

УДК 532.59:532.5.031

О СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТАХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ПОВЕРХНОСТИ СВОБОДНОПАДАЮЩЕЙ СОСТАВНОЙ КАПЛИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

© 2020 г. А. А. Ширяев^{а,*}

^а Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

* E-mail: aashiryayev@list.ru

Поступила в редакцию 18.06.2019 г.

После доработки 08.10.2019 г.

Принята к публикации 08.10.2019 г.

Представлен анализ осцилляций поверхности двухслойной капли идеальной жидкости. Показана возможность присутствия двух разных частот осцилляций выбранной моды. Проанализировано влияние основных параметров составляющих каплю жидкостей на собственные частоты осцилляций моды. Получено, что относительное уменьшение толщины слоя внешней жидкости приводит к снижению собственных частот как синфазных, так и противофазных колебаний. Увеличение разницы между коэффициентами поверхностного натяжения приводит к увеличению собственных частот. Относительное увеличение плотности внутренней жидкости повышает собственные частоты в синфазном режиме и практически не влияет на частоты в противофазном режиме. Получены упрощенные выражения для параметрических зависимостей собственных частот осцилляций свободно поверхности составной капли.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, капля, осцилляции поверхности, составная капля, собственные частоты

DOI: 10.31857/S0568528120020127

Исследование поверхностных осцилляций капель жидкости, состоящих из жидкого ядра и окружающего его слоя другой жидкости, начались существенно позже исследований однородной капли. Одной из первых работ считается работа [1], в которой исследовалась устойчивость тонкой пленки на поверхности капли. Осцилляции стратифицированной по плотности капли идеальной жидкости были исследованы теоретически и экспериментально в работе [2], причем авторы ограничились анализом влияния толщины стенки на частоты колебаний. В последующих исследованиях рассматривались дополнительные факторы и особенности поведения составных капель – вращение жидкости [3], затухание осцилляций [4], устойчивость поверхности [5], влияние формы и положения ядра на форму поверхности капли [6, 7]. Отметим, что в [2, 4, 7] проведен анализ только моды осцилляций с номером $n = 2$.

Интерес исследователей к поведению составной капли не ослабевает, проводятся экспериментальные исследования осцилляций составной капли на горизонтальной поверхности [8], а спектр собственных частот составных капель изучается аналитически [9]. Свободная поверхность составной капли, равновесная форма которой отлична от сферической, исследуется методами численного моделирования [10–14].

В настоящей работе рассматриваются осцилляции свободной поверхности составной капли с целью исследования влияния на них основных характеристик жидкостей, а также проанализировать для типичных жидкостей, используемых в экспериментах. Второй целью является получение упрощенных выражений для изучаемых параметрических зависимостей. Целесообразным будет рассмотрение осцилляций, как основной, так и более высоких мод, так как современные высокоскоростные камеры и методы обработки изображений позволяют идентифицировать и выделять характеристики третьей и более высоких мод [15].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются осцилляции сферической капли радиуса R , состоящей из двух слоев несмешивающихся невязких несжимаемых жидкостей. Слой верхней жидкости плотностью ρ_1 имеет толщину h . Внутренняя жидкость, составляющая “ядро” капли, имеет плотность ρ_2 . Коэффициенты поверхностного натяжения свободной поверхности капли и границы раздела жидкостей обозначаются σ_1 и σ_2 соответственно. Осцилляции возмущенной свободной поверхности капли будем описывать функцией $\xi_1(\theta, t)$, а возмущение границы раздела сред — $\xi_2(\theta, t)$. Ограничимся рассмотрением капиллярных осцилляций такой капли. Воздействием набегающего потока воздуха пренебрегается.

Задача формулируется и рассматривается в сферической системе координат (r, θ, φ) , с началом отсчета в центре масс капли. Используется осесимметричная постановка задачи, т.е. пренебрегается зависимостью величин от азимутального угла φ . Такой подход позволяет сократить объем выкладок без потери общности рассуждений.

При математической постановке задачи используются безразмерные переменные с тремя характерными масштабами: радиус равновеликой капли R , плотность внешнего слоя жидкости ρ_1 и коэффициент поверхностного натяжения σ_1 . Все остальные величины в уравнениях будут выражены в долях своих характерных масштабов

$$[P] = \sigma_1/R; \quad [V] = \sqrt{\sigma_1/\rho_1 R}; \quad [t] = \sqrt{\rho_1 R^3/\sigma_1}$$

За безразмерными величинами сохраняются старые обозначения.

Вводятся безразмерные отношения плотностей слоев $\rho \equiv \rho_2/\rho_1$ и отношение коэффициентов поверхностного натяжения $\sigma \equiv \sigma_2/\sigma_1$.

Ограничимся рассмотрением безвихревых течений $\text{rot } \mathbf{V} = 0$, благодаря чему в задаче можно перейти от векторных полей скоростей течения жидкости $\mathbf{V}_{1,2}$ к соответствующим гидродинамическим потенциалам ψ_1, ψ_2 : $\mathbf{V}_{1,2} = \nabla \psi_{1,2}$.

Скаляризованная таким образом система уравнений состоит из уравнений Эйлера в форме Громеки–Лэмба для безвихревых течений

$$\partial_t \psi_1 + \frac{(\nabla \psi_1)^2}{2} = -P_1 + \text{const}; \quad \partial_t \psi_2 + \frac{(\nabla \psi_2)^2}{2} = -\frac{P_2}{\rho} + \text{const}$$

где P_1 и P_2 — гидродинамические давления во внешнем и внутреннем слое капли соответственно.

Уравнения несжимаемости жидкости преобразуются в уравнения Лапласа для гидродинамических потенциалов

$$\nabla(\nabla \psi_{1,2}) = \Delta \psi_{1,2} = 0$$

Кинематическое и динамическое условия на свободной поверхности

$$r = 1 + \xi_1(\theta, t); \quad \frac{dF_1(r, \theta, t)}{dt} = 0; \quad P_1 - P_{\sigma_1} = P_{ext}$$

где $F_1(r, \theta, t) \equiv r - 1 - \xi_1(\theta, t)$, а $P_{\sigma_1} = \text{div } \mathbf{n}_1$ — давление капиллярных сил на свободной поверхности, P_{ext} — гидростатическое давление окружающей среды. Нормаль к свободной поверхности капли \mathbf{n}_1 определяется формулой

$$\mathbf{n}_1 \equiv \frac{\nabla F_1(r, \theta, t)}{|\nabla F_1(r, \theta, t)|}$$

Условия на границе раздела сред: кинематическое, динамическое и условие равенства нормальных компонент скоростей жидкости

$$r = 1 - h + \xi_2(\theta, t); \quad \frac{dF_2(r, \theta, t)}{dt} = 0; \quad P_2 - P_{\sigma_2} = P_1; \quad \nabla \psi_1 \times \mathbf{n}_2 = \nabla \psi_2 \times \mathbf{n}_2$$

где $F_2(r, \theta, t) \equiv r - 1 + h - \xi_2(\theta, t)$, а $P_{\sigma_2} = \sigma \text{div } \mathbf{n}_2$ — давление капиллярных сил на границе раздела, а \mathbf{n}_2 — выражение для нормали к границе раздела сред

$$\mathbf{n}_2 \equiv \frac{\nabla F_2(r, \theta, t)}{|\nabla F_2(r, \theta, t)|}$$

Интегральные условия сохранения объема капли

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{1+\xi_1(\theta, t)} \int_0^r r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi; \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{1-h+\xi_2(\theta, t)} \int_0^r r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi \rho (1-h)^3$$

Интегральное условие неподвижности центра масс капли записывается с учетом выражения для $\mathbf{e}_r \equiv \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ в декартовой системе координат, $\mathbf{e}_r = \mathbf{i} \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{k} \cos \theta$ после чего разбивается на три интеграла по декартовым осям $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, из которых при интегрировании по углу φ обнуляются интегралы при \mathbf{i} и \mathbf{j} . После этих процедур оно приводится к виду

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{1-h+\xi_2(\theta, t)} \int_0^r \rho r^3 \cos \theta \sin \theta dr d\theta d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\xi_1(\theta, t)} \int_0^r r^3 \cos \theta \sin \theta dr d\theta d\varphi = 0$$

Сформулированная выше задача решается с использованием асимптотических методов – величины волнового возмущения поверхности капли и границы раздела сред полагаются малыми по сравнению с размерами капли: $\max |\xi_{1,2}(\theta, t)|/R \sim \varepsilon \ll 1$. Здесь величина ε , отношение амплитуды осцилляций поверхности капли к ее радиусу, является малым параметром задачи. Соответствующий порядок малости будут иметь поля скоростей жидкости, вызванные этими возмущениями, и гидродинамические потенциалы $\mathbf{V}_{1,2} \sim \psi_{1,2} \sim \xi_{1,2}(\theta, t) \sim \varepsilon$. Гидродинамические давления и давления капиллярных сил представляются в виде разложений по малому параметру ε . Верхним индексом с арабской цифрой в скобочках здесь и далее обозначим компоненту соответствующего порядка по ε

$$P_1 = P_1^{(0)} + \varepsilon P_1^{(1)} + o(\varepsilon^2) \quad P_2 = P_2^{(0)} + \varepsilon P_2^{(1)} + o(\varepsilon^2)$$

$$P_{\sigma 1} = P_{\sigma 1}^{(0)} + \varepsilon P_{\sigma 1}^{(1)} + o(\varepsilon^2) \quad P_{\sigma 2} = P_{\sigma 2}^{(0)} + \varepsilon P_{\sigma 2}^{(1)} + o(\varepsilon^2)$$

Ограничимся учетом слагаемых, имеющих порядок до ε^1 включительно. Процедура линеаризации проводится стандартными методами, после которой формулируются задачи нулевого и первого порядка по амплитуде возмущения.

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Задача нулевого по ε порядка состоит из уравнений Эйлера и динамических граничных условий. Дополнительные интегральные условия выполняются тождественно. Равновесная форма капли совпадает с изначально заданной. Решение сводится к нахождению гидростатических давлений в невозмущенной двухслойной сферической капле

$$P_1^{(0)} = P_{ext} + 2; \quad P_2^{(0)} = \frac{2}{1-h} \sigma + P_{ext} + 2$$

Для анализа осцилляций возмущенной поверхности капли исследуется задача первого порядка малости по ε

$$P_1^{(1)} = -\partial_t \psi_1 \tag{2.1}$$

$$P_2^{(1)} = -\rho \partial_t \psi_2 \tag{2.2}$$

$$\Delta \psi_1 = 0 \tag{2.3}$$

$$\Delta \psi_2 = 0 \quad r \rightarrow 0: |\nabla \psi_2| < \infty \tag{2.4}$$

$$r = 1: -\frac{\partial \xi_1(\theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0 \tag{2.5}$$

$$r = 1: P_1^{(1)} - P_{\sigma 1}^{(1)} = 0 \tag{2.6}$$

$$r = 1-h: -\frac{\partial \xi_2(\theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = 0 \tag{2.7}$$

$$r = 1 - h: P_2^{(1)} - P_{\sigma_2}^{(1)} = P_1^{(1)} \quad (2.8)$$

$$r = 1 - h: \partial_r \psi_1 = \partial_r \psi_2 \quad (2.9)$$

$$P_{\sigma_1}^{(1)} = -2\xi_1(\theta, t) - \Delta_\theta \xi_1(\theta, t); \quad P_{\sigma_2}^{(1)} = \frac{-2\xi_2(\theta, t) - \Delta_\theta \xi_2(\theta, t)}{(1-h)^2} \quad (2.10)$$

где $\Delta_\theta \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$

$$\frac{2\pi}{3} \int_0^\pi (3\xi_2(\theta, t))(1-h)^2 \sin \theta d\theta = 0 \quad \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi 3\xi_1(\theta, t) \sin \theta d\theta = 0 \quad (2.11)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{4} (1-h + 4\xi_2(\theta, t)) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{4} (h + 4\xi_1(\theta, t) - 4\xi_2(\theta, t)) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = 0 \quad (2.12)$$

Функции, описывающие возмущение свободной поверхности $\xi_1(\theta, t)$ и границы раздела сред $\xi_2(\theta, t)$ представляются в виде разложений по полиномам Лежандра

$$\xi_1(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) P_n(\theta) \quad (2.13)$$

$$\xi_2(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(t) P_n(\theta) \quad (2.14)$$

где коэффициенты $\alpha_n(t)$ и $\beta_n(t)$ имеют смысл амплитуд осциллирующей моды с номером n .

Кинематическая задача состоит из уравнений Лапласа на гидродинамические потенциалы с учетом условия ограниченности поля скоростей (2.3), (2.4), кинематические граничные условия (2.5), (2.7) и условие равенства нормальных компонент скоростей (2.9) на границе раздела слоев.

Решения уравнений Лапласа (2.3), (2.4) в сферической системе координат известны [16] и с учетом условия ограниченности поля скоростей имеют вид

$$\psi_1(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\theta); \quad (2.15)$$

$$\psi_2(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n r^n P_n(\theta). \quad (2.16)$$

Решения (15, 16) и выражения для функций возмущений поверхностей (2.13), (2.14) подставляются в кинематические граничные условия (2.5), (2.7) и условия равенства нормальных компонент скоростей жидкостей (2.9). Данные условия должны выполняться при любом угле θ , поэтому можно воспользоваться линейной независимостью полиномов Лежандра, приравняв коэффициенты при полиномах одного порядка, после чего система может быть приведена к виду

$$nA_n + (-1-n)B_n - \alpha'_n(t) = 0$$

$$V_n = \beta'_n(t)/n \quad (2.17)$$

$$(1-h)^{-1+n} nA_n + (1-h)^{-2-n} (-1-n)B_n - (1-h)^{-1+n} nV_n = 0$$

Здесь и далее штрихом обозначим частную производную по времени.

Из выписанной выше системы (2.17) находятся выражения для коэффициентов A_n , B_n , V_n через коэффициенты $\alpha_n(t)$ и $\beta_n(t)$ разложений (2.13, 2.14)

$$B_n = \frac{(1-h)(\alpha'_n(t) - \beta'_n(t))}{(-(1-h)^{-2n} + 1-h)(1+n)}$$

$$A_n = \frac{\alpha'_n(t)}{n} - \frac{(1-h)(\alpha'_n(t) - \beta'_n(t))}{-n + n(1-h)^{-2n} + nh} \quad (2.18)$$

$$V_n = \beta'_n(t)/n$$

Дополнительные интегральные условия (2.11), (2.12), выписанные с учетом выражений (2.13), (2.14), определяют амплитуды нулевых мод $\alpha_0(t)$, $\beta_0(t)$ и дают связь между амплитудами первых мод $\alpha_1(t)$ и $\beta_1(t)$ осцилляций свободной поверхности и границы раздела

$$\alpha_0(t) = 0, \quad \beta_0(t) = 0 \quad \rho_1\alpha_1(t) + (\rho_2 - \rho_1)\beta_1(t) = 0$$

Отсутствие осцилляций нулевой моды свободной поверхности $\alpha_0(t)$ определяется требованием сохранения объема жидкости. Связность осцилляций первой моды свободной поверхности ($\alpha_1(t)$) с осцилляциями первой же моды границы раздела ($\beta_1(t)$) следует из введенной системы отсчета, располагающейся в центре масс капли. Отметим, что первая мода осцилляций свободной поверхности связана со смещением ядра капли, как целого, а в экспериментах [2] получено, что ядро капли центрируется за несколько периодов осцилляций (т.е. $\beta_1(t)$, а следовательно, и $\alpha_1(t)$ становятся равными нулю). Далее будут рассматриваться осцилляции более высоких мод с номерами $n \geq 2$.

Используя выражения (2.15), (2.16) для гидродинамических потенциалов и (2.13), (2.14) функций возмущения поверхностей, можно определить выражения для компонент давлений, входящих в динамические граничные условия (2.6), (2.8).

Компонента гидродинамического давления внешней жидкости определяется из выражения (2.1) с подстановкой явного вида гидродинамического потенциала (2.15)

$$P_1^{(1)} = - \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\theta) A'_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} r^{-1-n} P_n(\theta) B'_n(t) \right) \quad (2.19)$$

Компонента гидродинамического давления во внутренней жидкости рассчитывается по формуле (2.2) с подстановкой выражения (2.16):

$$P_2^{(1)} = -\rho \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\theta) V'_n(t) \quad (2.20)$$

Поправки порядка ϵ к капиллярному давлению на свободной поверхности и на границе раздела сред рассчитываются по формулам (2.10) с учетом выражений (2.15), (2.16):

$$P_{\sigma 1} = \alpha_n(t)(n-1)(n+2); \quad P_{\sigma 2} = \left(\frac{\sigma}{(-1+h)^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n+2)\beta_n(t)P_n(\theta) \quad (2.21)$$

Выражения (2.19)–(2.21) для давлений подставляются в граничные условия (2.6), (2.8). Баланс давлений на свободной поверхности (2.6) с учетом (2.13), (2.18) и линейной независимости полиномов Лежандра

$$C_1(n)\alpha_n(t) + C_2(n)\alpha''_n(t) + C_3(n)\beta''_n(t) = 0 \quad (2.22)$$

$$C_1(n) = (1-n)(2+n) \quad (2.23)$$

$$C_2(n) = \left(\frac{-1}{(1-(1-h)^{2n} + (1-h)^{2n}h)n} + \frac{(1-h)^{-1+n}}{(1-h)^{-2-n}(-1-n) + (1-h)^{n-1}(1+n)} \right)$$

$$C_3(n) = \left(\frac{(1-h)^{2+n}}{(1-(1-h)^{2n} + (1-h)^{2n}h)n} - \frac{1}{(1-h)^{-2-n}(-1-n) + (1-h)^{n-1}(1+n)} \right)$$

Аналогичной подстановкой (2.14), (2.18) в (2.8) получается эволюционное уравнение на $\alpha_n(t)$, $\beta_n(t)$ на границе раздела сред:

$$C_4(n)\beta_n(t) + C_5(n)\alpha''_n(t) + C_6(n)\beta''_n(t) = 0 \quad (2.24)$$

$$C_4(n) = - \frac{(-1+n)(2+n)\sigma}{(-1+h)^2} \quad (2.25)$$

$$C_5(n) = \left(\frac{(1-h)^n}{(1-(1-h)^{2n} + (1-h)^{2n}h)n} - \frac{1}{(1-h)^2((1-h)^{-2-n}(-1-n) + (1-h)^{-1+n}(1+n))} \right)$$

$$C_6(n) = \left(-\frac{(1-h)^{2+2n}}{(1-(1-h)^{2n} + (1-h)^{2n}h)n} + \frac{(1-h)^{-1-n}}{(1-h)^{-2-n}(-1-n) + (1-h)^{-1+n}(1+n)} + \frac{(-1+h)\rho}{n} \right)$$

Эволюционное уравнение получается из взаимной комбинации уравнений (2.22), (2.24). Для этого из (2.22) выражается $\beta_n''(t)$, и полученное выражение подставляется в (2.24), после чего уравнение (2.24) решается относительно $\beta_n(t)$ и получившееся решение подставляется в уравнение (2.22), которое примет вид:

$$D_1(n)\alpha_n(t) + D_2(n)\alpha_n''(t) + D_3(n)\alpha_n^{(4)}(t) = 0 \quad (2.26)$$

$$D_1(n) = -C_1(n)/C_3(n);$$

$$D_2(n) = -\frac{C_2(n)}{C_3(n)} - \frac{C_1(n)C_6(n)}{C_3(n)C_4(n)}, \quad (2.27)$$

$$D_3(n) = \frac{C_5(n)}{C_4(n)} - \frac{C_2(n)C_6(n)}{C_3(n)C_4(n)}.$$

Эволюционное уравнение (2.26) для $\alpha_n(t)$ является однородным дифференциальным уравнением четвертого порядка и сводится к характеристическому уравнению для собственных частот ω_n отдельных мод осцилляций, решение которого запишется в виде дисперсионного соотношения

$$\omega_n = 2^{-1/2} \left(\frac{D_2(n)}{D_3(n)} \pm \sqrt{\frac{D_2(n)^2 - 4D_3(n)D_1(n)}{D_3(n)}} \right)^{1/2} \quad (2.28)$$

где коэффициенты эволюционного уравнения $D_i(n)$ определяются выражениями (2.27) с учетом (2.23), (2.25) для коэффициентов $C_i(n)$. Значения собственных частот по формулам (2.28) соответствуют результатам, опубликованным в [2].

3. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Проанализируем случай, когда капля составлена из двух несмешивающихся жидкостей в приблизительно равных объемных пропорциях. Ограничиваясь рассмотрением жидкостей близких по величине плотностей, получим значение параметра $h \approx 0.2$.

Для примера рассмотрим пару жидкостей вода–масло (минеральное или растительное), где вода составляет внутренний слой жидкости. Коэффициент поверхностного натяжения воды на границе с воздухом примерно в 2.5 раза выше, чем аналогичный коэффициент для масел. С учетом правила Антонова для коэффициента межфазного натяжения на границе раздела сред, получим приблизительные значения безразмерного параметра $\sigma = 1.5$. Будем рассматривать низкие моды осцилляций свободной поверхности капли $2 \leq n \leq 5$.

Как видно из рис. 1, каждая мода осцилляций поверхности капли имеет две собственные частоты, одна из которых существенно превышает другую. Для сравнения кривой (3) показаны собственные частоты, полученные Рэлеем [17] для сферической капли однородной жидкости.

В безразмерном виде собственные частоты для однородной жидкости (т.е. вся капля будет состоять из жидкости внешнего слоя) запишутся формулой: $\omega = \sqrt{n(n-1)(n+2)}$. Как показано в [2, 5], колебания поверхности высокой частоты (кривая 1) соответствуют синфазным колебаниям ядра и внешнего слоя, а низкой частоты (кривая 2) – противофазным.

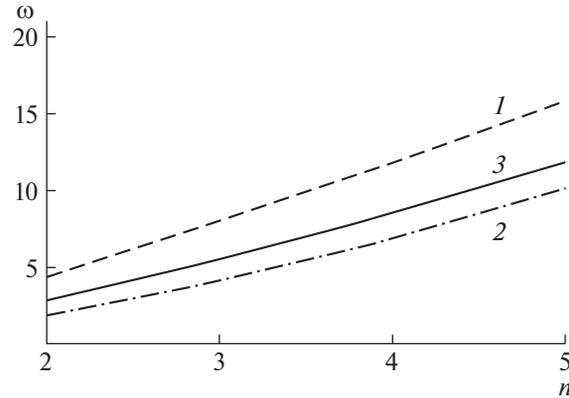


Рис. 1. Зависимость собственных частот осцилляций от номера моды при $h = 0.2$, $\sigma = 2$, $\rho = 1.2$: — 1, 2 — два решения биквадратного эволюционного уравнения (26); 3 — собственные частоты осцилляций поверхности сферической капли однородной жидкости [17].

Проанализируем влияние параметров задачи на колебания обоих режимов. Для иллюстрации отличий от случая однородной капли вводится параметр δ как отношение собственной частоты (2.28) к частоте колебаний однородной капли $\omega = \sqrt{n(n-1)(n+2)}$. Такая нормировка позволит приводить на одном рисунке частоты сразу нескольких мод, так как их абсолютные значения сильно отличаются друг от друга. На последующих рисунках нормированные частоты осцилляций однородной капли равны единице, с которой сравниваются оценки частот колебаний составной капли.

Как можно заметить на приведенных на рис. 2 зависимостях, с увеличением h нормированные частоты осцилляций в синфазном режиме увеличиваются по сравнению с однородной каплей [17]. На режим противофазных колебаний изменение толщины слоя оказывает более значительное влияние: частоты существенно меньше рэлеевских [17], но приближаются к ним по мере увеличения толщины слоя. Отметим, что коэффициент $D_3(n)$ при рассматриваемых значениях параметров σ , h и ρ мал по сравнению с $D_1(n)$ и $D_2(n)$ и нормированная частота противофазных осцилляций может быть приближенно описана функцией

$$\delta(n) \approx \frac{D_2(n)^{1/2} D_3(n)^{-1/2}}{\sqrt{(-1+n)n(2+n)}} - \frac{D_1(n) D_2(n)^{-3/2} D_3(n)^{1/2}}{2\sqrt{(-1+n)n(2+n)}} \quad (2.29)$$

Более грубое приближение, состоящее только из первого слагаемого выражения (2.29), приводит к слиянию решений, соответствующих разным режимам осцилляций.

Оценим влияние коэффициентов поверхностного натяжения жидкостей. В синфазном режиме частоты осцилляций становятся заметно больше рэлеевских по мере увеличения безразмерного отношения коэффициентов поверхностного натяжения σ . Зависимости описываются формулами (2.28), однако с точностью в 4% могут быть аппроксимированы линейными функциями с $\partial\delta/\partial\sigma = 0.25$ при $h = 0.2$ и $1 < \sigma < 2$ для мод с номерами $2 \leq n \leq 5$. В противофазном режиме при тех же параметрах увеличение σ оказывает слабое влияние на амплитуды мод осцилляций, незначительно их увеличивая, а величина $\partial\delta/\partial\sigma$ составляет единицы процентов. При близких значениях плотностей жидкостей $1 < \rho < 1.2$ величина $\partial\delta/\partial\rho$ для противофазных колебаний при значениях $1 < \sigma < 2$ на два порядка меньше δ , а влияние ρ на осцилляции поверхности практически отсутствует. Нормированная частота для синфазных колебаний снижается с увеличением ρ и в заданных пределах ($1 < \rho < 1.2$) может быть аппроксимирована линейной функцией с $\partial\delta/\partial\rho \approx 0.5$ для низких мод ($n = 2, 3, 4, 5$).

Отметим, что наличие жидкого ядра в капле оказывает наибольшее влияние на частоты осцилляций основной второй моды, что видно из рис. 2, где кривые, соответствующие $n = 2$, находятся дальше остальных от собственных частот для однородной капли $\delta = 1$. Частоты более высоких мод также существенно отличаются от собственных частот для однородной капли, и это необходимо учитывать при моделировании поверхности осциллирующей капли, содержащей в себе жидкое ядро.

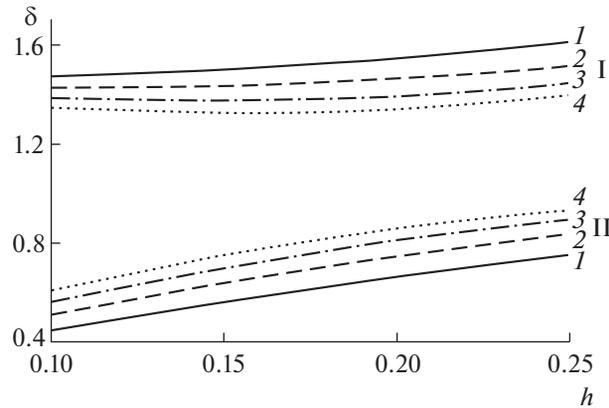


Рис. 2. Зависимость нормализованных частот осцилляций δ от безразмерной толщины слоя h , построенные при $\sigma = 1.5$, $\rho = 1.2$: $1-4 - n = 2, 3, 4, 5$; I, II – синфазные и противофазные колебания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено два значения собственных частот осцилляций свободной поверхности составной капли. Частоты осцилляций в синфазном режиме больше частот осцилляций однородной капли (случай отсутствующего жидкого ядра).

Для синфазного режима колебаний уменьшение размера жидкого ядра, уменьшение различий в плотности жидкостей, а также увеличение отношения коэффициентов межфазного натяжения σ приводят к увеличению собственных частот, а также увеличению их отличия от собственных частот для случая однородной жидкости.

В противофазном режиме частоты осцилляций меньше частот для случая однородной капли, и это отличие увеличивается по мере уменьшения σ и уменьшения толщины слоя. Изменение отношения плотностей в пределах $1 < \rho < 1.2$ какого-либо существенного влияния на частоты в противофазном режиме не оказывает.

Зависимости нормированных частот от σ в рамках исследованного диапазона значений параметров могут быть аппроксимированы линейными функциями с точностью в 4%.

Отличие собственных частот осцилляций от частот для однородной капли существенно и для более высоких мод, что необходимо учитывать при моделировании поверхности составной капли.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 19-19-00598).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Patzer J.F., Homsy G.M. Hydrodynamic stability of thin spherically concentric fluid shells // J. Colloid and Interface Science, 1975. V. 51. № 3. P. 499–508. [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(75\)90146-0](https://doi.org/10.1016/0021-9797(75)90146-0)
2. Saffren M., Elleman D.D., and Rhim W.K. Normal Modes of a Compound Drop // Proceedings of the Second International Colloquium on Drops and Bubbles, Monterey, California, November 1981 (D. H. Le Croisette, Ed.), Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena CA, 1982. V. 82. № 7. P. 7–14.
3. Lyell M.J., Wang T.G. Oscillations of a compound drop system undergoing rotation // Physics of Fluids. 1985. V. 28, № 4. P. 1023–1026. <https://doi.org/10.1063/1.865022>
4. Lyell M.J., Wang T.G. Oscillations of a viscous compound drop // Physics of Fluids. 1986. V. 29. № 10. P. 3481–3483. <https://doi.org/10.1063/1.865817>
5. Landman K.A. Stability of a viscous compound fluid drop // AIChE J. 1985. V. 31. № 4. P. 567–573. <https://doi.org/10.1002/aic.690310406>
6. Kan H.-C., Udaykumar H.S., Shyy W., Tran-Son-Tay R. Hydrodynamics of a compound drop with application to leukocyte modeling // Physics of Fluids, 1998. V. 10. № 4. P. 760–774. <https://doi.org/10.1063/1.869601>
7. Lyubimov D.V., Kononov V.V., Lyubimova T.P., Egry I. Oscillations of a liquid spherical drop encapsulated by a non-concentric spherical layer of dissimilar liquid // European Journal of Mechanics: B Fluids, 2012. V. 32. № 2. P. 80–87. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2011.11.002>

8. *Bansal S., Sen P.* Axisymmetric and Nonaxisymmetric Oscillations of Sessile Compound Droplets in an Open Digital Microfluidic Platform // *Langmuir*, 2017. V. 33. № 41. P. 11047–11058.
<https://doi.org/10.1021/acs.langmuir.7b02042>
9. *Egry I.* The oscillation spectrum of a compound drop // *J. Materials Science*. 2005. V. 40. № (9–10). P. 2239–2243.
<https://doi.org/10.1007/s10853-005-1940-9>
10. *Qu X., Wang Y.* Dynamics of concentric and eccentric compound droplets suspended in extensional flows // *Physics of Fluids*. 2012. V. 24. № 12. 123302.
<https://doi.org/10.1063/1.4770294>
11. *Chen Y., Liu X., Zhao Y.* Deformation dynamics of double emulsion droplet under shear // *Applied Physics Letters*. 2015. V. 106. № 14. 141601.
<https://doi.org/10.1063/1.4916623>
12. *Vu T.V., Vu L.V., Pham B.D., Luu Q.H.* Numerical investigation of dynamic behavior of a compound drop in shear flow // *J. of Mechanical Science and Technology*. 2018. V. 32. № 5. P. 2111–2117.
<https://doi.org/10.1007/s12206-018-0420-5>
13. *Luo Z.Y., He L., Bai B.F.* Deformation of spherical compound capsules in simple shear flow // *Journal of Fluid Mechanics*. 2015. V. 775. P. 77–104.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2015.286>
14. *Borthakur M.P., Biswas G., Bandyopadhyay D.* Dynamics of deformation and pinch-off of a migrating compound droplet in a tube // *Physical Review E*. 2018. V. 97. № 4. 043112
<https://doi.org/10.1103/physreve.97.043112>
15. *Коршунов А.И.* Колебания оторвавшейся от перемычки капли воды // *Изв. РАН. МЖГ*. 2015. № 4. С. 139–143.
16. *Араманович И.Г., Левин В.И.* Уравнения математической физики (2-е изд.). М.: Наука, 1969. С. 269.
17. *Rayleigh.* On the capillary phenomena of jets // *Proc. R. Soc. Lond.* 1879. V. 29. P. 71–97.