ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2020, № 3, с. 51–58

УДК 532.542

# КИНЕМАТИКА ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ЗАПОЛНЕНИИ ТРУБЫ С КОАКСИАЛЬНЫМ ЦЕНТРАЛЬНЫМ ТЕЛОМ

 Е. И. Борзенко[a,*], Г. Р. Шрагер[a,**]

[a] Томский государственный университет, Томск, Россия

*E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

**E-mail: shg@ftf.tsu.ru

Поступила в редакцию 16.10.2019 г.
После доработки 17.12.2019 г.
Принята к публикации 17.12.2019 г.

Проведено численное моделирование течения вязкой жидкости со свободной поверхностью, реализующегося при заполнении вертикальной круглой трубы с коаксиальным центральным телом в поле силы тяжести. Математическая постановка задачи включает уравнения Навье–Стокса и неразрывности, которые дискретизируются методом контрольного объема с привлечением корректирующей процедуры SIMPLE. Естественные граничные условия на свободной поверхности удовлетворяются с использованием метода инвариантов. Выполнены параметрические исследования процесса заполнения. Построены критериальные зависимости характеристик формы свободной поверхности от основных безразмерных параметров задачи. Исследована картина массораспределения.

*Ключевые слова:* ньютоновская жидкость, труба, центральное тело, заполнение, свободная поверхность, численное моделирование

**DOI:** 10.31857/S0568528120030020

Течения вязкой жидкости со свободной поверхностью в цилиндрическом канале с центральным телом реализуются в различных технологических процессах, в частности, при заполнении пресс-форм в технологии формования изделий методом литья под давлением [1]. Характерными особенностями таких течений являются: меняющаяся во времени свободная поверхность; линия трехфазного контакта твердое тело–жидкость–газ (ЛТК), движущаяся вдоль твердой стенки Математическая постановка задачи, адекватная физическому содержанию процесса, настолько сложна, что делает практически невозможным получение аналитического решения. В связи с этим большую популярность приобрели численные методы для исследования подобных течений.

К настоящему времени выполнено большое количество численных и экспериментальных исследований [2–8] процесса заполнения плоских каналов и круглых труб. Поток характеризуется установлением формы свободной поверхности и разделением на зону одномерного течения вдали от свободной поверхности и зону фонтанирующего течения [9] в ее окрестности. Для устранения сингулярности традиционной постановки задачи в окрестности ЛТК [10, 11] в случае слабого влияния капиллярных эффектов на кинематику течения используется условие равенства динамического краевого угла $\pi$. В противном случае на контактной линии выполняется условие проскальзывания [10].

Число работ, посвященных анализу заполнения цилиндрического канала с центральным телом, ограничено [1, 11, 12], и в них представлены неполные данные о критериальных зависимостях характеристик потока. Установлено, что аналогично случаю заполнения круглой трубы/плоского канала, наблюдается разделение потока на одномерное течение и зону фонтанирующего течения.

Целью настоящего исследования является анализ характеристик потока, эволюции свободной поверхности и топограммы массораспределения в зависимости от определяющих параметров при заполнении вертикальной трубы с коаксиальным центральным телом вязкой жидкостью.

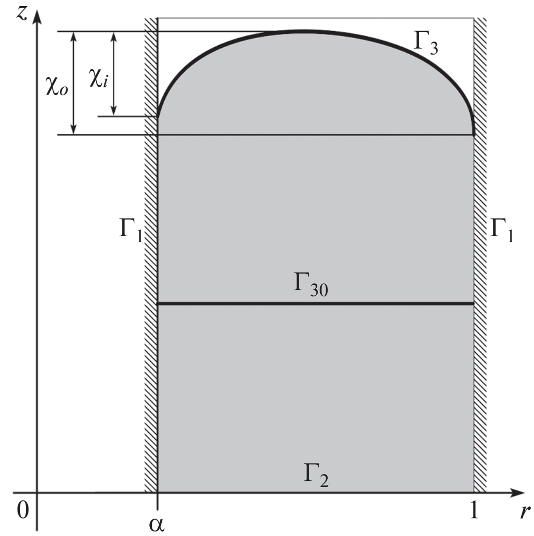


**Рис. 1.** Область течения: $\Gamma_1$ – твердая стенка, $\Gamma_2$ – входное сечение, $\Gamma_3$ – свободная граница, $\Gamma_{30}$ – свободная граница в начальный момент времени.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается заполнение вертикальной трубы с коаксиальным центральным телом вязкой жидкостью в поле силы тяжести. Область решения и система координат представлены на рис. 1. Основу математического описания рассматриваемого течения образуют уравнения Навье–Стокса и неразрывности, которые в безразмерных переменных в векторной форме имеют вид

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}\right] = -\nabla p + \Delta\mathbf{u} + \mathbf{W} \tag{1.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор скорости с проекциями $(u, v)$ на оси цилиндрической системы координат $(r, z)$; $t$ – время; $p$ – давление; $\mathbf{W} = (0, -\mathrm{W})$; $\alpha$ – отношение радиуса внутреннего коаксиального тела к радиусу трубы; $\mathrm{Re} = \rho UR/\mu$ – число Рейнольдса; $\mathrm{W} = \rho g R^2/(\mu U)$. В качестве масштабов длины, скорости, времени и давления используются радиус трубы $R$, среднерасходная скорость во входном сечении $U$, величина $R/U$ и комплекс $\mu U/R$ соответственно, где $\mu$ – вязкость жидкости, $\rho$ – плотность, $g$ – ускорение силы тяжести.

На твердых стенках $\Gamma_1$ используется условие прилипания. На свободной поверхности $\Gamma_3$ выполняются условия отсутствия касательных напряжений и равенства нормального внешнему давлению, которое без ограничения общности можно считать равным нулю. Силы поверхностного натяжения не учитываются, движение свободной границы подчиняется кинематическому условию. Во входном сечении $\Gamma_2$ профиль скорости соответствует установившемуся течению вязкой жидкости в коаксиальном кольце [13]. Таким образом, граничные условия записываются в виде

$$\Gamma_1: u = 0, \quad v = 0$$

$$\Gamma_2: u = 0, \quad v = 2\frac{(\alpha^2 - 1)\ln r + (1 - r^2)\ln\alpha}{(1 + \alpha^2)\ln\alpha + 1 - \alpha^2}$$

$$\Gamma_3: \frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} = 0, \quad p = 2\frac{\partial v_n}{\partial n}$$

Условия на границе $\Gamma_3$ записаны в локальной декартовой системе координат $(n,s)$, нормально связанной со свободной поверхностью. Движение свободной границы осуществляется в соответствии с кинематическим условием, которое в лагранжевом представлении записывается в виде

$$\frac{dr}{dt} = u, \quad \frac{dz}{dt} = v$$

**Таблица 1.** Контролируемые величины ($t = 2.5$, Re = 0.1, W = 10, $\alpha = 0.5$)

| | $h = 1/20$ | $h = 1/40$ | $h = 1/80$ | $h = 1/160$ |
|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon$ | 0.273 | 0.178 | 0.085 | 0.017 |
| $\chi_i$ | 0.231 | 0.214 | 0.207 | 0.203 |
| $\chi_o$ | 0.229 | 0.221 | 0.218 | 0.216 |

В начальный момент времени канал частично заполнен жидкостью и свободная поверхность расположена на расстоянии $2(1 - \alpha)$ от входной границы $\Gamma_2$, достаточном для исключения ее влияния на характер течения в окрестности входа при рассматриваемых параметрах.

## 2. МЕТОД РАСЧЕТА

Поставленная задача решается численно. Уравнения движения (1.1) дискретизируются на разнесенной сетке с использованием метода контрольного объема, а уравнение неразрывности (2) удовлетворяется с помощью корректирующей процедуры SIMPLE [14]. Расчет характеристик на свободной поверхности выполняется в соответствии с методом инвариантов [15]. Движение линии трехфазного контакта реализовано в предположении равенства динамического краевого угла $\pi$ [16].

В таблице приведены величины ошибки в выполнении закона сохранения массы $\varepsilon$ и характеристики $\chi_i$, $\chi_o$ формы свободной поверхности, вычисленные на последовательности сеток с шагом $h$ и демонстрирующие аппроксимационную сходимость численной методики. Ошибка $\varepsilon$ рассчитывается по следующей формуле:

$$\varepsilon = \frac{(\Omega_t - \Omega_0) - Q\,t}{Q\,t} 100\%$$

где $\Omega_t$ и $\Omega_0$ – объем жидкости в канале в моменты времени $t$ и 0 соответственно, $Q$ – объемный расход жидкости через входное сечение.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Течения, реализующиеся в технологии формования изделий методом литья под давлением, характеризуются умеренными скоростями и высокими вязкостями текучих сред, поэтому ограничимся случаем малости числа Рейнольдса.

Во всех расчетах задается Re = 0.1. Заполнение круглой трубы с центральным телом характеризуется установлением формы свободной поверхности и ее движением в аксиальном направлении со среднерасходной скоростью (рис. 2, а). В качестве характеристик формы свободной границы используются величины $\chi_i$ и $\chi_o$ (рис. 1). Графики изменения геометрических параметров $\chi_i$ (сплошная линия) и $\chi_o$ (пунктир) с течением времени представлены на рис. 2б. Начиная с некоторого момента времени, форма свободной поверхности устанавливается и ее характеристики $\chi_i$ и $\chi_o$ приобретают определенные постоянные значения. Время установления формы поверхности растет по мере увеличения ширины зазора.

Графики зависимости значений характеристик $\chi_i$ и $\chi_o$ от определяющих параметров задачи в момент времени, когда форма свободной границы установилась, представлены на рис. 3. С уменьшением ширины зазора (с ростом $\alpha$) значения $\chi_i$, $\chi_o$ уменьшаются. Аналогичная тенденция в их поведении наблюдается с увеличением параметра W. Во всех расчетах координата линии трехфазного контакта на внутренней стенке больше, чем на внешней, а наибольшее расхождение их значений наблюдается при $\alpha = 0.1$. При $\alpha = 0.9$, т.е. в случае малой ширины зазора, влияние W на форму поверхности практически отсутствует.

Распределение характеристик течения представлено на рис. 4 и 5 для двух значений величины ширины зазора $1 - \alpha$ в момент времени, когда форма свободной поверхности уже установилась. Линии тока построены в системе координат, движущейся вверх со среднерасходной скоростью. Характер распределения характеристик позволяет разделить поток на две зоны: двумерного течения в окрестности свободной границы и одномерного в остальной части канала, в которой профиль скорости соответствует установившемуся течению в коаксиальном зазоре. Распределе-

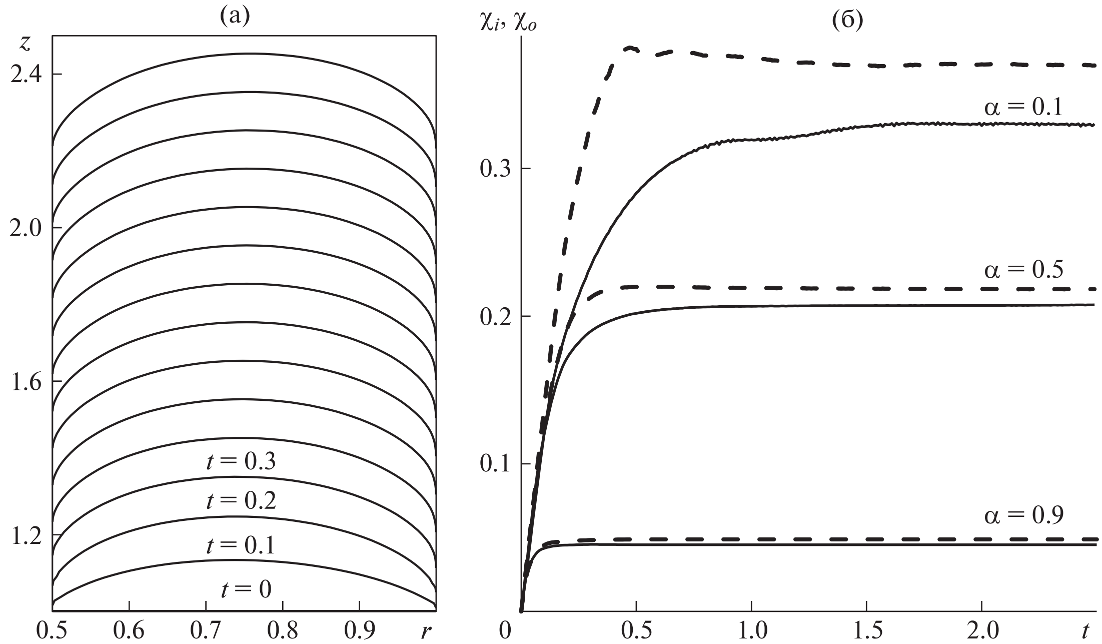


**Рис. 2.** Эволюция (а) свободной поверхности и (б) характеристик $\chi_i$, $\chi_o$ с течением времени (W = 10, $\alpha$ = 0.5).

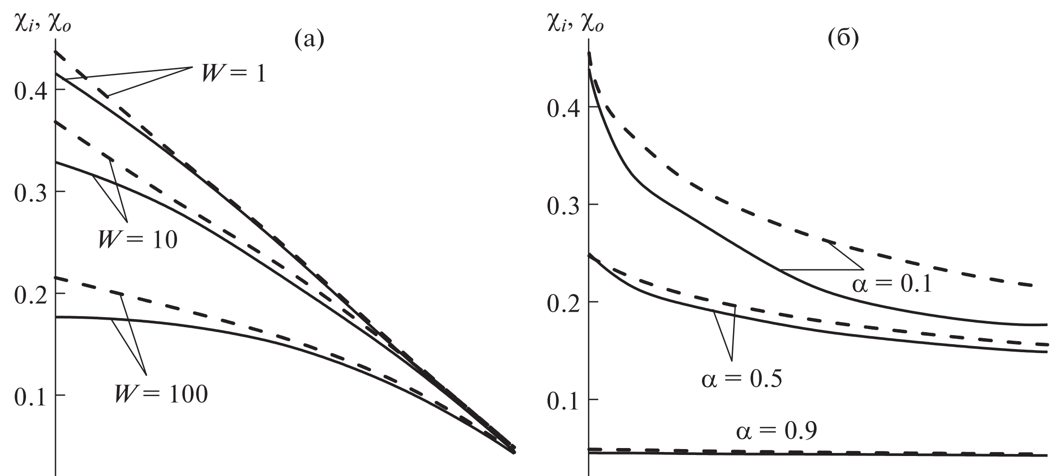


**Рис. 3.** Влияние параметров задачи на значения характеристик установившейся формы свободной границы: а – W = 1, 10, 100; б – $\alpha$ = 0.1, 0.5, 0.9. Здесь $\chi_i$ – сплошная линия; $\chi_o$ – пунктир.

ние линий тока в области двумерного течения для случая малой ширины зазора ($\alpha = 0.9$) близко к симметричному относительно середины зазора В литературе для описания кинематики таких потоков используется термин “фонтанирующее течение” [9]. В случае большой ширины зазора ($\alpha = 0.1$) симметрия распределения линий тока нарушается.

Считаем, что зона двумерного течения начинается с сечения $z = \text{const}$, в котором отклонение максимального значения аксиальной компоненты вектора скорости от соответствующего значения для установившегося течения в кольцевом зазоре достигает 1% величины последнего. Тогда длину области двумерного течения $l_{2D}$ определяем как расстояние от вершины фронта свободной

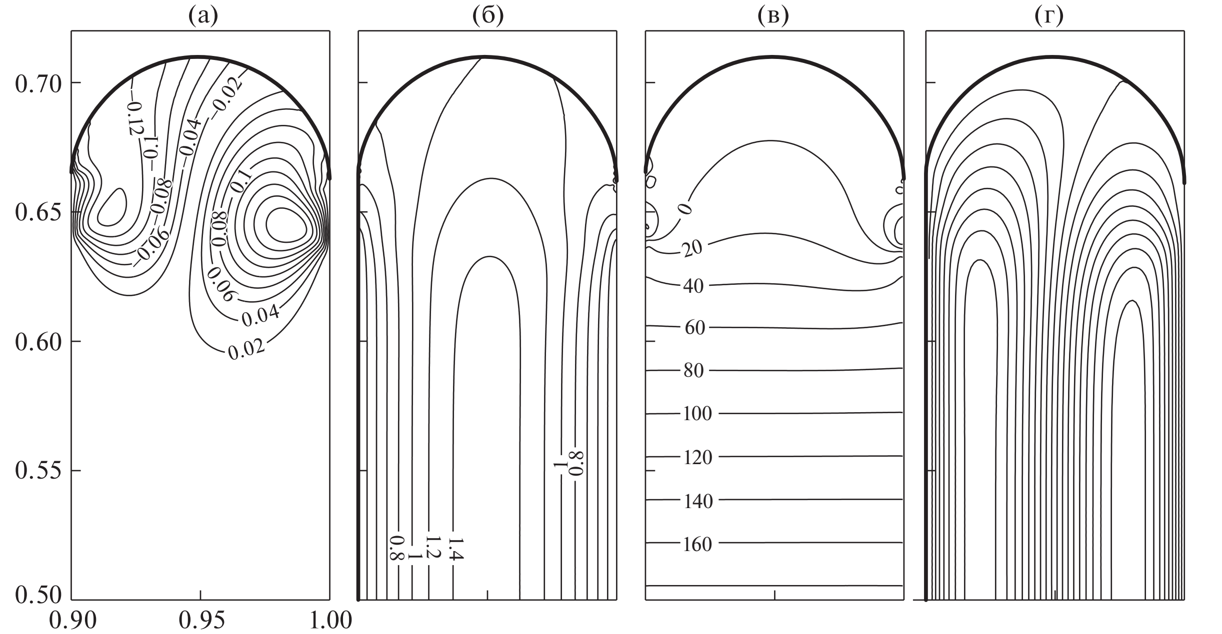


**Рис. 4.** Поля компонент скорости $u$ и $v$, (а, б), давления (в), линии тока (г) при W = 0.1, $\alpha$ = 0.9, t = 0.5.

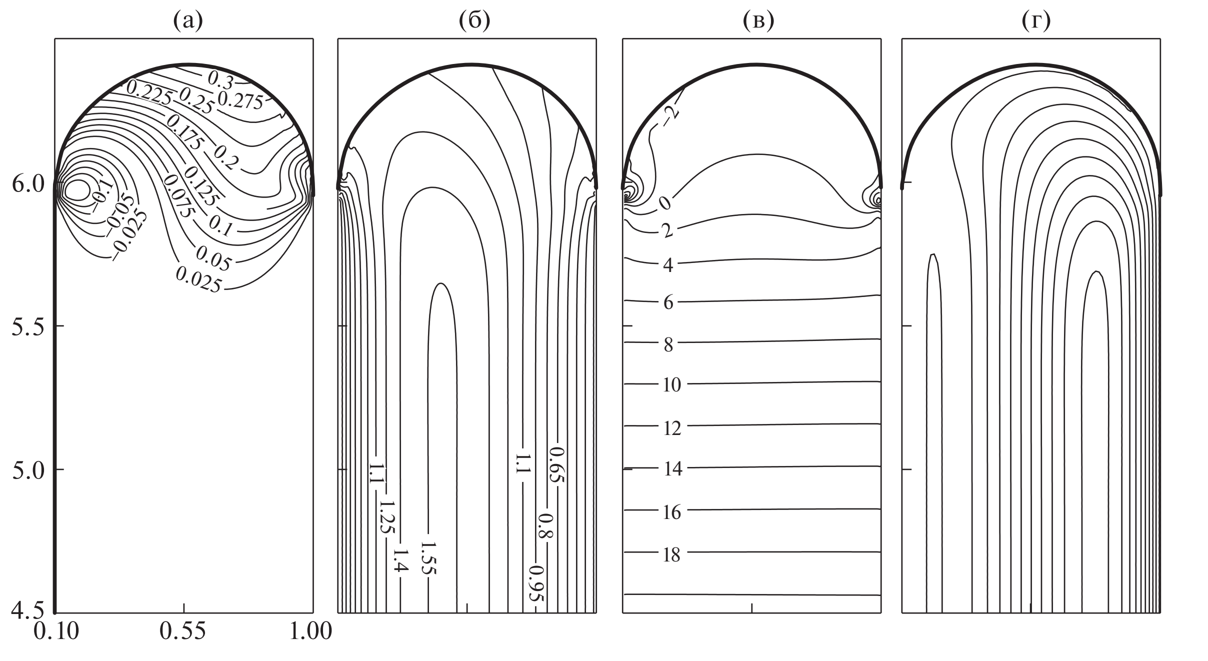


**Рис. 5.** Поля компонент скорости $u$ и $v$, (а, б), давления (в), линии тока (г) при W = 0.1, $\alpha$ = 0.1, t = 4.5.

поверхности до этого сечения. Зависимости безразмерной длины зоны двумерного течения $l_{2D}$ от параметров $\alpha$ и W после установления формы показаны на рис. 6. Графики зависимости $l_{2D}(\alpha)$ достаточно хорошо аппроксимируются линейной зависимостью.

Дополнительную информацию о кинематике течения дают топограммы распределения порций жидкости, поступающих в канал с равными интервалами времени, которые представлены на

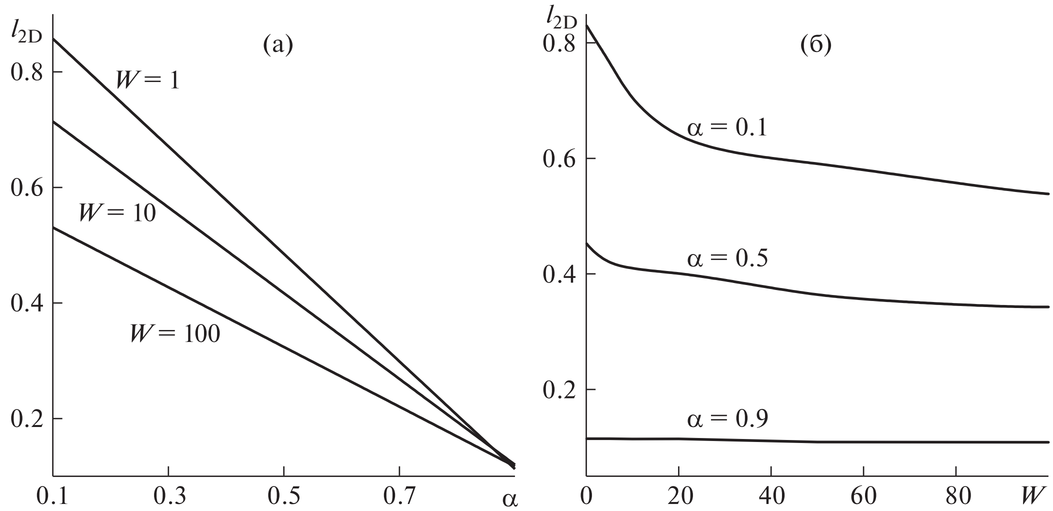


**Рис. 6.** Влияние параметров задачи на размеры зоны двумерного течения: а – W = 1, 10, 100; б – α = 0.1, 0.5, 0.9.

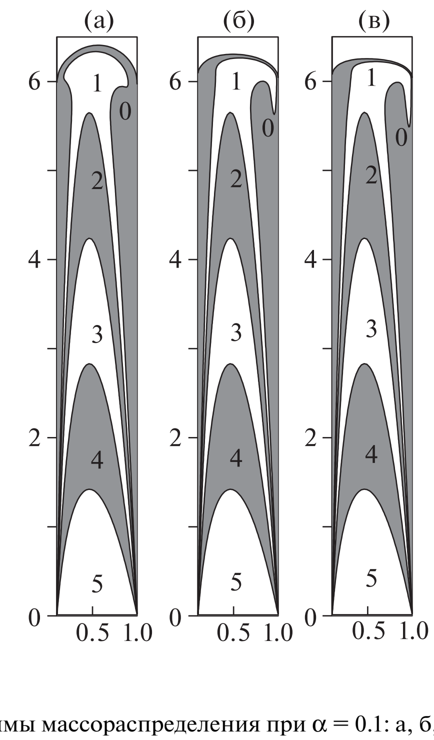


**Рис. 7.** Топограммы массораспределения при α = 0.1: а, б, в – W = 1, 50, 100.

рис. 7 и 8. Методика построения топограмм подробно описана в [17]. Номерами обозначены порции, поступающие в канал с интервалом времени $1 - \alpha$. Нулевая порция соответствует жидкости, находившейся в канале в начальный момент времени. В области двумерного течения в обоих случаях границы порций приобретают характерные грибовидные формы.

Влияние параметров W и α на массораспределение демонстрируется на рис. 7 и 8. Бóльшая доля порций в области двумерного течения перераспределяется к внешней стенки канала независимо от величины определяющих параметров. В области одномерного течения порции деформируются в соответствии с кинематикой полностью развитого течения.

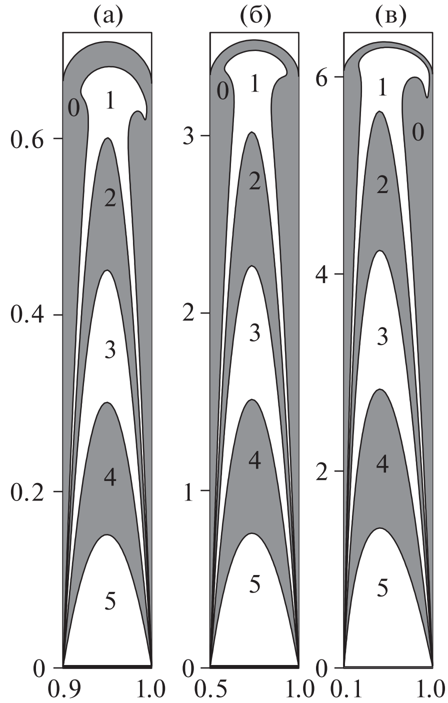


**Рис. 8.** Топограммы массораспределения при W = 20: а, б, в – $\alpha$ = 0.9, 0.5, 0.1.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирована математическая постановка задачи о заполнении вязкой жидкостью цилиндрического канала с центральным телом в поле силы тяжести. Продемонстрированы установление с течением времени формы свободной границы и разделение потока на зоны одномерного и двумерного течения. Получены критериальные зависимости характеристик формы границы $\chi_i$, $\chi_o$ и длины зоны двумерного течения $l_{2D}$ от параметра, определяющего отношение гравитационных и вязких сил в потоке, и ширины зазора. Построены топограммы массораспределения порций жидкости в заполненном жидкостью пространстве.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 18-08-00412).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Глушков И.А., Милехин Ю.М., Меркулов В.М., Банзула Ю.Б.* Моделирование формования изделий из свободно-литьевых композиций. М.: Архитектура-С, 2007. 361 с.
2. *Mitsoulis E.* Fountain flow revisited: The effect of various fluid mechanics parameters // AIChE J. 2010. V. 56. № 5. P. 1147–1162.
3. *Borzenko E.I., Frolov O.Y., Shrager G.R.* Kinematics of the fountain flow during pipe filling with a power-law fluid // AIChE J. 2019. V. 65. № 2. P. 850–858.
4. *Borzenko E.I., Ryltseva K.E., Shrager G.R.* Free-surface flow of a viscoplastic fluid during the filling of a planar channel // J. Non-Newton. Fluid Mech. 2018. V. 254. P. 12–22.
5. *Coyle D.J., Blake J.W., Macosko C.W.* The kinematics of fountain flow in mold-filling // AIChE J. 1987. V. 33. № 7. P. 1168–1177.
6. *Behrens R.A. et al.* Transient free-surface flows: Motion of a fluid advancing in a tube // AIChE J. 1987. V. 33. № 7. P. 1178–1186.
7. *Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р.* Влияние вязкой диссипации на температуру, вязкость и характеристики течения при заполнении канала // Теплофизика и аэромеханика. 2014. Т. 21. № 2. С. 221–231.
8. *Борзенко Е.И., Фролов О.Ю., Шрагер Г.Р.* Фонтанирующее течение вязкой жидкости при заполнении канала с учетом диссипативного разогрева // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 1. С. 45–55.
9. *Rose W.* Fluid–Fluid Interfaces in Steady Motion // Nature. 1961. V. 191. № 4785. P. 242–243.

10. *Байокки К., Пухначев В.В.* Задачи с односторонними ограничениями для уравнений Навье–Стокса и проблема динамического краевого угла // Прикладная механика и техническая физика. 1990. № 2. С. 27–40.
11. *Чехонин К.А., Сухинин П.А.* Движение нелинейно вязкопластичной жидкости со свободной поверхностью при заполнении осесимметричного объема // Математическое моделирование. 2001. Т. 13. № 3. С. 89–102.
12. *Шрагер Г.Р., Козлобродов А.Н., Якутенок В.А.* Моделирование гидродинамических процессов в технологии переработки полимерных материалов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999. 229 с.
13. *Слёзкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. 521 с.
14. *Patankar S. V.* Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere Pub. Corp., 1980. 197 p.
15. *Васенин И.М., Сидонский О.Б., Шрагер Г.Р.* Численное решение задачи о движении вязкой жидкости со свободной поверхностью // Доклады АН СССР. 1974. Т. 217. № 2. С. 295–298.
16. *Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р.* Влияние вида граничных условий на линии трехфазного контакта на характеристики течения при заполнении канала // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56. № 2. С. 3–14.
17. *Борзенко Е.И., Фролов О.Ю., Шрагер Г.Р.* Влияние вязкой диссипации на деформацию и ориентацию элементов жидкости при заполнении трубы // Инж.-физ. журн. 2016. Т. 89. № 4. С. 910–919.