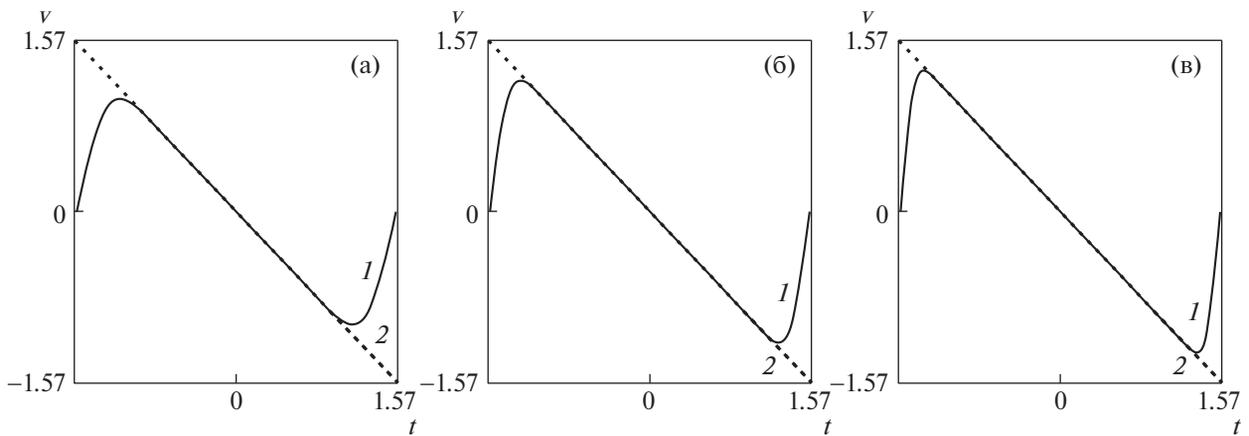


Рис. 2. Сходимость решения, построенного с помощью разложения в степенной ряд по специальной функции времени (1), к известному аналитическому решению (2); графики приведены для 20 (а), 50 (б) и 100 (в) членов ряда.

Нужно отметить, что, согласно теории размерности, в приведенных примерах и далее можно выбрать заданным образом только три масштаба. Последний пример показывает, что построенное решение, в некотором смысле, может не зависеть почти во всей области определения от выбора функции  $a(t)$ .

### 3. ОГРАНИЧЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

В данном разделе рассматривается более сложная по сравнению с первым примером задача о расширении газа в трубе, одна стенка которой по-прежнему неподвижна, а закон движения второй представляется в терминах монотонно растущих ограниченных функций.

Для моделирования соответствующего процесса можно взять функцию  $a(t)$  в виде  $a = \exp(-t) - 1$ . Задаются те же начальные условия (2.1), чтобы можно было оценить различия решений

$$A_0(m) = m, \quad A_1(m) = -0.1m, \quad B_0(m) = 1, \quad m \in [0, 1]$$

Здесь знак  $A_1(m)$  поменялся, поскольку поменялся знак  $\dot{a}(0)$ . Для этого и всех дальнейших примеров будем также использовать  $\gamma = 1.4$  и  $g(m) = 0$ , кроме последнего примера, в котором учитывается гравитация.

Решение для 20 членов ряда представлено на рис. 3. Здесь и в дальнейшем графики всегда идут в порядке слева направо сверху вниз: закон движения, скорость, плотность, давление, относительная энтропийная погрешность (1.15).

Исходя из рисунка видно, что каждая из функций, входящих в решение, при  $t \rightarrow \infty$  выходит на свое асимптотическое значение (для каждого  $m$ ), при этом, как и в предыдущем случае, давление и плотность, а значит и относительная энтропийная погрешность, от  $m$  не зависят. Поршень, соответствующий массовой координате  $m = 0$ , покоится, закон движения второго поршня изображен на графике  $x(m, t)$  при  $m = 1$ . Максимальное значение  $r(m, t)$  убывает с ростом числа взятых членов рядов. Так, получаются значения порядка 0.016, 0.014 и 0.013 для 20, 50 и 100 членов рядов соответственно. Если вычислить 1000 коэффициентов, то относительная энтропийная погрешность будет составлять менее 1%.

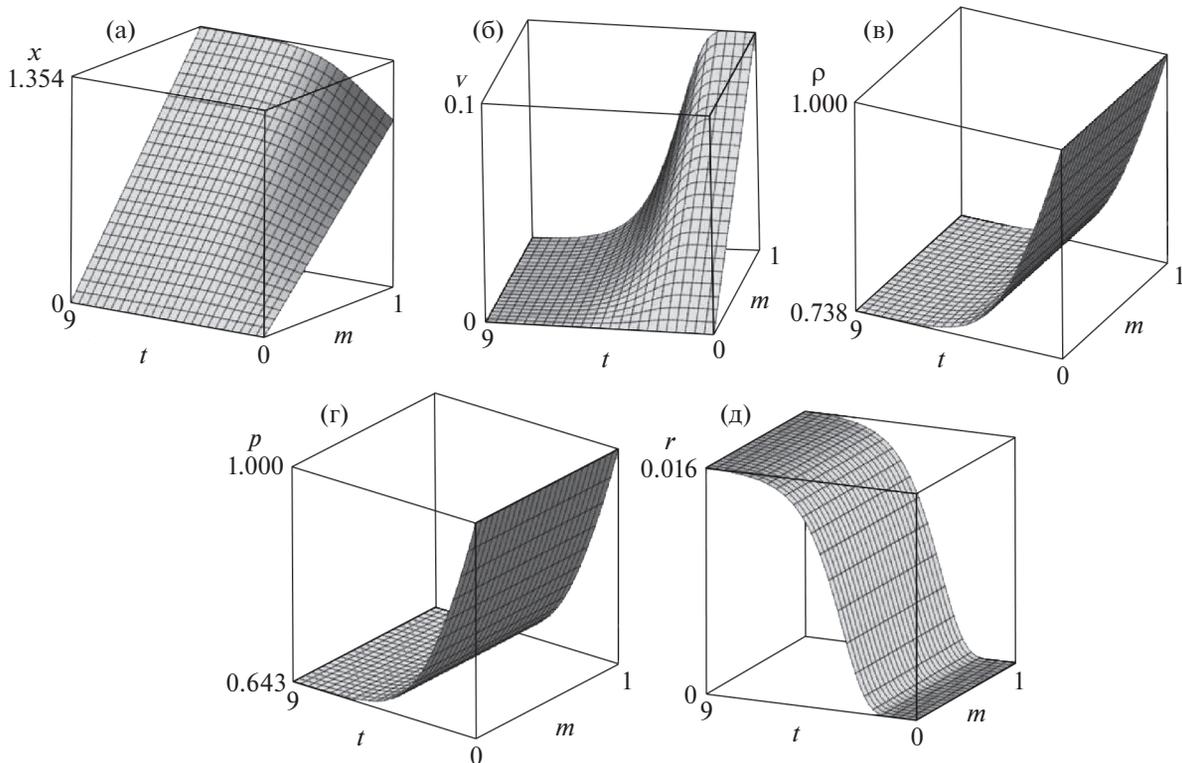
### 4. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Решается задача о распространении возмущений, создаваемых периодическими колебаниями поршня с лагранжевой координатой  $m = 0$ , на фоне неоднородно распределенного в начальный момент времени давления.

Для этой цели выбирается  $a(t) = \sin t$  и рассматриваются начальные условия

$$A_0(m) = m, \quad A_1(m) = 0, \quad B_0(m) = 1 + 0.05 \exp(-m), \quad m \in [0, \infty)$$

В данной задаче предполагается, что второй поршень отсутствует.



**Рис. 3.** Графики закона движения (а), скорости (б), плотности (в), давления (г), относительной энтропийной погрешности (д) для задачи о расшении газа в трубе, одна стенка которой неподвижна, а закон движения второй представляется в терминах монотонно растущих ограниченных функций.

В соответствии с тригонометрическими формулами, разложение по степеням синуса времени представляет собой комбинацию ряда Фурье [11], взятую с целью справиться с нелинейностью системы уравнений газовой динамики. Прямое использование рядов Фурье оказывается неэффективным, поскольку при перемножении рядов такой подход приводит к бесконечным выражениям, вместо конечных рекуррентных формул.

Для первых 16 взятых коэффициентов решение показано на рис. 4 (в этой и следующей задачах решение изображено на полном периоде с целью наглядности). Колебания поршня изображены на рисунке для закона движения при  $m = 0$ .

Опираясь на графики, можно утверждать, что при больших  $m$  все возмущения затухают. Данное обстоятельство согласуется с упомянутым сохранением изначального равновесия: при больших  $m$  начальные условия стремятся к равновесным, а решение в конкретной массовой точке определяется лишь начальными условиями в ее малой окрестности. Поскольку при больших  $m$  полученное решение во все моменты времени стремится к равновесному, можно сказать, что в этом смысле равновесие устойчиво.

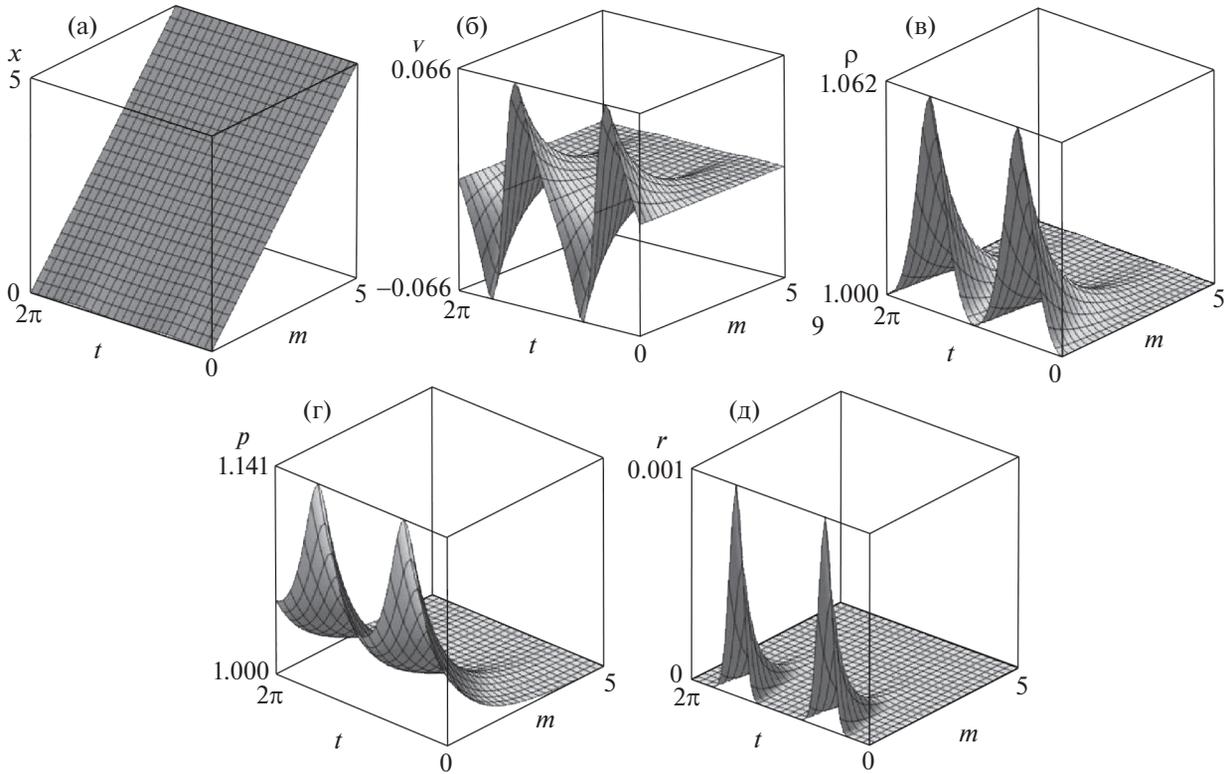
Порядок относительной энтропийной погрешности убывает с ростом числа взятых членов рядов и составляет 0.0012, 0.0011 и 0.0010 для 8, 12 и 16 коэффициентов соответственно. Число 0.05 в начальных условиях подбиралось именно с той целью, чтобы создаваемое возмущение равновесного давления приводило к регулярному поведению решения в рядах.

В качестве следующего примера решается задача об эволюции зоны высокого давления при сильной неоднородности начальной плотности в трубе с колеблющимися поршнями.

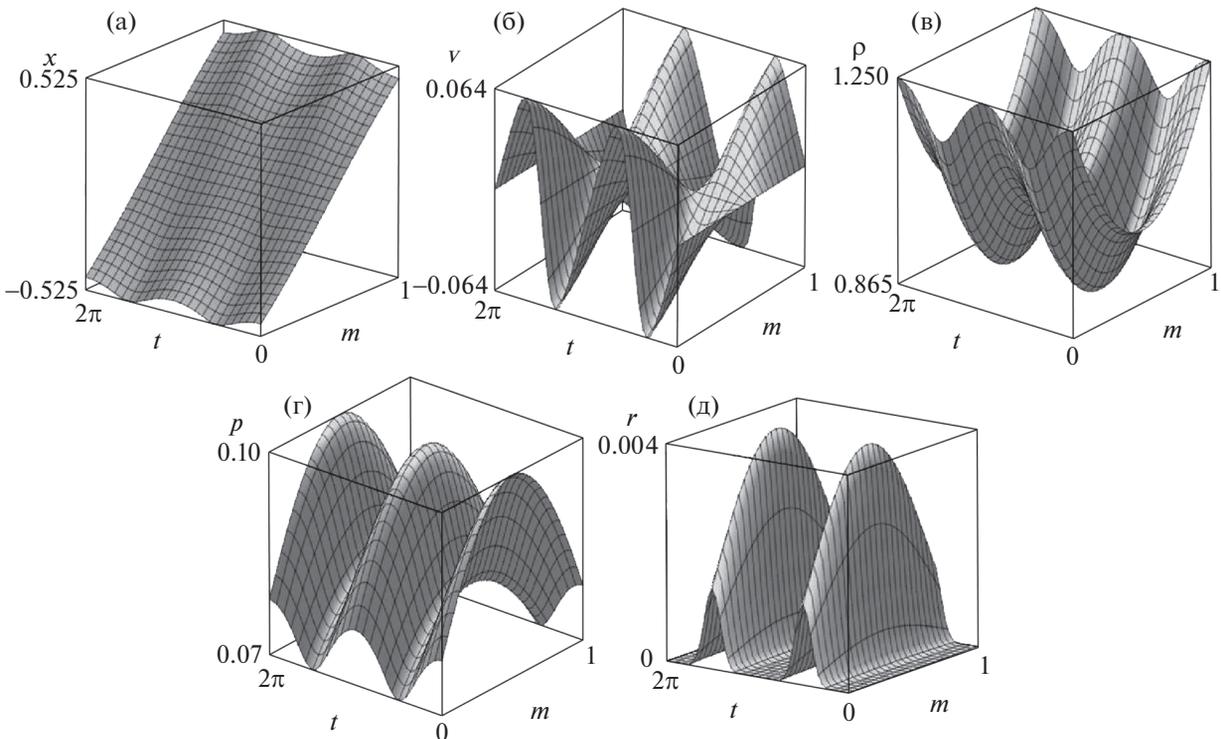
В соответствии с постановкой задачи следует определить начальные условия в виде

$$A_0(m) = \arctg\left(m - \frac{1}{2}\right), \quad A_1(m) = 0, \quad B_0(m) = 0.1 \exp\left(-\left(m - \frac{1}{2}\right)^2\right), \quad m \in [0, 1]$$

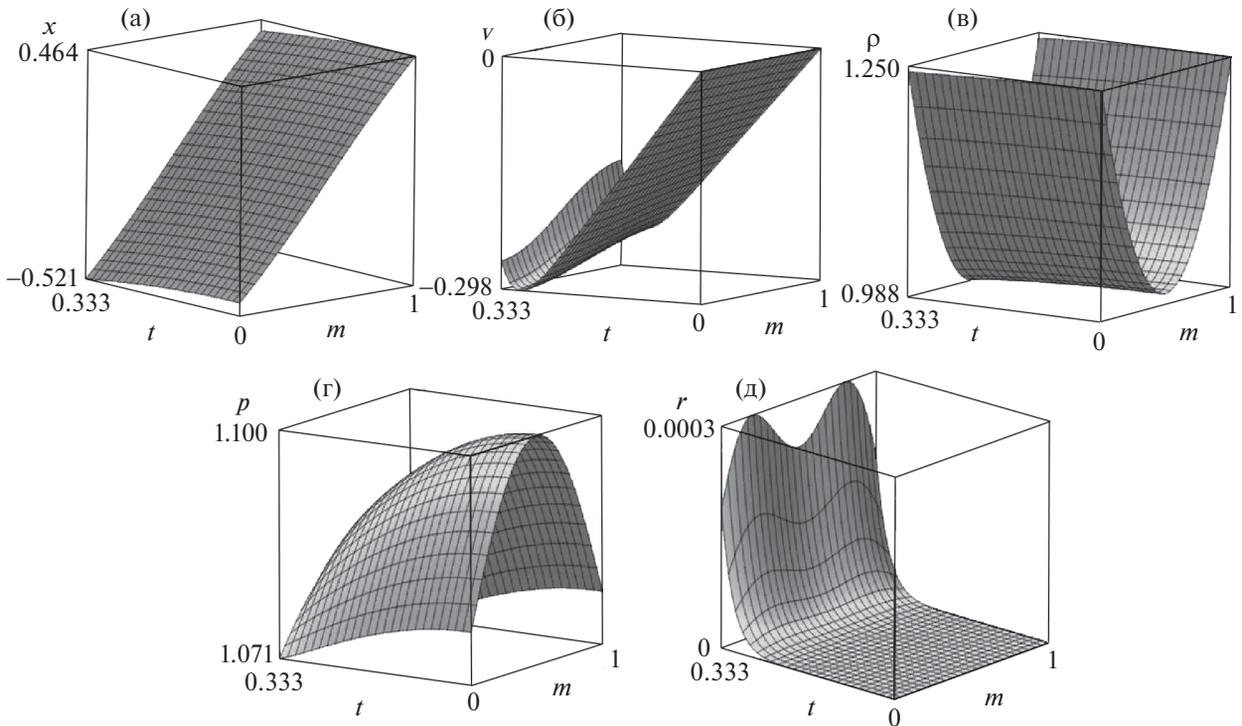
Указанная задача представляет интерес в приложениях, однако устройство начальных условий и требования к краевым условиям усложняют процесс поиска аналитического решения.



**Рис. 4.** Графики закона движения (а), скорости (б), плотности (в), давления (г), относительной энтропийной погрешности (д) для задачи о распространении возмущений, создаваемых периодическими колебаниями поршня, на фоне неоднородно распределенного в начальный момент времени давления.



**Рис. 5.** Графики закона движения (а), скорости (б), плотности (в), давления (г), относительной энтропийной погрешности (д) для задачи об эволюции зоны высокого давления при сильной неоднородности начальной плотности в трубе с колеблющимися поршнями.



**Рис. 6.** Графики закона движения (а), скорости (б), плотности (в), давления (г), относительной энтропийной погрешности (д) для задачи о движении поршней, описываемом в терминах неограниченно растущих функций, на неоднородном фоне при наличии гравитации.

Обойти соответствующие сложности помогает поиск решения в виде разложения по степеням синуса времени  $a(t) = \sin t$ .

На рис. 5 показаны графики физических величин, характеризующих рассматриваемый процесс, для 12 членов рядов. Колебания, совершаемые поршнями, изображены на рисунке для закона движения при  $m = 0$  и  $m = 1$ . Функционально решение устроено сложно, но при этом порядок относительной энтропийной погрешности остается невысоким и составляет 0.005, 0.004 и 0.003 для 8, 10 и 12 коэффициентов соответственно. Максимум погрешности достигается, как и в прошлом случае, в точках, где косинус времени равен нулю.

## 5. ДВИЖЕНИЕ С ОБОСТРЕНИЕМ

В настоящем пункте рассматривается задача о движении поршней, описываемом в терминах неограниченно растущих функций, на неоднородном фоне при наличии гравитации.

Для получения решения такой задачи можно выбрать  $a(t) = 1/(1-t) - 1$ , задать  $g(m) = -1$  и положить начальные данные в виде

$$A_0(m) = \operatorname{arctg}\left(m - \frac{1}{2}\right), \quad A_1(m) = 0, \quad B_0(m) = 1 + 0.1 \exp\left(-\left(m - \frac{1}{2}\right)^2\right), \quad m \in [0, 1]$$

Построенное решение для 10 членов рядов приведено на рис. 6. Функция  $a(t)$  является неограниченно растущей при  $t \rightarrow 1$ , поэтому степенные ряды по этой функции начнут расходиться с определенного момента времени. Однако построенное решение хорошо описывается при небольших  $a$ : при  $t = 0.333$  порядок относительной энтропийной погрешности мал и составляет 0.0012, 0.0007 и 0.0003 для 6, 8 и 10 коэффициентов.

Законы движения поршней изображены на рисунке для  $x(m, t)$  при  $m = 0$  и 1. Чтобы перейти от изображения решения в переменных Лагранжа к изображению решения в переменных Эйлера, достаточно построить графики в соответствующих координатах, исключая массу  $m$  как параметр.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках адиабатического движения совершенного идеального газа развита теория построения точных аналитических решений задач Коши с краевыми условиями с помощью разложений в степенные ряды по функции от времени, задающей характер рассматриваемого явления. Для исследования используются уравнения в лагранжевой форме, в частности, записанные с использованием массовой переменной. Рекуррентные соотношения для зависящих от массы коэффициентов устроены так, что все неизвестные величины находятся из начальных условий только с помощью дифференцирования и алгебраических операций. Отсутствие необходимости решать дифференциальные уравнения и интегрировать позволяют использовать символьные вычисления, реализованные в математических пакетах, для точного нахождения коэффициентов рядов при любых заданных наперед начальных данных. Краевые условия определяются после решения задачи, например, в виде непротекания на поверхностях пары поршней, в области между которыми происходит рассматриваемое движение. Закон сохранения энтропии помогает контролировать поведение рядов и судить о погрешности при переходе от рядов к их частичным суммам. Решения, строящиеся на основе разработанного метода, проходят проверку на известных в газовой динамике точных решениях и позволяют распространить результаты на более общие случаи. Также метод позволяет получить новые решения физических задач, связанных, например, с ограниченными и периодическими движениями, течениями с обострением, и другими, задаваемыми заменой времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00017).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sundman K.F.* Memoire sur le probleme des trois corps // Acta mathematica. 1912. V. 36. № 2. P. 105–179.
2. *Levi-Civita T.* Sulla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi // Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. 1915. V. 24. P. 61–75.
3. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 448 с.
4. *Карликов В.П.* К общей теории осесимметричных движений газа // Доклады Академии наук СССР. 1960. Т. 133. № 5. С. 1049–1052.
5. *Голубятников А.Н.* Разрывы малой амплитуды решений уравнений механики сплошной среды // Труды математического института имени В.А. Стеклова. 2018. Т. 300. С. 65–75.
6. *Голубятников А.Н., Украинский Д.В.* Трехволновой резонанс в двумерной стационарной задаче газовой динамики // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2019. № 2. С. 63–67.
7. *Аксенов А.В.* Нелинейные периодические волны в газе // Известия Академии наук. Механика жидкости и газа. 2012. № 5. С. 88–98.
8. *Петров А.Г.* Возбуждение нелинейных периодических стоячих волн в сжимаемых средах // Известия Академии наук. Механика жидкости и газа. 2015. № 6. С. 102–105.
9. *Галин Г.Я., Голубятников А.Н., Каменярж Я.А., Карликов В.П., Куликовский А.Г., Петров А.Г., Свешникова Е.И., Шикина И.С., Эглит М.Э.* Механика сплошных сред в задачах (Классический учебник МГУ). М.: Ленанд, 2017. 640 с.
10. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
11. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1963. 1108 с.